

# 一般領域上の BMO 関数の可積分性とその応用

防衛大学校 後藤泰宏

## 1 John-Nirenberg の定理, 問題

$D$  を  $\mathbf{R}^n$  の部分領域とする.  $D$  上の局所可積分な関数  $f$  は

$$\|f\|_* = \sup_Q |Q|^{-1} \int_Q |f - f_Q| dm < \infty$$

なるとき  $BMO(D)$  関数という. ここで  $dm$  は  $n$ -次元 Lebesgue 測度,  $\sup$  は  $D$  上の全ての立方体  $Q$  について取り  $|Q| = m(Q)$ ,  $f_Q = |Q|^{-1} \int_Q f dm$ , とする.  $\sup$  は閉立方体の全体についてとっても開立方体の全体についてとっても同じである.  $BMO(D)$  は定数差を度外視すれば Banach 空間となる.  $BMO$  関数の可積分性に関しては John-Nirenberg の評価が基本的である.

定理 1.1 (John-Nirenberg [7]).  $f \in BMO(Q)$  に対し

$$|\{x \in Q \mid |f - f_Q| \geq t\}| \leq C_1 \exp(-C_2 \frac{t}{\|f\|_*}), \quad t > 0.$$

$\log|x| \in BMO(\mathbf{R}^n)$  なることからこの評価は定数  $C_1, C_2$  の値を度外視すれば最良である. 特に

系 1.1.  $\exists c > 0, \forall f \in BMO(Q), \|f\|_* \leq 1, e^{c|f|} \in L^1(Q)$ .

系 1.2.  $BMO(Q) \subset L^p(Q), 0 < p < \infty$ .

他方一般の有界領域上の  $BMO$  関数に対してはもはやこのような評価は期待できない. 実際  $\phi(t) \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty$  なるどのような  $\phi$  に対しても有界な領域  $D \subset \mathbf{R}^n$  と  $\|f\|_* \leq 1$  なる  $BMO(D)$  関数  $f$  で  $\int_D \phi(|f|) dm = \infty$  なるものを容易に構成できる. また立方体  $Q$  上の  $BMO$  関数は常に  $\mathbf{R}^n$  上の  $BMO$  関数に延長可能であることに注意する. これらの事実を念頭に以下の問題を考える:

- (1) 領域  $D$  上の  $BMO$  関数に対し  $D$  上で John-Nirenberg 型の評価が成立するような領域  $D$  の特徴付け.
- (2) より一般に領域  $D$  及びその可測部分集合  $E$  で  $D$  上の  $BMO$  関数に対し  $E$  上で John-Nirenberg 型の評価が成立するものの特徴付け.

もちろん John-Nirenberg 型の指数的可積分性だけでなくより一般の可積分性についても同じ問題が考えられる. (1) に対する解答はすでに Staples, Smith-Stegenga によって得られておりその結果を §3 において紹介する. それに先立ち §2 では一般領域上の  $BMO$  空間の考察で基本となる  $BMO$  空間の分解定理について述べる. §4 では上記問題 (2) について考察する. 最後に §5, 6 では一様領域及び正值優調和関数の可積分性への応用について述べる.

## 2 $BMO$ 空間の分解, 擬双曲距離

まず  $BMO$  の定義は以下の意味で局所化できることに注意する.

定理 2.1 (cf. Reimann-Rychener [12]).  $D$  を  $\mathbf{R}^n$  の部分領域,  $\lambda \geq 1$  とする.  $f \in L^1_{\text{loc}}(D)$  に対し

$$K := \sup |Q|^{-1} \int_Q |f - f_Q| dm < \infty$$

であるとする. ここで  $\sup$  は  $d(Q, \partial D) \geq \lambda l(Q)$  なるものについてのみ取るものとする. そのとき  $f \in BMO(D)$  かつ  $\|f\|_* \leq C\lambda K$ .

この性質ゆえ領域の Whitney 分解を考えることが  $BMO$  空間の考察において非常に有効である.  $\mathbf{R}^n$  の真部分領域  $D$  について  $\mathcal{W}_D = \{Q\}$  をその Whitney 分解とし  $BMO(D)$  の以下の二つの閉部分空間を考える.

$$BMO_l(D) := \{f \in BMO(D) \mid f_Q = 0, Q \in \mathcal{W}_D\},$$

$$BMO_g(D) := \{f \in BMO(D) \mid f|_Q = \text{const.}, Q \in \mathcal{W}_D\}.$$

$\mathcal{W}_D$  の立方体の列  $Q_0, Q_1, \dots, Q_n$  は  $\bar{Q}_k \cap \bar{Q}_{k+1} \neq \emptyset, 0 \leq k \leq n-1$  なるとき  $Q_0$  と  $Q_n$  を結ぶ立方体鎖とい  $n$  をその長さという.  $Q, Q' \in \mathcal{W}_D$  に対し  $\mathcal{W}_D$  上の距離  $\delta_D(Q, Q')$  を  $Q$  と  $Q'$  を結ぶ立方体鎖の長さの最小値として定める. そのとき定理 2.1 及び  $f \in BMO(D), Q, Q' \in \mathcal{W}_D, \bar{Q} \cap \bar{Q}' = \emptyset$ , に対し  $|f_Q - f_{Q'}| \leq C\|f\|_*$  なることから

補題 2.1.  $BMO_g(D) = \text{Lip}(\mathcal{W}_D, \delta_D)$ .

となり  $BMO_g(D)$  の構造は単純である. 他方  $BMO_g(D)$  関数はそれを  $\mathbf{R}^n \setminus D$  上では 0 とおいて  $\mathbf{R}^n$  上の関数に延長するとき  $BMO(\mathbf{R}^n)$  関数となることがわかり

補題 2.2.  $BMO_l(D) \subset BMO(\mathbf{R}^n)|_D$ .

よって  $BMO_l(D)$  関数も扱いよい.  $f \in BMO(D)$  に対し分解

$$f(x) = (f(x) - f_Q) + f_Q, \quad x \in Q \in \mathcal{W}_D$$

を考えれば

補題 2.3.  $BMO(D) = BMO_l(D) \oplus BMO_g(D)$ .

よって

定理 2.2.  $BMO(D) = BMO(\mathbf{R}^n)|_D + \text{Lip}(\mathcal{W}_D, \delta_D)$ .

次に  $\text{Lip}(\mathcal{W}_D, \delta_D) = BMO_g(D)$  関数を平滑化しよう.  $\mathbf{R}^n$  の真部分領域  $D$  に対しその上の擬双曲距離  $k_D$  を

$$k_D(x, y) := \inf_{\gamma \subset D} \int_{\gamma} \frac{ds}{\delta_D(x)}, \quad x, y \in D,$$

により定める. ここで  $\delta_D(x) = d(x, \partial D)$  で  $\inf$  は  $x$  と  $y$  を結ぶ  $D$  上の求長可能な曲線  $\gamma$  の全体について取るものとする. 擬双曲距離は大域的には擬等角不変である:  $F: D \rightarrow D'$  を擬等角写像とすれば  $x, y \in B, 2B \subset D$  なる球  $B$  が存在しないような任意の二点  $x, y \in D$  に対し

$$k_{D'}(F(x), F(y)) \leq C k_D(x, y).$$

双曲距離  $h_D$  とは次のような関係がある.

$$k_D \gtrsim h_D, \quad D: \text{平面領域のとき},$$

$$k_D \approx h_D, \quad D: \text{単連結平面領域のとき}.$$

Whitney 分解は擬双曲距離のもとでほぼ合同な図形への分解であり  $\mathcal{W}_D$  上の距離  $\delta_D$  が  $D$  上の擬双曲距離  $k_D$  に対応することから  $BMO_g(D) \subset \text{Lip}(D, k_D) + L_\infty(D)$  となり次の分解定理を得る.

定理 2.3.  $BMO(D) = BMO(\mathbf{R}^n)|_D + \text{Lip}(D, k_D)$ .

正確には各  $BMO(D)$  関数  $f$  に対し  $f = g|_D + h$ , なる  $BMO(\mathbf{R}^n)$  関数  $g$  と  $\text{Lip}(D, k_D)$  関数  $h$  で  $\|g\|_* \leq C\|f\|_*$ ,  $\|h\|_{\text{Lip}} \leq C\|f\|_*$  かつ  $d(Q, D^c) \leq \lambda l(Q)$  なる任意の立方体  $Q$  に対し  $|g|_Q \leq C\|f\|_*$  なるものが取れる. よって  $BMO(D)$  関数の可積分性を調べるには  $BMO(\mathbf{R}^n)$  関数の可積分性と擬双曲距離関数の可積分性を調べればよい.

### 3 $BMO$ 関数の全領域上での可積分性

ここでは与えられた領域全体での可積分性について知られている結果を紹介する.

$\mathbf{R}^n$  の真部分領域  $D$  について定数  $\alpha, C > 0$  が存在し

$$k_D(x, x_0) \leq \frac{1}{\alpha} \log \frac{\delta_D(x_0)}{\delta_D(x)} + C, \quad x \in D$$

となるとき  $x_0$  を起点とする  $\alpha$ -Hölder 領域であるという. このとき必然的に  $0 < \alpha \leq 1$  となる. 単連結平面領域  $D$  については, 単位円板  $\Delta$  がら  $D$  へのリーマン写像  $f$  が  $\bar{\Delta}$  上まで Hölder 連

続に延びるときにかぎり  $D$  は Hölder 領域となる. Hölder 領域は有界であり outer cusp を持たないがいくらでも細長い廊下を持つことがある. また  $\alpha$ -Hölder 領域  $D$  に対してはその任意の境界点  $x$  に対し

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\delta_D(x_0)}{|x - x_n|} \geq \alpha$$

なる点列  $x_n \in D, x_n \rightarrow x$ , が取れる. John 領域, 特に Lipschitz 領域は常に Hölder 領域となっている.

単調非減少関数  $\phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ , はその増大度が高々指数的であるとき, すなわち

$$\phi(t+1) \leq C\phi(t), \quad t \geq 1$$

なるとき穏やかであるということにする. そのとき

定理 3.1 (Smith-Stegenga [13]).  $D$  を  $\mathbb{R}^n$  の部分領域,  $\phi$  を穏やかとするとき, 以下の 2 条件は同値である:

$$(1) \exists a > 0, \forall f \in BMO(D), \|f\|_* \leq 1, \int_D \phi(a|f|) dm < \infty;$$

$$(2) \exists b > 0, \int_D \phi(bk_D(\cdot, x_0)) dm < \infty.$$

さらに  $\phi(t) = e^t$  なるときについては次も同値である:

(3) ある  $c > 0$  に対し  $D$  は  $c$ -Hölder 領域.

(2)  $\Rightarrow$  (1) は  $\|k_D(\cdot, x_0)\|_* \leq C_n$  からただちに従う. (1)  $\Rightarrow$  (2) は  $BMO$  の分解定理及び John-Nirenberg の定理から示される. (2)  $\Rightarrow$  (3) はほぼ自明である. 実際  $D$  が Hölder 領域であるのは擬双曲距離関数が局所的に一樣に指数的可積分であること, すなわち

$$\int_{B_x} e^{C_1 k_D(\cdot, x_0)} dm \leq C_2, \quad x \in D, \quad (B_x = B(x, \delta_D(x)/2))$$

なる定数  $C_1, C_2 > 0$  が取れるときに限ることが容易にわかる. よってこの逆 (3)  $\Rightarrow$  (2) の成立すること, 擬双曲距離関数の局所的な指数可積分性が大域的なそれを導くということは注目すべき事実といえる. Smith-Stegenga は Hölder 領域  $D$  が Whitney  $\sharp$ -条件:

$$|\{x \in D \mid \delta_D(x) \leq t\}| \leq C_1 t^{C_2}$$

を満たすことを示すことで (3)  $\Rightarrow$  (2) を導いている.

系 3.1. 領域  $D \subset \mathbb{R}^n$  について  $D$  上で  $BMO(D)$  関数に対し John-Nirenberg 型の評価が成立するための必要十分条件は  $D$  が Hölder 領域なることである.

$\phi(t) = t^p$  として

系 3.2 (Staples [15]). 領域  $D \subset \mathbb{R}^n$  及び  $0 < p < \infty$  について  $BMO(D) \subset L^p(D)$  なるための必要十分条件は

$$\int_D k_D(\cdot, x_0)^p dm < \infty$$

## 4 $BMO$ 関数の可測部分集合上での可積分性

ここでは  $\mathbf{R}^n$  の部分領域  $D$  及び  $D$  の可測部分集合  $E$  について  $E$  上での  $BMO(D)$  関数の可積分性について以下の方針に沿って考える.

(Step 1)  $\mathbf{R}^n$  の真部分領域 に対し Whitney 分解を用いて Smith-Stegenga の手法を適用する (定理 4.1). ただしこの段階で得られる評価はあまりよくない.

(Step 2)  $BMO(\mathbf{R}^n) = BMO(\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$  及び  $BMO(\mathbf{R}^n)$  の相似変換による不変性を用いて  $D = \mathbf{R}^n$  の場合を考察する (定理 4.2). その結果に  $BMO$  の分解定理を合せて Step 1 の評価を改良する (定理 4.3).

より一般に重み付きの可積分性を考えても証明はほとんど同じなので以下重みを付けて考えることにする.  $\mathbf{R}^n$  の部分領域  $D$  上の重み  $w$  は  $D$  上局所的に一様に逆相加相乗不等式を満たすとき, すなわち, ある定数  $C > 0$  に対し

$$0 < M_1(Q, w) \leq CM_0(Q, w) < \infty, \quad Q \in \mathcal{A}_D,$$

なるとき  $w \in A_{\text{loc}}^\infty(D)$  という. ここで

$$M_p(w, Q) = \begin{cases} \text{ess sup}_Q w, & p = \infty, \\ \left( |Q|^{-1} \int_Q w^p dm \right)^{\frac{1}{p}}, & p \neq 0, p \neq \pm\infty, \\ \exp \left( |Q|^{-1} \int_Q \log w dm \right), & p = 0, \\ \text{ess inf}_Q w, & p = -\infty. \end{cases}$$

( $\lambda$  は与えられた定数) とする. 典型的な重み  $w \in A_{\text{loc}}^\infty(D)$  の例は  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ ,  $-\infty < \gamma < \frac{n}{n-2}$ ,  $u$  を  $D$  上の正值優調和関数として

$$w(x) = \delta_D(x)^\alpha (k_D(x, x_0) + 1)^\beta u(x)^\gamma$$

により与えられる.

重み  $w$  を持った  $BMO$  空間  $BMO_w(D)$  を,  $d\mu = wdm$  として

$$\sup_{Q \in \mathcal{A}_D} \mu(Q)^{-1} \int_Q |f - f_{Q, \mu}| d\mu < \infty$$

なる  $D$  上の  $\mu$ -局所可積分な関数  $f$  の全体として定める.  $w \in A_{\text{loc}}^\infty(D)$  ならば  $BMO_w(D) = BMO(D)$  であること (cf. [12]) に注意し全領域における可積分性についての Whitney 分解を用いた Smith-Stegenga の証明をたどれば

定理 4.1.  $D$  を  $\mathbf{R}^n$  の真部分領域,  $\phi$  を穏やかな関数,  $w \in A_{\text{loc}}^\infty(D)$ ,  $d\mu = wdm$ ,  $E$  を  $D$  の可測部分集合とする. そのとき以下の条件は同値:

(1)  $\exists p > 0, \forall f \in BMO(D), \|f\|_* \leq 1, \int_E \phi(p|f|)d\mu < \infty;$

(2)  $\exists p > 0, \int_E \phi(pk_D(\cdot, x_0))d\mu < \infty.$

また (2) が  $p = p_0$  で成立すれば

$0 < \forall p < C_1 \min(1, p_0), \forall f \in BMO(D), \|f\|_* \leq 1,$

$$\int_E \phi(p|f - f_{Q_0}|)d\mu \leq C_2 \left( \mu(Q_0) + \int_E \phi(pk_D(\cdot, x_0))d\mu \right).$$

ここで  $Q_0 \subset D$  は  $d(Q_0, \partial D) = l(Q_0)$  なる立方体,  $x_0$  は  $Q_0$  の中心とする.

定理で得られた評価式について注意を述べておく.  $D$  の Whitney 分解で得られる立方体  $Q$  について  $\mu(Q \cap E) \approx \mu(Q)$  であれば  $Q$  からみでの相対的評価としては  $Q \cap E$  上の評価はよくなり積分  $\int_{E \cap Q} \phi(p|f - f_{Q_0}|)d\mu$  は  $\int_E \phi(pk_D(\cdot, x_0))d\mu$  で評価することができる. 他方  $\mu(Q \cap E) \ll \mu(Q)$  なるときは  $Q$  からみた相対評価は悪くなるものの領域  $D$  から見て  $Q \cap E$  の絶対量が評価できるので今度は  $\mu(Q_0)$  によって評価することができる.

この評価式は第 1 項  $\mu(Q_0)$  が  $E$  に依存しておらずよいものではない. 特に  $E$  が小さいとき評価としては非常に悪いものとなっている.

次に  $BMO(\mathbf{R}^n)$  関数の  $\mathbf{R}^n$  の可測部分集合上での可積分性について考察する.  $D = \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$  として

$$BMO(D) = BMO(\mathbf{R}^n)$$

$$k_D(x, x_0) \approx \log \left( |x| + \frac{1}{|x|} \right)$$

なることに注意すれば定理 4.1 を  $BMO(\mathbf{R}^n)$  の場合に具体的に書き下すことができる. さらに  $BMO(\mathbf{R}^n)$  が  $\mathbf{R}^n$  の相似変換で不変であることを利用すれば, 定理 4.1 での評価の起点  $Q_0$  を動かすことで, 以下のように評価を改善できる.

穏やかな関数  $\phi, 0 < p < \infty$ , 及び  $\mathbf{R}^n$  の可測部分集合  $E$  に対しその moment  $N_{\phi,p}(E)$  及び  $N_p(E)$  を以下のように定める:

$$N_{\phi,p}(E) := |E|^{-1} \inf_{\substack{0 < s < \infty \\ y \in \mathbf{R}^n}} \left( s^{-n} + \int_E \phi(p \log^+ s|x-y|)dm(x) \right);$$

$$N_p(E) := |E|^{-1} \inf_{y \in \mathbf{R}^n} \left( \int_E |x-y|^p dm(x) \right)^{\frac{n}{n+p}}.$$

$N_{e^t,p}(E) \approx N_p(E)$  であり, またこれらの moment は  $\mathbf{R}^n$  の相似変換で不変となっている:  $\tau$  を  $\mathbf{R}^n$  の相似変換として

$$N_{\phi,p}(E) = N_{\phi,p}(\tau(E)), \quad N_p(E) = N_p(\tau(E)).$$

これら moment は  $E$  が球の場合に最小であり  $E$  の球からの変形度をあらわしているといえる。特に  $s = |E|^{-\frac{1}{n}}$  として自明な評価

$$N_{\phi,p}(E) \leq 1 + \inf_y |E|^{-1} \int_E \phi\left(\frac{p}{n} \log^+ \frac{|x-y|^n}{|E|}\right) dm(x),$$

を得る。

**定理 4.2.**  $\phi$  を穏やかな関数,  $E$  を  $\mathbf{R}^n$  の可測部分集合とする。そのとき以下の条件は同値:

(1)  $\exists p > 0, \forall f \in BMO(\mathbf{R}^n), \|f\|_* \leq 1, \int_E \phi(p|f|) dm < \infty;$

(2)  $\exists p > 0, \int_E \phi(p \log^+ |x|) dm < \infty;$

また (2) が  $p = p_0$  で成立すれば  $0 < \forall p < C_1 \min(1, p_0), \forall f \in BMO(\mathbf{R}^n), \|f\|_* \leq 1,$

$$\inf_{c \in \mathbf{C}} \int_E \phi(p|f - c|) dm \leq C_2 |E| N_{\phi,p_0}(E).$$

この評価の右辺  $|E| N_{\phi,p_0}(E)$  における  $|E|$  は集合  $E$  の絶対量を,  $N_{\phi,p_0}(E)$  は  $E$  の変形度をあらわしている。次節で見るとように  $\phi$  が指数関数の場合についてはこの評価によって一様領域を特徴づけられる。その意味でこの評価は最良である。

**系 4.1.**  $\mathbf{R}^n$  の可測部分集合  $E$  について,  $E$  上で  $BMO(\mathbf{R}^n)$  関数に対し *John-Nirenberg* 型の評価が成立するための必要十分条件は  $N_p(E) < \infty$  なる  $p > 0$  が存在することである。

よって Gehring-Palka [2] の評価式

$$\log \left( 1 + \frac{|x-y|}{\delta_D(y)} \right) \leq k_D(x, y), \quad x, y \in D,$$

に注意して  $BMO$  の分解定理を用いれば最終的な評価式として以下を得る。

**定理 4.3.** 定理 4.1 で  $w = 1$  なるとき, その評価式を以下のように改良できる:

$$\inf_{c \in \mathbf{C}} \int_E \phi(p|f - c|) dm \leq C \left( |E| N_{\phi,p_0}(E) + \inf_{x_0 \in D} \int_E \phi(p_0 k_D(\cdot, x_0)) dm \right).$$

## 5 一様領域

$\mathbf{R}^n$  の部分領域  $D'$  及びその部分領域  $D$  についてある定数  $C > 0$  が存在して

$$k_D(x, y) \leq C \left\{ k_{D'}(x, y) + \log \left( \frac{\delta_D(x) + \delta_D(y) + |x-y|}{\min(\delta_D(x), \delta_D(y))} \right) \right\}, \quad x, y \in D$$

なるとき  $D$  は  $D'$ -一様領域という。ここで  $k_{\mathbf{R}^n}$  は 0 とみなすものとする。特に  $D' = \mathbf{R}^n$ :

$$k_D(x, y) \leq C \log \left( \frac{\delta_D(x) + \delta_D(y) + |x-y|}{\min(\delta_D(x), \delta_D(y))} \right), \quad x, y \in D$$

なるとき  $D$  を一様領域という。

一様性は擬等角不変である. すなわち  $D$  が  $D'$ -一様領域で  $F : D' \rightarrow G'$  を擬等角写像とすれば  $G = F(D)$  は  $G'$ -一様となる. また有界一様領域は John 領域, 特に Hölder 領域である. 単連結平面領域に対しては, 一様領域なることと擬円板なることは同値である.

定理 5.1 (Jones [8], Gotoh [3]). 領域  $D, D', D \subset D'$ , について,  $D$  が  $D'$ -一様となるための必要十分条件は

$$BMO(D) = BMO(D')|_D.$$

よって, 定理 4.3 及び 5.1 を用いれば Hölder 領域に対する定理 3.1 に相当する次の結果を得る. 一般に実関数  $f$  及び定数  $p > 0$  に対し

$$\int_E e^{pf} dm \int_E e^{-pf} dm \leq \left( \inf_c \int_E e^{p|f-c|} dm \right)^2 \leq 4 \int_E e^{pf} dm \int_E e^{-pf} dm.$$

なることに注意.

定理 5.2. 領域  $D, D', D \subset D'$ , に対し, 以下の条件は同値である:

- (1)  $D$  は  $D'$ -一様;
- (2)  $\exists p, p_0, C > 0, \forall E \subset D, \forall x \in D,$

$$\int_E e^{pk_{D'}(\cdot, x)} dm \int_E e^{-pk_{D'}(\cdot, x)} dm \leq C \left( |E|^2 N_{p_0}(E)^2 + \left( \int_E e^{p_0 k_{D'}(\cdot, x)} dm \right)^2 \right);$$

- (3)  $\exists p, p_0, C > 0, \forall E \subset D, \forall f \in BMO(D), \|f\|_* \leq 1,$

$$\inf_{c \in \mathbf{C}} \int_E e^{p|f-c|} dm \leq C \left( |E| N_{p_0}(E) + \inf_{x_0 \in D} \int_E e^{p_0 k_{D'}(\cdot, x_0)} dm \right).$$

系 5.1. 領域  $D$  に対し以下は同値:

- (1)  $D$  : 一様領域;
- (2)  $\exists p, p_0, C > 0, \forall E \subset D, \forall x \in D,$

$$\int_E e^{pk_D(\cdot, x)} dm \int_E e^{-pk_D(\cdot, x)} dm \leq C |E|^2 N_{p_0}(E)^2;$$

- (3)  $\exists p, p_0, C > 0, \forall E \subset D, \forall f \in BMO(D), \|f\|_* \leq 1,$

$$\inf_{c \in \mathbf{C}} \int_E e^{p|f-c|} dm \leq C |E| N_{p_0}(E).$$

## 6 Lindqvist の定理, 優調和関数の可積分性への応用

$\mathbf{R}^n$  の部分領域  $D$  に対し  $H^+(D)$  で  $D$  上の正值調和関数の全体を,  $S^+(D)$  で  $D$  上の正值優調和関数の全体をあらわすものとする. Green 関数に対して Harnack の不等式を用いれば

補題 6.1.  $-\infty \leq p < \frac{n}{n-2}$ . そのとき

$$0 < M_p(u, Q) \leq CM_{-\infty}(u, Q) < \infty, \quad u \in S^+(D), \quad Q \in \mathcal{A}_D.$$

領域  $D$  上の重み  $w$  がある逆 Hölder 不等式を満たせば  $\log w \in BMO(D)$  なる一般的事実より

定理 6.1 (Lindqvist [9]).  $\|\log u\|_* \leq C_n$ ,  $u \in S^+(D)$ .

よって優調関数の可積分性に我々の結果を直接適用することができ

定理 6.2.  $D$  を  $\mathbf{R}^n$  の部分領域,  $\phi$  を穏やかな関数,  $w \in A_{\text{loc}}^\infty(D)$ ,  $d\mu = wdm$ ,  $E$  を  $D$  の可測部分集合とする. そのとき任意の  $p_0 > 0$  に対しある定数  $p, C > 0$  が存在し  $D$  の任意の可測部分集合  $E$ , 及び任意の  $u \in S^+(D)$  に対し

$$\int_E \phi(p|\log u - (\log u)_{B_0}|) wdm \leq C \left( \int_{B_0} wdm + \int_E \phi(p_0 k_D(\cdot, x_0)) wdm \right),$$

ここで  $B_0 \subset D$  は  $d(B_0, \partial D) = \text{rad}(B_0)$  なる球,  $x_0$  は  $B_0$  の中心とする.

定数  $(\log u)_{B_0}$  ( $= \log M_0(u, B_0)$ ) は  $\log M_p(u, B_0)$ ,  $-\infty \leq p < \frac{n}{n-2}$ , 特に  $\log(\min_{B_0} u)$  或いは  $\log(u_{B_0})$  で置き換えてもよい.  $H^+(D)$  関数 に対してはこの定理は自明である. 実際 Harnack の不等式から各点ごとの評価  $|\log u(x) - \log u(x_0)| \leq Ck_D(x, x_0)$  が成立する.

定理 5.2 及び 系 5.1 から

定理 6.3.  $D$  が  $D'$ -様領域であれば, 任意の  $p_0 > 0$  に対しある定数  $C, p > 0$ , が存在し  $D$  の任意の可測部分集合  $E$  及び任意の  $u \in S^+(D)$  に対し

$$\int_E u^p dm \int_E u^{-p} dm \leq C \left( |E|^2 N_{p_0}(E)^2 + \inf_{x_0 \in D} \left( \int_E e^{p_0 k_{D'}(\cdot, x_0)} dm \right)^2 \right).$$

系 6.1.  $D \subset \mathbf{R}^n$  が一様領域ならば, 任意の  $p_0 > 0$  に対しある定数  $C, p > 0$ , が存在し  $D$  の任意の可測部分集合  $E$ , 及び任意の  $u \in S^+(D)$  に対し

$$\int_E u^p dm \int_E u^{-p} dm \leq C|E|^2 N_{p_0}(E)^2.$$

逆に有限連結平面領域  $D$  に対しては定数  $C_1, C_2 > 0$  が存在し  $D$  上の任意の 2 点  $x, y$  に対し

$$k_D(x, y) \geq C_1(\log u(y) - \log u(x)) + C_2,$$

なる  $u \in H^+(D)$  が取れることから

定理 6.4. 平面領域  $D'$  及びその有限連結部分領域  $D$  について, ある定数  $p_0, p, C > 0$  が存在し, 定理 6.3 の評価が任意の可測集合  $E \subset D$ , 及び, 任意の  $u \in S^+(D)$  に対し成立するとする. そのとき  $D$  は  $D'$ -一様領域である.

系 6.2. 有限連結平面領域  $D$  についてある定数  $p_0, p, C > 0$  が存在し系 6.1 の評価が任意の可測集合  $E \subset D$ , 及び任意の  $u \in S^+(D)$  に対し成立するとする. そのとき  $D$  は一様領域である.

系 6.3. 単連結平面領域  $D \neq \mathbf{R}^2$  について  $D$  が擬円板である為の必要十分条件は,  
 $\exists p_0, p, C > 0, \forall E \subset D, \forall u \in S^+(D),$

$$\int_E u^p dm \int_E u^{-p} dm \leq C |E|^2 N_{p_0}(E)^2.$$

ここで Hölder 領域について対応する結果を紹介しておく.

定理 6.5 (Masumoto [10], Smith-Stegenga [14], Stegenga-Ullrich [16]).  $\mathbf{R}^n$  の部分領域  $D$  に対し以下の条件を考える:

- (1)  $D$  : Hölder 領域;
- (2)  $\exists p, C > 0, \forall u \in S^+(D), \int_D u^p dm \leq C u(x_0)^p;$
- (3)  $\exists p, C > 0, \forall u \in S^+(D), \int_D u^{-p} dm \leq C (u_{B_0})^{-p}.$

そのとき常に (1)  $\Rightarrow$  (2), (1)  $\Rightarrow$  (3). また  $D$  が有限連結平面領域であれば, これら 3 条件は互いに同値である.

最後に儀等角写像の可積分性への応用について述べる.  $\mathbf{R}^n$  の部分領域間の擬等角写像  $F$  のヤコビ行列式  $J_F$  は, ある逆 Hölder 不等式を満たし  $\log J_F$  の  $BMO$  ノルムは  $n$  及び  $F$  の maximal dilatation にのみ依存した定数で評価できる (cf. [12]). よって

定理 6.6.  $D$  を  $D'$ -一様領域,  $F$  を  $D$  上の擬等角写像とする. そのとき  
 $\forall p_0 > 0, \exists C, p > 0, \forall E \subset D,$

$$\int_E J_F^p dm \int_E J_F^{-p} dm \leq C \left( |E|^2 N_{p_0}(E)^2 + \inf_{x_0 \in D} \left( \int_E e^{p_0 k_{D'}(\cdot, x_0)} dm \right)^2 \right).$$

系 6.4.  $D$  を一様領域,  $F$  を  $D$  上の擬等角写像とする. そのとき  
 $\forall p_0 > 0, \exists C, p > 0, \forall E \subset D,$

$$\int_E J_F^p dm \int_E J_F^{-p} dm \leq C |E|^2 N_{p_0}(E)^2.$$

## References

- [1] F. W. Gehring and B. G. Osgood, Uniform domains and the quasihyperbolic metric, J. Anal. Math., 36 (1979), 50-74.

- [2] F. W. Gehring and B. P. Palka, Quasiconformally homogeneous domains, *J. Anal. Math.*, 30 (1976), 172-199.
- [3] Y. Gotoh, *BMO* extension theorem for relative uniform domains, *J. Math. Kyoto Univ.*, 33 (1993), 171-193.
- [4] Y. Gotoh, On decomposition theorem for *BMO* and *VMO*, to appear.
- [5] Y. Gotoh, On global integrability of *BMO* functions on general domains, to appear in *J. Anal. Math.*
- [6] Y. Gotoh, Integrability of superharmonic functions, uniform domains, and Hölder domains, to appear in *Proc. Amer. Math. Soc.*
- [7] F. John and L. Nirenberg, On functions of bounded mean oscillation, *Comm. Pure Appl. Math.*, 14 (1961), 415-426.
- [8] P. Jones, Extension theorems for *BMO*, *Indiana Univ. Math. J.*, 29 (1980), 41-66.
- [9] P. Lindqvist, Global integrability and degenerate quasilinear elliptic equations, *J. Anal. Math.* 61 (1993), 283-292
- [10] M. Masumoto, Integrability of superharmonic functions on Hölder domains of the plane, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 117 (1993), 1083-1088.
- [11] H. M. Reimann, Functions of bounded mean oscillation and quasiconformal mappings, *Comm. Math. Helv.*, 49 (1974), 260-276.
- [12] H. M. Reimann and T. Rychener, Funktionen beschränkter mittlerer Oszillation, *Lecture Notes in Math.* 489, Springer, 1975.
- [13] W. Smith and D. Stegenga, Exponential integrability of the quasihyperbolic metric on Hölder Domains, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math.* 16 (1991), 345-360.
- [14] W. Smith and D. Stegenga, Sobolev imbedding and the integrability of harmonic functions on Hölder domains, (*Proc. Interna. Conf. Potential Theory, Nagoya 1990*), Walter de Gruyter, Berlin, 1992, pp. 303-313.
- [15] S. G. Staples,  $L^p$ -averaging domains and the Poincaré inequality, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math.*, 14 (1989), 103-127.
- [16] D. A. Stegenga and D. C. Ullrich, Superharmonic functions in Hölder domains, *Rocky Mountain J. Math.* 29 (1995), 1539-1556.
- [17] E. M. Stein, *Singular Integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Univ. Press, 1970.