2010年度 関数環研究集会

報　告　集

2011年 6月

2010 年度の関数環研究集会は，信州大学 理学部にて，2010 年 11 月 29 日 (月)・30 日 (火) の 2 日間，開催されました。大勢の方々にご参加いただき，15 の講演が行われました。2 日間，有意義な情報交換や活発な討論ができ，充実した集会になりました。ご講演くださった皆様をはじめ，ご参加くださった皆様，そして，集会にご協力くださいました皆様に，心よりお礼申し上げます。

講演者の方々には報告原稿をお書きいただきましたので，ここに取りまとめ，報告集といたします。

世話人： 信州大学 理学部　高木 啓行

2010年度 関数環研究集会 プログラム

11月29日 (月)

11月30日 (火)

次のページへつづく

Characterizations for extremal extensions

茨城大学工学部　平澤　剛 (Go Hirasawa)

1　概要

ヒルベルト空間上で稠密に定義された半閉な正値対称作用素は正値自己共役作用素に拡張されることが知られており (cf.[4]), 拡張は一般にたくさんありますが, その中には extremal 拡張と呼ばれているものがあります。本講演では, extremal 拡張の特徴付けに関する経過報告をさせて頂きます。

2　用語・定義などの準備

$(H, (\cdot,\cdot))$ を無限次元・複素・ヒルベルト空間とする。$\mathcal{C}(H)$, $\mathcal{S}(H)$ でそれぞれ閉, 半閉な線形作用素の集合とし, $\mathcal{B}(H)$ で定義域が H の有界作用素の集合とする。このとき, 以下の包含関係が成り立ちます。

$$\mathcal{S}(H) \supset \mathcal{C}(H) \supset \mathcal{B}(H).$$

線形作用素 $a : \mathrm{dom}(a) \subseteq H \to H$ が半閉であるとは, ある $A, B \in \mathcal{B}(H)$ $(\ker A \subseteq \ker B)$ が存在して,

$$\mathrm{dom}(a) = AH, \quad \mathrm{ran}(a) = BH,$$

$$a = B/A \ : \ Au \to Bu, \quad u \in H$$

を満たすことと同値です。

ヒルベルト空間 H における線形作用素 a に対して, a が正値であるとは,

$$(af, f) \geq 0, \quad f \in \mathrm{dom}(a)$$

が成り立つことで, 線形作用素 $\widetilde{a}$ が a の拡張であるとは

$$af = \widetilde{a}f, \quad f \in \mathrm{dom}(a) \subseteq \mathrm{dom}(\widetilde{a})$$

が成り立つことです。記号で $a \subseteq \widetilde{a}$ と表します。また, 稠密に定義された線形作用素 a が対称であるとは,

$$a \subseteq a^*, \quad \text{i.e.,} \quad af = a^*f, \quad f \in \mathrm{dom}(a) \subseteq \mathrm{dom}(a^*)$$

を満たすことで, これは $(af,g)=(f,ag)$, $f,g\in \mathrm{dom}(a)$ が成立することと言っても同じことです。対称作用素の特別なケースに自己共役があります。（稠密に定義された線形作用素）a が自己共役であるとは, $a=a^*$ のことです。

本講演では, 正値な対称作用素 a $(a\geq 0,\quad a\subseteq a^*)$ を考え, 正値な自己共役拡張である $\widetilde{a}$ $(a\subseteq \widetilde{a}$ $\widetilde{a}\geq 0, \widetilde{a}=\widetilde{a}^*)$ を考察対象とします。

次に, 正値自己共役作用素の間の順序 $\leq$ の定義をします。a_1, a_2 を正値自己共役とする。

順序の定義

$$a_1\leq a_2 \iff \|a_1^{\frac{1}{2}}f\|\leq \|a_2^{\frac{1}{2}}f\|,\quad f\in \mathrm{dom}(a_2^{\frac{1}{2}})\subseteq \mathrm{dom}(a_1^{\frac{1}{2}}).$$

正値自己共役作用素は閉なので当然半閉作用素にもなっています。従って, 商表現が可能です。商表現の形で順序を言い表しておくと, 次のようになります。

正値自己共役 a_1, a_2 を以下のように一意的に商表現しておきます。

$$a_1=W_1/(I-W_1),\quad a_2=W_2/(I-W_2).$$

$(0\leq W_i\leq I,\, i=1,2)$ このとき, 次が成立する。

$$a_1\leq a_2 \Longleftrightarrow W_1\leq W_2.$$

ちなみに, 正値自己共役作用素が $\mathcal{B}(H)$ に属するときは, 上で定義した順序は通常の順序に一致することが知られています。

3 （商表現を用いた）拡張の構成方法

$\mathcal{S}(H)\ni a$ を（稠密に定義された）正値・対称作用素 とします。$a=B/A$ と商表現しておくと, $a(I+a)^{-1}=B/(A+B)$ となりますが, これは正値で有界 (ノルム１) になっています。ちなみに, 定義域は $(A+B)H$ $(\subset H)$ です。この作用素を, 正値性及び有界性 (ノルム１) を保存して全空間 H へ拡張することが（詳しい議論は省略しますが）可能です。そのうちの一つを W としておきましょう。すなわち,

$$B/(A+B)\subset W,\quad 0\leq W\leq I,\quad \|W\|=\|B/(A+B)\|=1.$$

換言すると,

$$B=W(A+B),\quad \text{i.e.}\quad (I-W)B=WA.$$

従って,

$$a=B/A\subset W/(I-W).$$

$W/(I-W)$ の形をした作用素は正値自己共役であることが確認できるので, 結局 a の拡張として $\widetilde{a}:=W/(I-W)$ が得られたことになります。

拡張に関して, わかっている性質を記しておきますと, W には最小 W_N と最大 W_F が存在します。つまり,

$$W_N\leq W\leq W_F.$$

逆に, $W_N \le W \le W_F$ を満たす任意の W に対して, $W/(I-W)$ は a の正値自己共役拡張となることも確認できますので, a を正値対称作用素とし, $\widetilde{a} := W/(I-W)$ を任意の正値自己共役拡張とすると, 最小拡張 $\widetilde{a}_{\mathcal{N}} := W_N/(I-W_N)$, 最大拡張 $\widetilde{a}_{\mathcal{F}} := W_F/(I-W_F)$ となるものが存在して $W_N \le W \le W_F$ の関係がある, というわけである。またこの関係は, 前節で定義した正値自己共役作用素の間の順序と整合性があるわけです。

$$W_N \le W \le W_F \iff \widetilde{a}_{\mathcal{N}} \le \widetilde{a} \le \widetilde{a}_{\mathcal{F}}$$

作用素区間 $[W_N, W_F]$ と拡張 $\widetilde{a}$ の集合は一対一に対応していることは, 興味深く面白いと思われる。

4 Extremal extension について

正値自己共役拡張 $\widetilde{a}$ が 正値対称作用素 a の extremal extension であるとは,

$$\inf_{f\in \mathrm{dom}(a)} (\widetilde{a}(\varphi - f), \varphi - f) = 0, \quad \varphi \in \mathrm{dom}(\widetilde{a})$$

で定義します。この定義は Yu.M.Arlinskiĭ (cf.[1]) によって与えられています。これを見た当初, 定義の意味するところがよくわからず考えこんでおりました。そこで, 作用素の商表現の手法を用いると何か面白いことがわかるのではないか, と考察を始めたわけです。まずはこの式を少し変形して様子を見てみます。$\varphi \in \mathrm{dom}(\widetilde{a})$ に対し展開してみると,

$$\inf_{f\in \mathrm{dom}(a)} \{(\widetilde{a}\varphi, \varphi) - 2\mathrm{Re}(\widetilde{a}\varphi, f) + (\widetilde{a}f, f)\} = 0.$$

すると,

$$\begin{aligned}
(\widetilde{a}\varphi, \varphi) &= -\inf_{f\in \mathrm{dom}(a)} \{-2\mathrm{Re}(\widetilde{a}\varphi, f) + (af, f)\} \\
&= \sup_{f\in \mathrm{dom}(a)} \{2\mathrm{Re}(\widetilde{a}\varphi, f) - (af, f)\} \\
&= \sup_{f\in \mathrm{dom}(a)} \{2|(\widetilde{a}\varphi, f)| - (af, f)\} \\
&= \sup_{f\in \mathrm{dom}(a)} \frac{|(\widetilde{a}\varphi, f)|^2}{(af, f)} = \sup_{f\in \mathrm{dom}(a)} \frac{|(\varphi, af)|^2}{(af, f)} \\
&= \|\widetilde{a}_{\mathcal{N}}^{\frac{1}{2}}\varphi\|^2.
\end{aligned}$$

さらに, $\mathrm{dom}(\widetilde{a}) \subset \mathrm{dom}(\widetilde{a}^{\frac{1}{2}})$ より, 次を得る.

$$\|\widetilde{a}_{\mathcal{N}}^{\frac{1}{2}}\varphi\| = \|\widetilde{a}^{\frac{1}{2}}\varphi\| \quad \varphi \in \mathrm{dom}(\widetilde{a}).$$

これに関して, 次の結果が得られました。

Proposition 4.1 次は同値である.

(1) $\widetilde{a}$ が a の extremal 拡張である.

(2) $\|\widetilde{a}_{\mathcal{N}}^{\frac{1}{2}}\varphi\| = \|\widetilde{a}^{\frac{1}{2}}\varphi\| \quad \varphi \in \mathrm{dom}(\widetilde{a})$.

(3) $\|\widetilde{a}_{\mathcal{N}}^{\frac{1}{2}}\varphi\| = \|\widetilde{a}^{\frac{1}{2}}\varphi\| \quad \varphi \in \mathrm{dom}(\widetilde{a}^{\frac{1}{2}}) \ \ (\subset \mathrm{dom}(\widetilde{a}_{\mathcal{N}}^{\frac{1}{2}}))$.

特に, $\widetilde{a}_{\mathcal{N}}$, $\widetilde{a}_{\mathcal{F}}$ は extremal である.

本質的な部分の証明は **(2)** $\Longrightarrow$ **(3)** です。$\widetilde{a}^{\frac{1}{2}}|_{\mathrm{dom}(\widetilde{a})}$ の閉包が $\widetilde{a}^{\frac{1}{2}}$ であることに注意します。

$$\overline{(\widetilde{a}^{\frac{1}{2}}|_{\mathrm{dom}(\widetilde{a})})} = \widetilde{a}^{\frac{1}{2}}.$$

$\forall\varphi \in \mathrm{dom}(\widetilde{a}^{\frac{1}{2}})$ に対して,

$$(\varphi_n, \widetilde{a}^{\frac{1}{2}}\varphi_n) \longrightarrow (\varphi, \widetilde{a}^{\frac{1}{2}}\varphi) \quad (\varphi_n \in \mathrm{dom}(\widetilde{a})) \text{ in } H \times H.$$

すると, $\{\widetilde{a}^{\frac{1}{2}}\varphi_n\}$ は Cauchy 列であるので, 仮定 (2) より $\{\widetilde{a}_{\mathcal{N}}^{\frac{1}{2}}\varphi_n\}$ も Cauchy 列になる。従って,

$$\varphi_n \to \varphi \quad \text{かつ} \quad \widetilde{a}_{\mathcal{N}}^{\frac{1}{2}}\varphi_n \to \exists\Phi \in H.$$

$\widetilde{a}_{\mathcal{N}}^{\frac{1}{2}}$ の閉性から, $\varphi \in \mathrm{dom}(\widetilde{a}_{\mathcal{N}}^{\frac{1}{2}})$ かつ $\widetilde{a}_{\mathcal{N}}^{\frac{1}{2}}\varphi = \Phi$ となる。また,

$$\|\widetilde{a}^{\frac{1}{2}}\varphi_n\| \to \|\widetilde{a}^{\frac{1}{2}}\varphi\| \quad \text{かつ} \quad \|\widetilde{a}_{\mathcal{N}}^{\frac{1}{2}}\varphi_n\| \to \|\widetilde{a}_{\mathcal{N}}^{\frac{1}{2}}\varphi\|.$$

以上から,

$$\|\widetilde{a}^{\frac{1}{2}}\varphi\| = \|\widetilde{a}_{\mathcal{N}}^{\frac{1}{2}}\varphi\| \quad \varphi \in \mathrm{dom}(\widetilde{a}^{\frac{1}{2}}).$$

それから, $\widetilde{a}_{\mathcal{N}}$ が extremal であることは明らかですが, $\widetilde{a}_{\mathcal{F}}$ が extremal であることを見るのは意外に大変でした。

5 商表現から見た extremal 拡張の特徴付け

さて, 商表現の視点から extremal 拡張の特徴付けを見てみます。以下に現れる $a, \widetilde{a}, W, W_N$ などは上で用いた意味と同じです。

Proposition 5.1 次は同値である.

(1) $\widetilde{a} = W/(I-W)$ は extremal 拡張である.

(2) ある isometry $X \in \mathcal{B}(H)$ が存在して, $X^*W_NX = W$ を満たす.

(1) $\Longrightarrow$ (2) の証明を見てみましょう。$W_N \le W$ より $I - W \le I - W_N$ となり, $(I-W)^{\frac{1}{2}}H \subset (I-W_N)^{\frac{1}{2}}H$. 従って, ある X が存在して $(I-W)^{\frac{1}{2}} = (I-W_N)^{\frac{1}{2}}X$. これより, $I - W = X^*(I-W_N)X = X^*X - X^*W_NX \ \cdots\ (*)$. 一方, 仮定 $\|\widetilde{a}_{\mathcal{N}}^{\frac{1}{2}}\varphi\| = \|\widetilde{a}^{\frac{1}{2}}\varphi\| \ \varphi \in \mathrm{dom}(\widetilde{a}^{\frac{1}{2}}) = (I-W)^{\frac{1}{2}}H$ から

$$\|W_N^{\frac{1}{2}}/(I-W_N)^{\frac{1}{2}} \cdot (I-W_N)^{\frac{1}{2}}Xu\| = \|W^{\frac{1}{2}}/(I-W)^{\frac{1}{2}} \cdot (I-W)^{\frac{1}{2}}u\|.$$

$$\|W_N^{\frac{1}{2}}Xu\| = \|W^{\frac{1}{2}}u\|,\ (u \in H).\ \text{つまり},\ X^*W_NX = W.$$

このとき, $(*)$ から X は isometry であることがわかる。これで終わりです。

実は, 我々は次を予想していました。
予想. a を稠密に定義された半閉な正値対称作用素とする。
このとき, 正値自己共役拡張 $\widetilde{a} = W/(I-W)$ に対して次は同値である。
(1) $\widetilde{a}$ が extremal 拡張である。
(2) W が作用素区間 $[W_N, W_F]$ の extreme point である。

調べていたら, M.G.Krein 流の拡張理論 (cf.[5]) と関連して次が知られていることがわかった。

Theorem 5.2 ([2])
a を 稠密に定義された閉な正値対称作用素とする. 正値自己共役拡張 $\widetilde{a} = (I-\widetilde{V})(I+\widetilde{V})^{-1}$ に対して次は同値.
(1) $\widetilde{a}$ は extremal 拡張である。
(2) $\widetilde{V}$ は区間 $[\widetilde{V_N}, \widetilde{V_F}]$ の extreme point である。

この定理により, 我々の予想は正しいという方向性が出てきました。この定理と予想との差異は, 定理では「閉」のクラスで拡張を論じていることです。拡張の構成方法が少し異なる点もありますが, それは予想の成立に関係がないことが確認できています。つまり, 我々の予想は半閉な正値対称作用素では未解決だが, 閉な正値対称作用素では成立しています。

最後に, M.G.Krein(1947) による拡張のつくり方の概略を述べて終わりにさせて頂きます。a を正値対称とするとき,

$$V := (I-a)(I+a)^{-1} \quad \text{有界・対称},\ \ \|V\| = 1,\ \ \mathrm{dom}(V) \subset H$$

となる。この V を全空間 H へ次を満たすように拡張できる。

$$\widetilde{V} \in \mathcal{B}(H) : \text{自己共役},\ \ \|V\| = \|\widetilde{V}\| = 1.$$

$$\widetilde{a} := (I-\widetilde{V})(I+\widetilde{V})^{-1}$$

と定義すると, a の正値自己共役拡張となるというわけである。上の自己共役 $\widetilde{V}$ には通常の順序に関して最小 $\widetilde{V_N}$ と 最大 $\widetilde{V_F}$ が存在する。(i.e. $\widetilde{V_N} \le \widetilde{V} \le \widetilde{V_F}$)

$$\widetilde{a_{\mathcal{F}}} := (I-\widetilde{V_N})(I+\widetilde{V_N})^{-1}, \quad \widetilde{a_{\mathcal{N}}} := (I-\widetilde{V_F})(I+\widetilde{V_F})^{-1}$$

と定義すると, $\widetilde{a_{\mathcal{N}}} \le \widetilde{a} \le \widetilde{a_{\mathcal{F}}}$ となっている。

参考文献

[1] Yu.M.Arlinskiĭ, S.Hassi, Z.Sebestyén and H.S.V.De Snoo, *On the class of extremal extensions of a nonnegative operator*, Operator Theory Advances and Applications, Birkhaüser Verlag, Basel **127** (2001), 41–81.

[2] Yu.M.Arlinskiĭ and E.R.Tsekanovskiĭ, *Quasi selfadjoint contractive extensions of Hermitian contractions*, Teor. Funkts., Funkts. Anal. Prilozhen, **50** (1988), 9–16.

[3] G.Hirasawa, *Extremal positive selfadjoint extensions of a positive symmetric quotient*, Acta Sci. Math. (Szeged), **65** (1999), 203–216.

[4] S.Izumino and G.Hirasawa, *Positive symmetric quotients and their selfadjoint extensions*, Proc. Amer. Math. Soc., **129** (10) (2001), 2987–2995.

[5] M.G.Krein, *Theory of selfadjoint extensions of semi-bounded Hermitian operator and its application I*, Mat. Sb., **62** (1947), 431–495.

Daniell 積分による Radon-Nikodym の定理 その新しい定式化と応用

東京理科大学理学部　　齋藤　洋樹 (Hiroki Saito)

概 要

In this study, we obtain the new formulation of the Radon-Nikodym Theorem without σ-finiteness by Daniell integral. In Daniell integral, Radon-Nikodym density function couldn't be constructed as a function, but "density part" forms special system of measurable functions. We shall call this system folder. Moreover, investigating some non-σ-finite example, we see that Daniell integral differs from Lebesgue integral.

1 Daniell 積分の概要

この節では, 以下で用いられる Daniell 式の積分論を要約する. Daniell 積分と呼ばれるものにはいくつかの流儀があり, それらは互いに同値ではない. したがって, Daniell 積分といった場合, どの流儀の Daniell 積分であるか注意をする必要がある. 我々が採用する方式の詳細は [1], [2] を参照していただきたい.

Definition 1.1 $\mathcal{H}$ を集合 $\Omega(\neq \emptyset)$ 上の実数値関数から成る *vector lattice* とし, $\int$ を $\mathcal{H}$ 上の正値線形汎関数で以下を満たすとする: $h_n \searrow 0 \Rightarrow \int h_n \to 0$. $\mathcal{H}$ を基本関数空間, $\int$ を基本積分, *3* つ組 $(\Omega, \mathcal{H}, \int)$ を *Daniell system* と呼ぶ.

Definition 1.2 $\mathcal{H}^+$ で基本関数の単調増加極限関数全体を表す. すなわち $f \in \mathcal{H}^+$ とは, ある $h_n \in \mathcal{H}$ が存在し $h_n \nearrow f$ となることである. $f \in \mathcal{H}^+$ は関数値として $+\infty$ をとることを許す. $f \in \mathcal{H}^+$ の積分を近似列 h_n を用いて $\int f := \lim_{n\to\infty} \int h_n$ のように定める. この積分の値は $+\infty$ になることがあり得るが, 特に積分が有限な関数全体を $\mathcal{H}^+_{int}$ で表す.

$\mathcal{H}$ 上の基本積分を $\mathcal{H}^+$ に拡張するわけである. 関数解析的には記号 $\int$ を別の記号で表すのが慣例であるが, ここでは [1], [2] にならって拡張後も同じ記号で表すことにする.

Definition 1.3 $Z \subset \Omega$ が零集合であるとは, ある $f \in \mathcal{H}^+_{int}$ が存在し $\infty I(Z) \leqq f$ が成り立つことである.

ここで, $I(Z)$ は集合 Z の indicator function, i.e., $I(Z) = 1$ on Z, $= 0$ on Z^c, であり, $\infty I(Z)$ は Z 上で $+\infty$ を値にとる関数を意味する. 零集合に関する言葉づかいは測度論のときと同じように用いることにする. $f \in \mathcal{H}^+_{int}$ はほとんどいたるところ有限値をとることなどが容易に示される.

Definition 1.4 ほとんどいたるところ定義された関数 $\varphi : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ が可測関数であるとは, 基本関数の概収束極限で表せるときにいう, すなわち, ある $h_n \in \mathcal{H}$ によって, $h_n \to \varphi \ \ (a.e.)$ が成り立つことである. $\mathcal{M}$ で可測関数全体を表す.

$D \subset \Omega$ が可測集合であるとは $I(D) \in \mathcal{M}$ が成り立つこととする. ここで注意すべきは, 一般に全空間 Ω が必ずしも可測集合とはならないということである. そのような例が 3 節で与えられる.

Definition 1.5 可測関数 φ が $\mathcal{L}^+$ に属するとは, ある $f \in \mathcal{H}^+$, $g \in \mathcal{H}^+_{int}$ によって $\varphi = f - g \ \ (a.e.)$ と表せるときにいう. φ 上の積分は,

$$\int \varphi := \int f - \int g$$

と定める. 特に, $f \in \mathcal{H}^+_{int}$ であるとき, φ は可積分であるといい, 全体を $\mathcal{L}$ と表す.

以上が Daniell 式積分論の概要である. 基本関数空間上の基本積分から始め, 可積分関数空間を基本関数の単調極限の差で表すのである. さらに, 基本的で重要な設定をひとつ述べる. $\mathcal{H}$ が Stone 条件を満たすとは, 任意の基本関数 h に対し, $h \wedge 1 \in \mathcal{H}$ が成り立つことである. Stone 条件のもとでは, 可測関数同士の積が再び可測関数となり, 可測関数 φ の carrier $\{\varphi \neq 0\}$ が可測集合となることなどが示される.

2 Folder と Folder による積分

この節では, 本研究で導入された folder という概念について説明を行う. この概念は Rao[4] にある *quasifunction* や Zaanen[3] に紹介されている *cross-section* に発想を得ており, こちらも参照されたい. だが, 以上の文献は測度論とほぼ同等の議論の仕方をしており, 我々の用いる Daniell 式積分を用いて導入される folder とは, 特別な条件のもとでない限り同値なものではないことを強調しておく. Daniell 積分では, Radon-Nikodym 密度が folder となるというのが本報告の主張である. folder に関する基本的な性質やその証明は, 投稿予定である [8] を参照していただきたい.

Definition 2.1 $E \subset \Omega$ が基本可測集合であるとは, ある $\varphi \in \mathcal{H}^+$ が存在し, $E = \{\varphi > 0\}$ と表されるときにいう. 基本可測集合全体を $\mathcal{E}$ で表す.

folder $\langle h \rangle$ とは $\mathcal{E}$ から $\mathcal{M}$ への写像: $\mathcal{E} \to \mathcal{M}$; $E \mapsto h_E$ で次を満たすものである: $E, F \in \mathcal{E}$, $h_F I(E) = h_{E\cap F} \ \ (a.e.)$.

Example 1. 写像

$$\mathcal{E} \ni E \mapsto I(E)$$

は folder となる. この基本的ではあるが重要な folder は, 定数関数の役割を果たす. 記号で $\langle I \rangle$ と表すことにする.

Example 2. Ω 上定義された可測関数 h_0 が与えられたとき,

$$\mathcal{E} \ni E \mapsto h_0 I(E)$$

と定めると folder となる．だが一般に, 任意に与えられた folder $\langle h\rangle$ に対し, 上のような可測関数 h_0 が存在するとは限らない．

φ を可測関数とする．このとき φ と folder $\langle h\rangle$ との積 $\varphi\langle h\rangle$ を写像 : $\mathcal{E} \ni E \mapsto \varphi h_E$ で定める．この表現の下では, Example 2 の folder は, $\langle h\rangle = h_0\langle I\rangle$ と表される．また, 任意の可測関数 φ に対し, carrier $\{\varphi \neq 0\}$ を含むような基本可測集合 E_0 が存在することが示される．そこで, このような E_0 を用いると, $\varphi\langle h\rangle = \varphi h_{E_0}\langle I\rangle$ なる表現が得られる．これは, folder $\varphi\langle h\rangle$ がひとつの関数 φh_0 によって決定されることを意味する．

folder $\langle h\rangle$ が局所可積分あるいは *density* であるとは, 任意の基本関数 f に対し, fh_{E_0} が可積分となることである．ここで, $E_0 \in \mathcal{E}$ は $\{f \neq 0\}$ を含むものである．

いま, density folder $\langle h\rangle$ が与えられたとき,

$$\int f\langle h\rangle := \int fh_{E_0}, \quad (f \in \mathcal{H})$$

と定める．このとき右辺は有限であることに注意する．

3　Radon-Nikodym の定理と反例の検証

本研究の主定理を述べる．

Theorem 3.1 (Radon-Nikodym Theorem) *Let $(\Omega, \mathcal{H}, \int)$ be a Daniell system satisfying the Stone condition, and Q be any integral on $\mathcal{H}$ such that $Q \ll \int$. Then there exists a non-negative density folder $\langle h\rangle$, such that for any $f \in \mathcal{H}$,*

$$Q(f) = \int f\langle h\rangle. \tag{1}$$

This $\langle h\rangle$ is determined (a.e.)-uniquely.

Remark 1. $Q \ll \int$ は Q が $\int$ に対して絶対連続であること, すなわち, 任意の $\int$-零集合が Q-零集合となることを意味する．

Remark 2. 我々の Daniell 積分では, $\mathcal{H}$ が σ-有限であるとは $1 \in \mathcal{H}^+$ となることをいう．これは $\Omega \in \mathcal{E}$ と同値である．この定理では σ-有限にあたる仮定はおかれていないことに注意する．

以下, σ-有限を仮定しない場合に現れる Radon-Nikodym の定理の反例を検証する．測度論でよく知られた反例を思い起こす．$\Omega = [0,1]$, $\mathcal{B}$ を $[0,1]$ 上の Borel 集合族, μ を計数測度とする．μ-零集合は空集合のみなので, $\mathcal{B}$ 上の任意の測度は μ に関して絶対連続となる．そこで特に ν として Lebesgue 測度をとると, Radon-Nikodym の密度関数が存在しないことはよく知られた例である．

この例を Daniell 積分で考察する．$\Omega = [0,1]$, $\mathcal{H}$ は $[0,1]$ の有限部分集合上でのみ実数値をとる関数とする, i.e.,

$$f = \sum_{k \in A} a_k I(\{k\}) \quad A : \text{finite set}, \quad a_k \in \mathbb{R}.$$

このとき, $\mathcal{H}$ は Stone 条件を満たす基本関数空間となる．基本積分は

$$\int f := \sum_{k \in A} a_k,$$

と定める. この定義より, $A \subset [0,1]$ が有限集合であれば $I(A) \in \mathcal{H}$ であり, $\int I(A)$ は A の個数を表す計数測度にほかならない. さらに次のことが容易にわかる,

- $\int$-零集合は空集合のみである,
- 可測集合は可算集合かつ基本可測集合である, したがって Ω は可測集合でない.
- $\Omega \notin \mathcal{E}$ なので $\mathcal{H}$ は σ-有限でない.

したがって, $\mathcal{H}$ 上の任意の 2 つ目の積分 Q は $\int$ に関して絶対連続である. 基本積分の定義から Q は正値線形汎関数であるから,

$$Q(f) = \sum_{k \in A} a_k Q(I(k)),$$

かつ, $Q(I(k))$ は非負実数値となる. そこで, $Q(I(k)) := c_k$ $(0 \leqq c_k \in \mathbb{R})$ とおくと,

$$Q(f) = \sum_{k \in A} a_k c_k \int I(k) = \int \sum_{k \in A} a_k I(k) \sum_{m \in \Omega} c_m I(m)$$

と変形される. $h := \sum_{m \in \Omega} c_m I(m)$ と定めると, h は Ω 上定義された関数であり, $Q(f) = \int fh$ が成り立つ. だが h は非可測関数である. ここで, $\langle h \rangle = h\langle I \rangle$ と定めると, 各 $h_E = hI(E)$ は可測関数であり $Q(f) = \int f\langle h \rangle$ が成り立つ. この例が示すことは, Daniell 式の積分論では, 同じ基本関数空間の上に, 計数測度に対応する積分と Lebesgue 測度に対応する積分が共存できないということである. もう少し詳しくいうと, Q を Lebesgue 測度とみなすと $c_k \equiv 0$ となり, Q は恒等的に 0 を返す積分になってしまい, Lebesgue 測度とは呼べない代物になってしまう. これが, 上述の「共存できない」という意味である. (例終)

4　応用

Radon-Nikodym の定理の重要な応用として, L^p 空間の双対空間の決定がある. 一般の測度論では σ-有限測度空間で定義された L^1 空間の双対が L^∞ で決定できることはよく知られている. 本研究では Daneill 積分による可積分関数空間 $\mathcal{L}$ の双対空間は本質的有界な folder を用いて表現できることを示した.

ここで, $\mathcal{L}$ はノルム $\|f\| = \int |f|$ で Banach 空間であることが示され, $\|\langle h \rangle\|_\infty := \sup_{E \in \mathcal{E}} \|h_E\|_\infty$ と定義する, また, $\|h_E\|_\infty$ は通常の本質的上限である. $\langle h \rangle$ が本質的有界な folder であるとは $\|\langle h \rangle\|_\infty < \infty$ となることである. さらに, folder の集合に対しても関数の集合の記号と濫用して $\langle h \rangle \in \mathcal{L}^\infty$ のように使うことにする (本来は別の記号を用意するべきであろう. 現在検討中である.).

Theorem 4.1 (Dual space of $\mathcal{L}$) *let $(\Omega, \mathcal{H}, \int)$ be a Daniell system. For any $T \in \mathcal{L}^*$ (dual space of $\mathcal{L}$), there exists an essentially bounded folder $\langle h \rangle$ such that for any $f \in \mathcal{L}$,*

$$Tf = \int f\langle h \rangle. \tag{2}$$

When this holds, we have $\|T\| = \|\langle h \rangle\|_\infty$ and the mapping $\tau : T \to \langle h \rangle$ is an isometric isomorphism between $\mathcal{L}^*$ and the space of essentially bounded folders, so that they may be identified.

ここでも σ-有限性の仮定はおかれていない． さらに, $1 < p, q < \infty$ を共役指数とするとき, $(\mathcal{L}^p)^* \cong \mathcal{L}^q$ は通常のように"関数"の空間の意味で成り立つことが示される．

次に, 実際の講演当日は時間の都合で詳しく述べることができなかったこの定理の反例について検証する．以下の反例は J.Schwartz[5] の論文に T.Botts の例として紹介されているものである．和書では盛田 [7]p.199 に同じものが紹介されている．また, 関連する別の例は, E.J.McShane[6] にもある．ここでは前者の例を取り上げる．

$\Omega = [0,1]$, $\mathcal{B} = \{A \subset \Omega : A \text{ or } A^c : \text{countable}\}$．とすると $\mathcal{B}$ は σ-加法族. μ を計数測度とする．このとき, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ が $\mathcal{B}$-可測ならば高々可算個の値しかとらない．また, $f \in L^1(\mu)$ であることと, $\{f \neq 0\}$ が可算であり, かつ $\displaystyle\sum_{\{f\neq 0\}} |f(x)| < \infty$ であることと同値である．$\iota : [0,1] \to [0,1]$ を恒等写像とすると, 任意の $f \in L^1(\mu)$ に対し, $\iota \cdot f \in L^1(\mu)$ である．なぜなら,

$$\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\} = \{x \in \Omega : xf(x) \neq 0\}$$

であり, $x \in [0,1]$ であるから $\sum_{\{f\neq 0\}} |xf(x)| \leqq \sum_{\{f\neq 0\}} |f(x)| < \infty$ である．

次に, $T : L^1(\mu) \to \mathbb{R}$ を

$$Tf := \int_{[0,1]} \iota(x)f(x)\ d\mu = \int_{[0,1]} xf(x)\ d\mu \tag{3}$$

とすると, T は線形写像であり, $|Tf| \leqq \|f\|_1$ であるから T は有界である．もっといえば, $f = I(\{1\})$ とすると,

$$Tf = \int_{[0,1]} I(\{1\})\ d\mu = 1 = \|f\|_1$$

であるから．$\|T\| = 1$ であることまでわかる．もし, ある g が存在して $Tf = \int_{[0,1]} fg\ d\mu$ が成り立つとすると, $f = I(\{t\})$ としてみれば, 式 (3) と合わせて,

$$\int_{[0,1]} xI(x \in \{t\})\ d\mu = TI(\{t\}) = \int_{[0,1]} I(x \in \{t\})g(x)\ d\mu$$

となり, $g(x) = x$ であることがわかる．だがこれは $\mathcal{B}$-可測ではない．

Daniell 積分で考察する．$\Omega = [0,1]$, $\mathcal{H}$ を Ω の有限部分集合上 $\mathbb{R}$ 値をとる関数空間, i.e., $h \in \mathcal{H}$ とは $h = \sum_{k\in A} a_k I(\{k\})$ とかける関数である．積分を $\int h := \sum_{k\in A} a_k$ ただし A は有限集合, と定める．$\mathcal{H}^+, \mathcal{M}$ などは前述の Radon-Nikodym の定理の反例のときと同様である．$f \in \mathcal{L}$ であることと, $\{f \neq 0\}$ が可算で, $\displaystyle\sum_{\{f\neq 0\}} |f(x)| < \infty$ が同値であることは測度論のときと同様.

$T : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ を

$$Tf := \int \iota f$$

で定めれば同様に $T \in \mathcal{L}^*$ となるが, $\iota\langle I\rangle = \langle\iota\rangle$, i.e.,

$$\langle\iota\rangle : \mathcal{E} \ni E \mapsto xI(x \in E)$$

とすることで, $Tf = \int f\langle\iota\rangle$ という表現が得られ, 全空間が $[0,1]$ であるから, $\langle\iota\rangle \in \mathcal{L}^\infty$ であることがわかる． ■

また, 本報告では述べることができなかった Hahn 分解に関する考察が [9] にある．こちらも参照していただきたい.

参考文献

[1] G.E. Shilov and B.L. Gurevich translated by R.A. Silverman, Integral, Measure and Derivative: A Unified Approach. Dover Publications, Inc. New York. (1977).

[2] A.J. Weir, General Integration and Measure. II. Cambridge University Press, Cambridge. (1974).

[3] A.C. Zaanen, Integration 2nd Edition. North-Holland Publishing Company (1967).

[4] M.M. Rao, Measure Theory and Integration. John Wiley & Sons (1987).

[5] J. Schwartz, A note on the space L_p^*. Proc. Amer. Math. Soc. 2 (1951), 270-275.

[6] E.J. McShane, Linear functionals on certain Banach spaces. Proc. Amer. Math. Soc. 1 (1950), 402-408.

[7] 盛田健彦, 実解析と測度論の基礎. 培風館 (2004).

[8] H. Saito, Radon-Nikodym Theorem with Generalized Density, in preparation.

[9] H. Saito, Radon-Nikodym Theorem with Generalized Density and Its Application, private seminar at The 19th Seminar on Function Spaces (Hokkaido Univ.). Dec. 23, 2010.

再生核ヒルベルト空間と defect 作用素について

島根大学総合理工学部　　瀬戸　道生 (Michio Seto)

1　はじめに

再生核ヒルベルト空間上の defect 作用素とは，簡単に説明すると，λ を代入することに対応する再生核を $k_\lambda(z)$ としたとき，$1/k_\lambda(z)$ の z と λ に掛け算作用素を代入してできる作用素のことである．この defect 作用素は再生核ヒルベルト空間の構造に関する情報をたくさんもっていると考えられる．この講演では defect 作用素にまつわる話を報告する．

2　Hardy 空間 $H^2(\mathbb{D})$

$\mathbb{D} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$ とする．$\mathbb{D}$ 上の Hardy 空間 $H^2(\mathbb{D})$ は次のように定められる．

$$H^2(\mathbb{D}) = \left\{ f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : \sum_{j=0}^{\infty} |c_j|^2 < +\infty \quad \left(f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j \right) \right\}.$$

Hardy 空間 $H^2(\mathbb{D})$ は以下の再生核をもつ再生核ヒルベルト空間である．

$$k_\lambda(z) = \frac{1}{1-\overline{\lambda}z} \quad \text{(Szegö 核)}.$$

Hardy 空間 $H^2(\mathbb{D})$ に関して，次の定理は有名である．

定理 2.1 (Beurling) T_z を $T_z : h \mapsto zh \ \ (h \in H^2(\mathbb{D}))$ により定まる Toeplitz 作用素とし，$\mathcal{M}$ を $H^2(\mathbb{D})$ の T_z-不変部分空間とする（閉であることを仮定する）．このとき，ある inner 関数 q が存在し，$\mathcal{M} = qH^2(\mathbb{D})$ と表わすことができる．ここで inner 関数とは $\mathbb{D}$ 上の有界正則関数であり，$\mathbb{D}$ の境界で $|q| = 1$ a.e. をみたすものである．

Beurling の定理において，$\mathcal{M}$ 上の作用素 R_z を $R_z : f \mapsto zf \ (f \in \mathcal{M})$ と定義する．このとき，

$$\Delta = I_{\mathcal{M}} - R_z R_z^*$$

は $\mathcal{M}$ の defect 作用素とよばれる．今の場合，

$$\Delta = \mathrm{Proj}(\mathcal{M} \ominus z\mathcal{M}) = q \otimes q$$

である（ここでの $\otimes$ は Schatten form を表わす）．従って，作用素レベルでは，Δ は $\mathcal{M}$ の情報をすべてもっていると考えられる．また，

$$\Delta = R_z^* R_z - R_z R_z^* = [R_z^*, R_z]$$

でもあるから，Δ は作用素論では重要な self-commutator でもある．このように，Δ は Beurling の理論でも作用素論でも重要な対象であることがわかる．さらに，再生核とも関連することが以下のようにしてわかる．$k_\lambda^{\mathcal{M}}$ を $\mathcal{M}$ 上で λ を代入することに対応する再生核とする．このとき，関数 $k_\lambda^{\mathcal{M}}/k_\lambda = (1-\overline{\lambda}z)k_\lambda^{\mathcal{M}}$ が $H^2(\mathbb{D})$ と $\mathcal{M}$ との「何らかの差」を表していると想像することは不自然なことではないであろう．さて，Δ は次のようにして $1/k_\lambda(z)$ に対応することがわかる．

$$\begin{aligned}
\langle f, k_\lambda^{\mathcal{M}}/k_\lambda \rangle &= \langle f, (1-\overline{\lambda}z)k_\lambda^{\mathcal{M}} \rangle \\
&= \langle f, k_\lambda^{\mathcal{M}} \rangle - \langle f, \overline{\lambda}z k_\lambda^{\mathcal{M}} \rangle \\
&= \langle f, k_\lambda^{\mathcal{M}} \rangle - \langle \lambda R_z^* f, k_\lambda^{\mathcal{M}} \rangle \\
&= \langle f, k_\lambda^{\mathcal{M}} \rangle - \langle R_z R_z^* f, k_\lambda^{\mathcal{M}} \rangle \\
&= \langle (I_{\mathcal{M}} - R_z R_z^*) f, k_\lambda^{\mathcal{M}} \rangle \qquad (*)
\end{aligned}$$

Beurling の定理はヒルベルト空間上の作用素論において基本的な定理の一つである．それは，この定理がシフト作用素の不変部分空間を記述しているからである．この定理を元にした二つの作用素の構造理論 (Sz.-Nagy and Foiaş [26], de Branges and Rovnyak [9]) は有名である．さて，この講演では 上記の defect 作用素 Δ の多変数における対応物について考えたい．

注意 2.1 発表した時点では気付かなかったが，$(*)$ のような計算から定まる作用素についてのまとまった研究は Agler の hereditary functional calculus の理論が最初ではないかと思う．詳しいことは [2] にまとめられている．

注意 2.2 昨年，北大の関数空間セミナーにて，斎藤三郎先生から「$(*)$ の計算を一般化することはできないのか？」とのご指摘をいただいた．特に，k_λ に零点がある場合が面白いだろうとのアドバイスをいただいた．発表した際に扱った再生核はすべて零点をもたない．零点をもつ再生核は例えば次のようなものが知られている（de Branges [8] を参照）．

定理 2.2 (Paley-Wiener 空間) $a > 0$ に対して，

$$\mathcal{H}(a) = \left\{ F \in \mathrm{Hol}(\mathbb{C}) : \text{指数 } a \text{ 型 and } \int_{\mathbb{R}} |F(t)|^2\, dt < +\infty \right\}$$

と定める．このとき，$\mathcal{H}(a)$ はヒルベルト空間であり，さらに，任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ と $F \in \mathcal{H}(a)$ に対して

$$F(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} F(t) \frac{\sin(at - a\lambda)}{\pi(t-\lambda)}\, dt$$

が成り立つ．すなわち，$\mathcal{H}(a)$ は

$$k_\lambda(z) = \frac{\sin(az - a\overline{\lambda})}{\pi(z - \overline{\lambda})}$$

を再生核とする再生核ヒルベルト空間である．この再生核ヒルベルト空間は指数 a 型の Paley-Wiener 空間と呼ばれている．

Paley-Wiener 空間，またはさらに一般の整関数からなる de Branges 空間では，z-掛け算作用素 S は非有界であるので，いろいろと注意が必要である．ところが，S は閉かつ対称でさらに不足指数が $(1,1)$ であるため自己共役拡大を考えることができる．ここまで条件がそろえば何か計算できそうである．

注意 2.3 ここ 10 年の研究により，Hardy 空間 $H^2(\mathbb{D})$ の "函数解析学的" に正しい多変数化は Drury-Arveson 空間 (Drury [12], Arveson [3, 4]) であることが最近の共通認識である．実際，von Neumann の不等式 ([12], [3])，不変部分空間の問題 (Greene-Richter-Sundberg [15])，Nevanlinna-Pick 問題 ([2] を参照)，コロナ問題 (Costea-Sawyer-Wick [7]) 等が，$\mathbb{D}$ での結果を一般化するように解かれているからである．

3 Hardy 空間 $H^2(\mathbb{D}^2)$

$\mathbb{D}^2$ 上の Hardy 空間 $H^2(\mathbb{D}^2)$ は，テンソル積ヒルベルト空間として，

$$H^2(\mathbb{D}^2) = H^2(\mathbb{D}) \otimes H^2(\mathbb{D})$$

と定義される．同じことであるが，係数の言葉で表わせば，$H^2(\mathbb{D}^2)$ の定義は以下のようになる．

$$H^2(\mathbb{D}^2) = \left\{ f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}^2) : \sum_{i,j\geq 0} |c_{ij}|^2 < +\infty \ \left(f = \sum_{i,j\geq 0} c_{ij} z_1^i z_2^j \right) \right\}.$$

$\mathbb{D}$ の場合と同様に $H^2(\mathbb{D}^2)$ は再生核ヒルベルト空間であり，以下の関数が，$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{D}^2$ に対応する，$H^2(\mathbb{D}^2)$ の再生核である．

$$k_\lambda(z_1, z_2) = \frac{1}{(1-\overline{\lambda_1}z_1)(1-\overline{\lambda_2}z_2)} \quad \text{(Szegö 核)}.$$

また $\mathbb{D}^2$ 上の有界正則関数の全体からなる可換 Banach 環を $H^\infty(\mathbb{D}^2)$ と定める．以下では，$H^2(\mathbb{D}^2)$, $H^\infty(\mathbb{D}^2)$ を H^2, H^∞ とそれぞれ省略して表すことにする．

H^2 は H^∞ の関数をかける作用で不変である．すなわち，

$$h \in H^2 \Rightarrow fh \in H^2 \quad (\forall h \in H^2, \forall f \in H^\infty)$$

である．この作用により，H^2 に H^∞ を係数環とするヒルベルト加群の構造が入る．これは，作用素論的には二つの Toeplitz 作用素 T_{z_1}, T_{z_2} を考えることと同値である．さて，ここで考えたいのは，この H^2 の部分加群（閉であることを仮定する）の構造である．部分加群とは作用素のペア (T_{z_1}, T_{z_2}) に関する不変部分空間のことであるから，これは結局 $H^2(\mathbb{D}^2)$ での Beurling の定理を探すことに他ならない．ここでは，Douglas-Paulsen [10] による観点と，最近の情勢（流行）を考え，部分加群，商加群などの可換環論の用語を用いることにする．

4 Bergman 空間 $L_a^2(\mathbb{D})$

この章では Bergman 空間の理論について簡単に触れる．Bergman 空間は，ある意味で，$H^2(\mathbb{D})$ と $H^2(\mathbb{D}^2)$ の中間に位置する再生核ヒルベルト空間である．Bergman 空間 $L_a^2(\mathbb{D})$ は以下のように定義される．

$$L_a^2(\mathbb{D}) = \left\{ f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 \, dxdy < \infty \ (z = x + iy) \right\}.$$

その $\lambda \in \mathbb{D}$ に対応する再生核は

$$k_\lambda(z) = \frac{1}{(1 - \overline{\lambda} z)^2} \quad (\text{Bergman 核})$$

である．$L_a^2(\mathbb{D})$ 上でも z をかける作用素 S_z を考えることができ，S_z は Bergman シフトとよばれる．S_z は重み付きシフトであり，さらにヒルベルト加群として

$$H^2(\mathbb{D}^2)/[z_1 - z_2] \cong (L_a^2(\mathbb{D}), S_z) \text{（ユニタリ同型）}$$

が成り立つ（左辺は $z_1 - z_2$ により生成される部分加群から定まる商加群である）．$L_a^2(\mathbb{D})$ の部分加群（＝不変部分空間）についての結果を以下にまとめる．

定理 4.1 $\mathcal{M}$ を $L_a^2(\mathbb{D})$ の部分加群とする．このとき，以下が成り立つ．

(i) $\dim \mathcal{M}/[(z - \lambda)\mathcal{M}]$ は $\lambda \in \mathbb{D}$ に依らず一定 (Richter [21])．

(ii) $\dim \mathcal{M}/z\mathcal{M}$ はその値として $1, 2, \ldots, \infty$ を取り得る (Apostol-Bercovici-Foiaş-Pearcy [1])．

(iii) $\mathcal{M}/z\mathcal{M}$ は $\mathcal{M}$ を生成する (Aleman-Richter-Sundberg [5])．

ついでに，R_z を $H^2(\mathbb{D})$ の場合と同様に定めると，$L_a^2(\mathbb{D})$ での defect 作用素は

$$\Delta = 1 - 2R_z R_z^* + R_z^2 R_z^{*2}$$

である．この作用素は Yang-Zhu [31] により調べられており，そこでは root operator と名付けられている．$(*)$ と同様な計算により，Δ の形が $1/k_\lambda(z) = 1 - 2z\overline{\lambda} + z^2\overline{\lambda}^2$ に対応していることが確かめられる．

5 Rudin の例

$\mathrm{rank}\,\mathcal{M}$ により $\mathcal{M}$ のヒルベルト加群としてのランク，すなわち $\mathcal{M}$ の生成系の最小の濃度を表わすことにする．Beurling の定理により，$H^2(\mathbb{D})$ の場合は常に $\mathrm{rank}\,\mathcal{M} = 1$ である．Bergman 空間の場合 $\mathrm{rank}\,\mathcal{M}$ はその値として $1, 2, \ldots, \infty$ を取り得る ([5])．さて，$H^2(\mathbb{D}^2)$ に関して，Rudin が以下の事実を示した．

定理 5.1 (Rudin [22]) $H^2(\mathbb{D}^2)$ の中に，$\mathrm{rank}\,\mathcal{M} = \infty$ となる部分加群 $\mathcal{M}$ が存在する．

Rudin は具体的に部分加群を構成しこの結果を示した．しばらくの間，Rudin の例は病的なものとして扱われていたようであるが，実際はとても良い例であることがわかった ([24], [27])．
（定理 5.1 の証明） ここでは，Rudin が与えたものとは少々異なる証明を与える ([23])．まず，

$$b_n(z_1) = \frac{\alpha_n - z_1}{1 - \alpha_n z_1} \text{ where } \alpha_n = 1 - 1/n^3 \ (n \in \mathbb{N}), \tag{1}$$

$$q_j(z_1) = \prod_{n=j}^{\infty} b_n^{n-j}(z_1) \tag{2}$$

と定める．次に，$H^2 = H^2(\mathbb{D}) \otimes H^2(\mathbb{D})$ に注意して，

$$\mathcal{M} = \sum_{j=0}^{\infty} \oplus q_j H^2(\mathbb{D}) \otimes z_2^j$$

と定めると，この $\mathcal{M}$ は H^2 の部分加群になり，Rudin の例，又は Rudin's module とよばれる．この構成法は Rudin のものとは異なるが，同型などではなく，ヒルベルト空間としてまったく同じものを定めている．さて，一般の $\mathcal{M}$ に対して，次のような不等式が知られている．

$$\dim \mathcal{M}/[(z_1 - \lambda_1)\mathcal{M} + (z_2 - \lambda_2)\mathcal{M})] \leq \operatorname{rank} \mathcal{M}. \tag{3}$$

ここで，

$$\mathfrak{Z}(\mathcal{M}) = \{\lambda \in \mathbb{D}^2 : f(\lambda) = 0\} \text{（}\mathcal{M} \text{ の共通零点）}$$

とし，(5.3) の左辺を Rudin の例について計算すると以下のようになる．

$$\dim \mathcal{M}/[(z_1 - \lambda_1)\mathcal{M} + (z_2 - \lambda_2)\mathcal{M})] = \begin{cases} n+1 & ((\lambda_1, \lambda_2) = (\alpha_n, 0) \in \mathfrak{Z}(\mathcal{M})) \\ 1 & ((\lambda_1, \lambda_2) \notin \mathfrak{Z}(\mathcal{M})). \end{cases} \tag{4}$$

従って，$(\lambda_1, \lambda_2) = (\alpha_n, 0)$ のときに $n \to \infty$ とすれば，$\operatorname{rank} \mathcal{M} = \infty$ を得る．

（証明終）

注意 5.1 ここで与えた証明では,（函数解析的）Hilbert 関数 (Douglas-Yan [11]) の特別な場合を計算したことになっている．Rudin の例に関して言えば，より一般に Hilbert 関数を計算することはできるが，rank に関する情報が増えるようには見えないので，ここでは省略する ([25] で計算した)．また，同様にして $\operatorname{rank} \mathcal{M} = n \in \mathbb{N}$ となる $\mathcal{M}$ を構成することは簡単である．

定理 5.1 の証明から，部分空間の族

$$\mathcal{M}/\mathcal{M}_\lambda := \mathcal{M}/[(z_1 - \lambda_1)\mathcal{M} + (z_2 - \lambda_2)\mathcal{M})] \quad (\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{D}^2) \tag{5}$$

に $\mathcal{M}$ の情報がいろいろ詰まっていると考えられる．実際，フレドホルム性と関連して，Gleason-Richter-Sundberg により，より一般の再生核ヒルベルト空間で詳しいことが調べられている ([14])．さらに，この類の問題は一般的な Banach 空間上の作用素についても調べられている．そこでも，適当な条件の下，ある解析集合を除いたところで商空間の次元が安定するという結果が得られている (Eschmeier [13])．

今の設定で述べれば，例えば次のようなことが知られている．

定理 5.2 ([28], [14]) H^2 の部分加群 $\mathcal{M}$ と $\lambda \in \mathbb{D}^2$ に対して，$\varphi(\lambda) \neq 0$ となる $\varphi \in \mathcal{M} \cap H^\infty$ が存在するならば（このとき $\lambda \notin \mathfrak{Z}(\mathcal{M})$ である），$\dim \mathcal{M}/\mathcal{M}_\lambda = 1$.

この定理の系として (5.5) が $\mathbb{D}^2 \setminus \mathfrak{Z}(\mathcal{M})$ 上のベクトル束になることも簡単に確かめられる．その切断は $k_\lambda^{\mathcal{M}}$（$\mathcal{M}$ の再生核）である．しかし，(5.4) を見ると $\mathfrak{Z}(\mathcal{M})$ 上で次元が飛び跳ね，そこに $\mathcal{M}$ の情報が詰まっているように思える．

6 作用素 Δ_λ

$\mathcal{M}$ を H^2 の部分加群として一つ固定する．$\mathcal{M}$ 上の作用素 R_f ($f \in H^\infty$) を

$$R_f : h \mapsto fh \ (h \in \mathcal{M})$$

と定める．以下に定める作用素 Δ は Yang [30], Guo-Yang [18] では core operator とよばれているが（Guo は [16] で defect operator とよんでいる），用語の統一のため，ここでは defect 作用素とよぶことにする．

$$\Delta = I_{\mathcal{M}} - R_{z_1}R_{z_1}^* - R_{z_2}R_{z_2}^* + R_{z_1}R_{z_2}R_{z_1}^*R_{z_2}^*$$

この Δ も $1/k_\lambda(z_1, z_2) = (1 - z_1\overline{\lambda_1})(1 - z_2\overline{\lambda_2})$ に対応している．

さて，この defect 作用素 Δ に関し，$\mathbb{D}^2$ の自己同型写像（双正則写像）

$$(b_{\lambda_1}(z_1), b_{\lambda_2}(z_2)) \text{ where } b_{\lambda_j} = b_{\lambda_j}(z_j) = \frac{z_j - \lambda_j}{1 - \overline{\lambda_j}z_j}$$

を用いた以下のような摂動を考える ([25]).

$$\Delta_\lambda = I_{\mathcal{M}} - R_{b_{\lambda_1}}R_{b_{\lambda_1}}^* - R_{b_{\lambda_2}}R_{b_{\lambda_2}}^* + R_{b_{\lambda_1}}R_{b_{\lambda_2}}R_{b_{\lambda_1}}^*R_{b_{\lambda_2}}^* \quad (\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{D}^2).$$

$\mathbb{D}^2$ の自己同型写像には，一次分数変換から定まるものの他に，回転と変数の交換があるが，Δ_λ の定義から，それらを考慮に入れても Δ_λ の形は変わらないことに注意しておく．また，Δ_λ を λ の関数と考えない場合は，その性質を調べるには，$\lambda = (0, 0)$ の場合を考えれば十分である．

さて，このような摂動を考える理由は以下の事実である．

定理 6.1 (Guo-Yang [18], Guo-Wang [17]) H^2 の任意の部分加群 $\mathcal{M}$ と $\lambda \in \mathbb{D}^2$ に対して，

$$\ker(I - \Delta_\lambda) = \mathcal{M}/\mathcal{M}_\lambda$$

が成り立つ．

次の定理も，$\lambda = (0, 0)$ のときに Guo-Yang [18] で証明されているが，その証明は一般の $\lambda \in \mathbb{D}^2$ にも通用する．

定理 6.2 (Guo-Yang [18]) 任意の $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{D}^2$ に対し，以下が成り立つ．

(i) $\|\Delta_\lambda\| = 1$.

(ii) Δ_λ がトレース作用素ならば $\operatorname{tr}\Delta_\lambda = 1$.

(iii) $\|\Delta_\lambda\|_2^2 \le 3\dim(H^2/\mathcal{M}) + 1$.

注意 6.1 一般に $\|\Delta_\lambda\|_2$ は λ の自明でない関数である.

Yang により，H^2 の部分加群に次のクラスが導入された.

定義 6.1 (Yang [30]) H^2 の部分加群 $\mathcal{M}$ に対して，Δ が Hilbert-Schmidt 作用素のとき，$\mathcal{M}$ を Hilbert-Schmidt 部分加群という.

部分加群の Hilbert-Schmidt クラスは，$\mathcal{M}$ が多項式環のイデアルで生成される場合や Rudin の例など多くの部分加群を含む.

定理 6.3 ([25]) H^2 の部分加群 $\mathcal{M}$ に対し次が成り立つ.

(i) ある $\mu \in \mathbb{D}^2$ に対し，Δ_μ が Hilbert-Schmidt 作用素ならば，任意の $\lambda \in \mathbb{D}^2$ に対し Δ_λ は Hilbert-Schmidt 作用素.

(ii) $\mathcal{M}$ が Hilbert-Schmidt 部分加群ならば，Δ_λ は λ の関数として，Hilbert-Schmidt ノルムに関し連続.

定理 6.4 ([25]) $\mathcal{M}$ を Hilbert-Schmidt 部分加群とし，ある $\mu \in \mathbb{D}^2$ で $\dim \mathcal{M}/\mathcal{M}_\mu = n > 1$ と仮定する．このとき，$\overline{U} \cap \sigma(\Delta_\mu) = \{1\}$ をみたす 1 の任意の近傍 U に対して，μ のある近傍 U_μ が存在して，任意の $\lambda \in U_\mu$ に対して，$\sigma(\Delta_\lambda) \cap U = \{\sigma_1(\lambda), \ldots, \sigma_n(\lambda)\}$ （重複するものも数える）が成り立つ.

この定理により，$\lambda \to \mu$ とすることにより，Δ_λ の 1 でない固有値のいくつかが 1 に集中するから，$\dim \mathcal{M}/\mathcal{M}_\mu = n$ となることがわかった（残念ながら，これは問題の言い換えに過ぎないように思える）．以下の具体例により，その様子がよくわかる.

例 6.1 $q_1 = q_1(z_1)$ と $q_2 = q_2(z_2)$ を一変数の inner 関数とし，$\mathcal{M}$ を q_1 と q_2 とで生成される $H^2(\mathbb{D}^2)$ の部分加群とする ([19]). このとき，

$$\dim\ker(I - \Delta_\lambda) = \begin{cases} 2 & (\text{if } q_1(\lambda_1) = q_2(\lambda_2) = 0) \\ 1 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

である．さらに，Δ_λ の固有値は以下のようになる.

$$\sigma(\Delta_\lambda) = \{0, 1, \pm\sigma(\lambda)\}, \text{ where } \sigma(\lambda) := \sqrt{(1 - |q_1(\lambda_1)|^2)(1 - |q_2(\lambda_2)|^2)}.$$

$(\lambda_1, \lambda_2) = (0, 0)$ の場合は，Yang ([28]) により計算されている．また，$\sigma(\lambda) \neq 1$ のとき，$\sigma(\lambda)$ に対応する固有関数は

$$e(\lambda) = \left(\sqrt{1 - |q_2(\lambda_2)|^2} - \sqrt{1 - |q_1(\lambda_1)|^2}\right) \frac{q_1(z_1) q_2(z_2)}{(1 - \overline{\lambda_1} z_1)(1 - \overline{\lambda_2} z_2)}$$

$$- \frac{q_2(\lambda_2)}{\sqrt{1 - |q_2(\lambda_2)|^2}} \frac{q_1(z_1)(1 - \overline{q_2(\lambda_2)} q_2(z_2))}{(1 - \overline{\lambda_1} z_1)(1 - \overline{\lambda_2} z_2)}$$

$$+ \frac{q_1(\lambda_1)}{\sqrt{1 - |q_1(\lambda_1)|^2}} \frac{q_2(z_2)(1 - \overline{q_1(\lambda_1)} q_1(z_1))}{(1 - \overline{\lambda_1} z_1)(1 - \overline{\lambda_2} z_2)}$$

である．$e(\lambda) \to 0$ $(\sigma(\lambda) \to 1)$ に注意. $\sigma(\lambda) = 1$ の場合，固有値 1 に対応する固有関数は

$$q_1(z_1) k_\lambda, q_2(z_2) k_\lambda$$

である．このような現象（摂動により固有値は連続的に動くが，固有関数は連続的に動くとは限らない）は作用素の摂動論にてよく知られている (Kato [20] を参照).

注意 6.2 定理 6.1，定理 6.3，定理 6.4 に関して，再生核ヒルベルト空間とそのスペクトル上に作用する自己同型写像がある性質をみたしていれば，適当な変更を加えることにより同様なことが成立する．少なくとも，$\mathbb{D}^n$ 上の Hardy 空間と Bergman 空間，$\mathbb{C}^n$ の単位球上の Hardy 空間，Bergman 空間，Drury-Arveson 空間ではその類似が成り立つ.

参考文献

[1] C. Apostol, H. Bercovici, C. Foiaş and C. Pearcy, *Invariant subspaces, dilation theory, and the structure of the predual of a dual algebra*, J. Funct. Anal. **63** (1985), 369–404.

[2] J. Agler and J. E. McCarthy, *Pick interpolation and Hilbert function spaces*, Graduate Studies in Mathematics, 44. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[3] W. Arveson, *Subalgebras of C^*-algebras* III: *Multivariable operator theory*, Acta Math. **181** (1998), 159–228.

[4] W. Arveson, *The curvature invariant of a Hilbert module over* $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_d]$, J. Reine Angew. Math. **522** (2000), 173–236.

[5] A. Aleman, S. Richter and C. Sundberg, *Beurling's theorem for the Bergman space*, Acta Math. **177** (1996), 275–310.

[6] X. Chen and K. Guo, *Analytic Hilbert modules*, Chapman & Hall/CRC Research Notes in Mathematics, 433. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2003.

[7] S. Costea, E. Sawyer and B. Wick, *The Corona Theorem for the Drury-Arveson Hardy space and other holomorphic Besov-Sobolev spaces on the unit ball in* $\mathbb{C}^n$, arXiv:0811.0627, math.CV (math.CA).

[8] L. de Branges, *Hilbert spaces of entire functions*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1968.

[9] L. de Branges and J. Rovnyak, *Square summable power series*, Holt, Rinehart and Winston, N. Y., 1966.

[10] R. G. Douglas and V. Paulsen, *Hilbert modules over function algebras*, Pitman Research Notes in Mathematics Series, 217. Longman Scientific & Technical, Harlow; copublished in the United States with John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989.

[11] R. G. Douglas and K. Yan, *Hilbert-Samuel polynomials for Hilbert modules*, Indiana Univ. Math. **42** (1993), 811–820.

[12] S. W. Drury, *A generalization of von Neumann's inequality to the complex ball*, Proc. Amer. Math. Soc. **68** (1978), no. 3, 300–304.

[13] J. Eschmeier, *Samuel multiplicity and Fredholm theory*, Math. Ann. **339** (2007), no. 1, 21–35.

[14] J. Gleason, S. Richter and C. Sundberg, *On the index of invariant subspaces in spaces of analytic functions of several complex variables*, J. Reine Angew. Math. **587** (2005), 49–76.

[15] D. Greene, S. Richter and C. Sundberg, *The structure of inner multipliers on spaces with complete Nevanlinna Pick kernels* J. Funct. Anal. **194** (2002), 311–331.

[16] K. Guo, *Defect operators, defect functions and defect indices for analytic submodules*, J. Funct. Anal. **213** (2004), 380–411.

[17] K. Guo and P. Wang, *Defect operators and Fredholmness for Toeplitz pairs with inner symbols*, J. Operator Theory **58** (2007), 251–268.

[18] K. Guo and R. Yang, *The core function of submodules over the bidisk*, Indiana Univ. Math. J. **53** (2004), no. 1, 205–222.

[19] K. Izuchi, T. Nakazi and M. Seto, *Backward shift invariant subspaces in the bidisc* II, J. Operator Theory **51** (2004), 361–376.

[20] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Reprint of the 1980 edition, Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[21] S. Richter, *Invariant subspaces in Banach spaces of analytic functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **304** (1987), no. 2, 585–616.

[22] W. Rudin, *Function theory in polydiscs*, W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam 1969.

[23] M. Seto, *A new proof that Rudin's module is not finitely generated*, Oper. Theory Adv. Appl. **127** (2008), 195–197.

[24] M. Seto, *Infinite sequences of inner functions and submodules in* $H^2(\mathbb{D}^2)$, J. Operator Theory **61** (2009), no. 1, 75–86.

[25] M. Seto, *A perturbation theory for core operators of Hilbert-Schmidt submodules*, preprint.

[26] B. Sz.-Nagy and C. Foaiş, *Harmonic analysis of operators on Hilbert space*, North Holland, Amsterdam, 1970.

[27] M. Seto and R. Yang, *Inner sequence based invariant subspaces in $H^2(\mathbb{D}^2)$*, Proc. Amer. Math. Soc. **135** (2007), no. 8, 2519-2526.

[28] R. Yang, *Operator theory in the Hardy space over the bidisk* III, J. Funct. Anal. **186** (2001), no. 2, 521–545.

[29] R. Yang, *Hilbert-Schmidt submodules and issues of unitary equivalence*, J. Operator Theory **53** (2005), no. 1, 169–184.

[30] R. Yang, *The core operator and congruent submodules*, J. Funct. Anal. **228** (2005), no. 2, 469–489.

[31] R. Yang and K. Zhu, *The root operator on invariant subspaces of the Bergman space*, Illinois J. Math. **47** (2003), no. 4, 1227–1242.

有限Blaschke積に対する Toeplitz-composition C^*環

九州大学大学院数理学府　　濱田　裕康 (Hiroyasu Hamada)

Hardy 空間上の Toeplitz 作用素 T_a の解析と T_z で生成される C^* 環である Toeplitz 環 $\mathcal{T}$ の解析には関係がある．たとえば，T_a の Fredholm 指数や本質的スペクトルなどを，Toeplitz 環 $\mathcal{T}$ を使って理解することができる．そこでさらに合成作用素 C_φ を加え，Toeplitz 作用素 T_a と合成作用素 C_φ の積や和，$*$ で作られる作用素を T_z と C_φ から生成される C^* 環 $\mathcal{T}\mathcal{C}_\varphi$ を使って解析できないかといった問題が考えられる．そこで今回は R が有限 Blaschke 積の場合について，$\mathcal{T}\mathcal{C}_R$ の解析について述べる．

特に R の次数が 1 の有限 Blaschke 積は単位開円板上は双正則であり，この場合の $\mathcal{T}\mathcal{C}_R$ の解析は Park [12], Jury [6, 7] によって研究されている．その他，関連するものとして双正則でない一次分数変換である条件を満たすものとして Kriete-MacCluer-Moorhouse [10] の研究がある．

以下では，複素平面 $\mathbb{C}$ 内の単位円を $\mathbb{T}$，単位開円板を $\mathbb{D}$ と書くことにする．単位開円板 $\mathbb{D}$ 上の Hardy 空間を $H^2(\mathbb{D})$ と書く．

注意. $f \in H^2(\mathbb{D})$ に対して，動径極限値

$$\lim_{r\to 1-} f(re^{i\theta}) = f(e^{i\theta}) \quad a.e.\theta$$

を取ることにより，$H^2(\mathbb{D})$ と $L^2(\mathbb{T})$ 内の負の Fourier 係数が消えている関数全体 $H^2(\mathbb{T})$ を同一視し，$H^2 := H^2(\mathbb{D}) = H^2(\mathbb{T})$ と書く．

次に Toeplitz 作用素の定義と，それらから生成される C^* 環である Toeplitz 環について知られている事実を述べる．

定義 (Toeplitz 作用素). $a \in L^\infty(\mathbb{T})$ に対して，$H^2(\mathbb{T})$ 上の作用素 T_a を

$$T_a f := P_{H^2} a f, \qquad f \in H^2(\mathbb{T})$$

と定める．ただし，P_{H^2} は $H^2(\mathbb{T})$ への射影である．

$\mathcal{T} = C^*(T_z)$ とおき，これを Toeplitz 環という．ただし $C^*(\cdot)$ は (これ以降も同様に) $\cdot$ で生成される C^* 環を意味する．

定理 1 (Well-known). (1) Toeplitz 環 $\mathcal{T}$ は次のよう表わせる：

$$\mathcal{T} = \{T_a + K \mid a \in C(\mathbb{T}), K \in \mathcal{K}(H^2)\}.$$

ここで，$\mathcal{K}(H^2)$ は Hardy 空間 H^2 上のコンパクト作用素全体からなる C^* 環である．

(2) Toeplitz 環 $\mathcal{T}$ は $\mathcal{K}(H^2)$ をイデアルとして含み，このイデアルで剰余した環は

$$\mathcal{T}/\mathcal{K}(H^2(\mathbb{T})) \cong C(\mathbb{T}), \quad T_a + K \mapsto a.$$

となる．

次に新たに加える作用素である合成作用素の定義を述べる．

定義 (合成作用素). $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ を解析的とする．$H^2(\mathbb{D})$ 上の作用素 C_φ を

$$(C_\varphi f)(z) := f(\varphi(z)), \qquad z \in \mathbb{D}$$

と定める．

始めにも述べたように，Toeplitz 環にさらに合成作用素 C_φ を加えて，生成される C^* 環を考える．

定義 (Toeplitz-composition C^* 環). $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ を解析的とする．

(1) $\mathcal{TC}_\varphi := C^*(T_z, C_\varphi)$ とおく．$\mathcal{TC}_\varphi$ を φ に対する Toeplitz-composition C^* 環という．

(2) Toeplitz 環のときと同様に $\mathcal{K}(H^2)$ で剰余した環を考える．$\mathcal{TC}_\varphi$ は $\mathcal{K}(H^2)$ をイデアルとして含むので，$\mathcal{OC}_\varphi := \mathcal{TC}_\varphi/\mathcal{K}(H^2)$ と定める．

以後，目標を $\mathcal{OC}_\varphi$ の解析とする．特に $\mathcal{OC}_\varphi$ は知られている環，解析しやすい環として書けるかどうかを考察する．φ が一般の自己正則写像では難しいので，今回は有限 Blaschke 積の場合を考える．有限 Blaschke 積は次のように定義される．

定義. $|\lambda| = 1, |z_k| < 1$ に対して

$$R(z) = \lambda \prod_{k=1}^{n} \frac{z - z_k}{1 - \overline{z_k} z}$$

とする．R を有限 Blaschke 積といい，n を R の次数という．

今回得られた定理を以下で述べる．$R(0) = 0$ の仮定をつけた場合は，Hamada-Watatani [5] ですでに示されている．定理の中にある $\mathcal{O}_{X_R}$ の定義については後で述べることにする．

定理 2. R を次数 2 以上の有限 Blaschke 積とすると，$\mathcal{OC}_R \cong \mathcal{O}_{X_R}$ が成り立つ．

上記の定理と $\mathcal{O}_{X_R}$ の性質を使うことにより，$\mathcal{OC}_R$ がいつ単純 (すなわち，非自明な閉イデアルを持たない) であるかが分かる．

系 3. R を次数 2 以上の有限 Blaschke 積とすると，

$$R \text{ の Julia 集合 } J_R \text{が } \mathbb{T} \iff \mathcal{OC}_R \text{が単純}.$$

この系を具体例に適用すると次のようになる．有限 Blaschke 積の Julia 集合については，[1, pp.79, Example] に記述がある．

例. (1)

$$R(z) = \frac{2z^2 - 1}{2 - z^2}.$$

とすると，R は $\mathbb{D}$ 内に固定点を持つ．よって $J_R = \mathbb{T}$ であり，$\mathcal{OC}_R$ は単純である．

(2)

$$R(z) = \frac{2z^2 + 1}{2 + z^2}.$$

とすると，R は $\mathbb{D}$ 内に固定点を持たず J_R は $\mathbb{T}$ 内の Cantor 集合になる．よって $\mathcal{OC}_R$ は単純ではない．

(3)

$$R(z) = \frac{3z^2 + 1}{3 + z^2}.$$

とすると，R は $\mathbb{D}$ 内に固定点を持たないが $J_R = \mathbb{T}$ となる．よって $\mathcal{OC}_R$ は単純である．

定理のもう一つの系として次が分かる．

系 4. R を次数 n が 2 以上の有限 Blaschke 積とする．R が $\mathbb{D}$ 内に固定点を持つとすると，$\mathcal{OC}_R \cong \mathcal{OC}_{z^n}$ が成り立つ．さらに $K_0(\mathcal{OC}_R) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/(n-1)\mathbb{Z}$, $K_1(\mathcal{OC}_R) \cong \mathbb{Z}$ である．

証明では Shub [13] の結果から，上記の R が R_0 に位相共役であることを使っている．ただし $R_0(z) = z^n$ とおいた．

以下では，定理 2 の証明について述べる．証明は作用素の交換関係を 3 つ示すこと，写像が単射になることを示す作用素環の議論の 2 つに分かれる．

1 つ目の交換関係は計算によりすぐに示すことができる．

補題 5. $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ を解析的とする．このとき，

$$C_\varphi T_a = T_{a \circ \varphi} C_R, \quad a \in C(\mathbb{T})$$

が成り立つ．

2 つ目の交換関係を述べるために準備をする．このあたりは [2] を参照のこと．

定義 (Aleksandrov-Clark 測度). $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ を解析的とする．$\alpha \in \mathbb{T}$ に対して，Herglotz の定理より以下を満たす $\mathbb{T}$ 上の測度 μ_α が存在する．

$$\frac{1 - |\varphi(z)|^2}{|\alpha - \varphi(z)|^2} = \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} d\mu_\alpha(\zeta).$$

定義 (Aleksandrov 作用素). f を $\mathbb{T}$ 上の関数とするとき

$$(A_\varphi(f))(\alpha) := \int_{\mathbb{T}} f(\zeta) d\mu_\alpha(\zeta).$$

と定める．

例. $\varphi = R$ が有限 Blaschke 積のとき

$$(A_R(f))(\alpha) = \sum_{R(\zeta)=\alpha} \frac{1}{|R'(\zeta)|} f(\zeta)$$

となる．

2 つ目の交換関係について述べる．解析関数 $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ が $|\varphi(e^{i\theta})| = 1\, a.e.\theta$ を満たすとき，φ は内関数であるという．ただし，

$$\varphi(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1-} \varphi(re^{i\theta}) \quad a.e.\theta.$$

である．有限 Blaschke 積は内関数であることに注意する．

定理 6 (Jury [8]). φ を内関数とすると

$$C_\varphi^* T_a C_\varphi = T_{A_\varphi(a)}, \quad a \in L^\infty(\mathbb{T})$$

が成り立つ．

次に，φ が一般の内関数の場合に Aleksandrov 作用素の性質をあげる．(2),(3) は合成作用素の共役作用素になることを意味している．

命題 7 (Aleksandrov 作用素の性質). φ を内関数とする．

(1) ($L^\infty(\mathbb{T})$ 上では Exel [4] の意味で α に関する transfer 作用素)
$\alpha : L^\infty(\mathbb{T}) \to L^\infty(\mathbb{T})$ を

$$(\alpha(a))(z) := a(R(z)), \quad a \in L^\infty(\mathbb{T}), z \in \mathbb{T}$$

と定めると，$A_\varphi : L^\infty(\mathbb{T}) \to L^\infty(\mathbb{T})$ は正写像 (したがって有界線形作用素) で，

$$A_\varphi(\alpha(a)b) = aA_\varphi(b), \quad a, b \in L^\infty(\mathbb{T})$$

が成り立つ．

(2) A_φ は $L^2(\mathbb{T})$ 上の有界線形作用素であり，$C_\varphi^* = A_\varphi$ となる．

(3) $\varphi(0) = 0$ のとき，A_φ は $H^2(\mathbb{T})$ 上の有界線形作用素であり，$C_\varphi^* = A_\varphi$ となる．

3 つ目の交換関係について述べる．

補題 8. $\{u_k\}_{k=1}^n \in C(\mathbb{T})$ が存在して，

$$\sum_{k=1}^n T_{u_k} C_R (T_{u_k} C_R)^* = I$$

が成り立つ．

証明の概略. 簡単のため R が

$$R(z) = \frac{z - z_1}{1 - \overline{z_1} z} \frac{z - z_2}{1 - \overline{z_2} z}$$

の場合について証明する.

$$u_1(z) = \frac{\sqrt{1 - |z_1|^2}}{1 - \overline{z_1} z}, \quad u_2(z) = \frac{\sqrt{1 - |z_2|^2}}{1 - \overline{z_2} z} \frac{z - z_1}{1 - \overline{z_1} z}$$

とおくと，$\{u_1 R^k, u_2 R^k \mid k = 0, 1, \dots\}$ は $H^2(\mathbb{T})$ の完全正規直交系である．$\zeta_k(z) = z^k$ とおくと，

$$T_{u_1} C_R \zeta_k = u_1 R^k, \quad T_{u_2} C_R \zeta_k = u_2 R^k$$

となり，$T_{u_1} C_R$ と $T_{u_2} C_R$ は等距離で値域は直交し，その和は $H^2(\mathbb{T})$ になる. □

上記の証明法は，$R(0) = 0$ を仮定した Hamada-Watatani [5] と同様である．また完全正規直交系を取る部分は Courtney-Muhly-Schmidt [3] の定理を参考にするとよい.

R を有限 Blaschke 積とする．$A = C(\mathbb{T})$ とおく．以下で C^* 環 $\mathcal{O}_{X_R}$ について述べる．この構成方法は Kajiwara-Watatani [9] を参考にしている.

定義. $X_R = C(\mathbb{T})$ とおく．X_R を次のようにして A-A 双加群とみなす．$a, b \in A$, $\xi \in X_R$ に対して，

$$(a \cdot \xi \cdot b)(z) := a(z)\xi(z)b(R(z))$$

と定める．さらに X_R には次の右 A 値内積を入れる.

$$\langle \xi, \eta \rangle_A := A_R(|u_1|^2 \overline{\xi} \eta), \quad \xi, \eta \in X_R. \quad \text{ただし，} \quad u_1(z) = \frac{\sqrt{1 - |z_1|^2}}{1 - \overline{z_1} z}.$$

上記の定義で定めた X_R の左右の作用は，補題 5 で述べた交換関係 $C_R T_a = T_{a \circ R} C_R$ に対応している.

定義. $\mathcal{O}_{X_R}$ を X_R から作られる Cuntz-Pimsner 環 [11] とする．つまり，次の関係式を満たす $C(\mathbb{T})$ と S_ξ $(\xi \in X_R)$ で生成される普遍的な C^* 環とする.

$$S_{a \cdot \xi \cdot b} = a S_\xi b, \quad S_{\xi + \eta} = S_\xi + S_\eta, \quad S_\xi^* S_\eta = \langle \xi, \eta \rangle_A,$$
$$\sum_{i=1}^n S_{v_i} S_{v_i}^* = I, \quad a, b \in A, \quad \xi, \eta \in X,$$

ただし，$\{v_i\}_{i=1}^n$ は X_R の有限基底である.

注意. 上記の関係式は，X_R の左右の作用と A 値内積をそのまま環に引き継がせたものである．作用素との交換関係とは次のように対応している.

$$S_\xi^* S_\eta = \langle \xi, \eta \rangle_A \quad \leftrightsquigarrow \quad C_R^* T_a C_R = T_{A_R(a)},$$
$$\sum_{i=1}^n S_{v_i} S_{v_i}^* = I \quad \leftrightsquigarrow \quad \sum_{i=1}^n T_{u_i} C_R (T_{u_i} C_R)^* = I.$$

定義の普遍的という意味について詳しいことは省略するが，関係式を満たす $\{a, S_\xi \mid a \in C(\mathbb{T}), \xi \in X_R\}$ から生成される $*$ 環を "最も大きな "C^* ノルムで完備化したものという意味である．

定理 *2* の証明の概略．これまで示した 3 つの交換関係から，

$$\Phi : \mathcal{O}_{X_R} \to \mathcal{OC}_R \quad \text{全射} * \text{準同型写像} \quad a \mapsto T_a + \mathcal{K}(H^2)$$

が存在する．あとは Φ が単射になることを示せばよい．R を次数 2 以上の有限 Blaschke 積のとき，$k \geq 1$ に対して $R^{\circ k}(z) = z$ の解は有限個であることを用いれば，Φ が単射になることが分かり，証明が完成する． □

次数が 2 次以上の有限 Blaschke 積よりも弱い仮定である「$k \geq 1$ に対して，$R^{\circ k}(z) = z$ の解は有限個である」(定理 2 の証明中で用いたもの) を仮定すれば，定理 2 の主張は正しい．この部分に関して質問をしていただいた羽鳥先生に感謝いたします．

注意. 次数が 1 の場合は，$R(z) = e^{\pi i/2}z$ ならば恒等的に $R^{\circ 4}(z) \equiv z$ となり，上記は満たさない．

参考文献

[1] L. Carleson and T. W. Gamelin, *Complex dynamics*, Springer-Verlag, New York, 1993.

[2] J. A. Cima, A. L. Matheson and W. T. Ross, *The Cauchy transform*, Mathematical Surveys and Monographs, **125**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.

[3] D. Courtney, P. S. Muhly and S. W. Schmidt, *Composition operators and endomorphisms*, to appear in Complex Analysis and Operator Theory.

[4] R. Exel, *A new look at the crossed-product of a C^*-algebra by an endomorphism*, Ergodic Theory Dynam. Systems, **23** (2003), 1733–1750.

[5] H. Hamada and Y. Watatani, *Toeplitz-composition C^*-algebras for certain finite Blaschke products*, Proc. Amer. Math. Soc., **138** (2010), 2113–2123.

[6] M. T. Jury, *The Fredholm index for elements of Toeplitz-composition C^*-algebras*, Integral Equations Operator Theory, **58** (2007), 341–362.

[7] M. T. Jury, *C^*-algebras generated by groups of composition operators*, Indiana Univ. Math. J. **56** (2007), 3171–3192.

[8] M. T. Jury, *Completely positive maps induced by composition operators*, preprint, http://www.math.ufl.edu/~mjury/papers/cpcomp.pdf

[9] T. Kajiwara and Y. Watatani, *C^*-algebras associated with complex dynamical systems*, Indiana Math. J., **54** (2005), 755–778.

[10] T. L. Kriete, B. D. MacCluer, J. L. Moorhouse, *Toeplitz-composition C^*-algebras*, J. Operator Theory, **58** (2007), 135–156.

[11] M. V. Pimsner, *A class of C^*-algebras generalizing both Cuntz-Krieger algebras and crossed products by $\mathbb{Z}$*. Free probability theory (Waterloo, ON, 1995), 189–212, Fields Inst. Commun., 12, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[12] E. Park, *Toeplitz algebras and extensions of irrational rotation algebras*, Canad. Math. Bull., **48** (2005), 607–613.

[13] M. Shub, *Endomorphisms of compact differentiable manifolds*, Amer. J. Math., **91** (1969), 175–199.

Graduate School of Mathematics, Kyushu University, Motooka, Fukuoka, 819-0395, Japan.
email address: h-hamada@math.kyushu-u.ac.jp

Non-linear isometries on the Smirnov class

岩手医科大学 共通教育センター　　飯田　安保 (Yasuo IIDA)
新潟大学 自然科学系 (理学部)　　羽鳥　理 (Osamu HATORI)

【アブストラクト】

Nevanlinna class や Smirnov class、Hardy space などのクラスにおいて、線形等長写像の研究がいろいろと知られている。一方 Mazur-Ulam の定理によりノルム空間における等長写像は自動的に和を本質的に保存することが知られている。この小文では Nevanlinna 型空間における線形等長写像に関するいくつかの結果を紹介するとともに線形性を仮定しない場合の（特に乗法を保存する）等長写像の構造について新たに得られた結果を報告する。

1.　１変数の Nevanlinna 型空間の定義

定義 1-1

f を $U = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$ 上の正則関数とする。また、$T = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$ とする。

1．$\displaystyle\sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta < +\infty$ を満たすとき、 $f \in N$ とする。

ここで $\log^+ x := \max(\log x\,,\,0)$ である。

（注意）$f \in N$ のとき $f^*(e^{i\theta}) := \displaystyle\lim_{r \to 1^-} f(re^{i\theta})$ が a.e. $e^{i\theta} \in T$ で存在する。

2．$f \in N$ で、$\displaystyle\lim_{r \to 1^-} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta = \int_0^{2\pi} \log^+ |f^*(e^{i\theta})| d\theta$ を満たすとき、$f \in N_*$ とする。

3．$p > 1$ とする。$\displaystyle\sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} \left(\log^+ |f(re^{i\theta})|\right)^p d\theta < +\infty$ を満たすとき、 $f \in N^p$ とする。

4．$0 < q < \infty$ とする。 $\displaystyle\sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^q d\theta < +\infty$ を満たすとき、$f \in H^q$ とする。

また、U 上の有界正則関数全体を H^∞ で表す。

N を Nevanlinna class、N_* を Smirnov class、$N^p\,(p > 1)$ を Privalov space、$H^q\,(0 < q \leqq \infty)$ を Hardy space とよぶ。これらの空間のあいだには、包含関係　$H^\infty \subsetneq H^{q_1} \subsetneq H^{q_2} \subsetneq N^{p_1} \subsetneq N^{p_2} \subsetneq N_* \subsetneq N$　$(0 < q_2 < q_1 < \infty\,,\, 0 < p_2 < p_1 < \infty)$　が成り立つ。また N とその部分空間を総称して **Nevanlinna 型空間**と呼ぶ。

2.　１変数の Nevanlinna 型空間における線形等長写像について

①　H^q における線形等長写像

H^q 上の距離は次のように定義される：

・$q \geqq 1$ の場合：　$r_q(f\,,\,g) = \left\{ \int_0^{2\pi} |f^*(e^{i\theta}) - g^*(e^{i\theta})|^q d\theta \right\}^{\frac{1}{q}}$　$(f, g \in H^q)$.

・$0 < q < 1$ の場合：　$r_q(f\,,\,g) = \int_0^{2\pi} |f^*(e^{i\theta}) - g^*(e^{i\theta})|^q d\theta$　$(f, g \in H^q)$.

定義 2-1

$0 < q < \infty$ とする。H^q から H^q への線形写像 A が任意の $f \in H^q$ について

$$\int_0^{2\pi} |(Af)^*(e^{i\theta})|^q \, d\theta = \int_0^{2\pi} |f^*(e^{i\theta})|^q \, d\theta$$

を満たすとき、A を H^q-等長写像と呼ぶ。

H^q における線形等長写像については、以下の結果が知られている：

定理 2-2([2])

$0 < q < \infty\,,\, q \neq 2$ とする。$A : H^q \to H^q$ が上への線形等長写像であるとき、$c \in T\,,\, \varphi(z) = \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}b$　$(a \in U\,,\, b \in T)$ が存在して

$$(Af)(z) = c\,\{\varphi'(z)\}^{\frac{1}{q}}\, f(\varphi(z)) \quad (z \in U\,,\, f \in H^q)$$

が成り立つ。

②　$N_*\,,\, N^p$ における線形等長写像

$N_*\,,\, N^p$ 上の距離は次のように定義される（ただし、便宜上 $N^1 = N_*$ とする）：

$$\rho_p(f\,,\,g) := \sup_{0<r<1} \left\{ \int_0^{2\pi} \Big(\log(1 + |f(re^{i\theta}) - g(re^{i\theta})|) \Big)^p d\theta \right\}^{\frac{1}{p}} \quad (f\,,\,g \in N^p).$$

定義 2-3

$p \geqq 1$ とする。N^p から N^p への線形写像 A が任意の $f \in N^p$ について

$$\int_0^{2\pi} \Big(\log(1 + |(Af)^*(e^{i\theta})|) \Big)^p \, d\theta = \int_0^{2\pi} \Big(\log(1 + |f^*(e^{i\theta})|) \Big)^p \, d\theta$$

を満たすとき、 A を N^p-等長写像と呼ぶ。

定理 2-4([4,7])

$p \geqq 1$ とし、$A : N^p \to N^p$ が上への線形等長写像であるとする。このとき絶対値１の複素数 $a\,, b$ が存在して

$$(Af)(z) = af(bz) \quad (z \in U\,,\, f \in N^p)$$

となる。

３． 主定理と、その系について

ここでは多変数での Smirnov class について得られた結果を紹介する。

unit polydisk を $U^n = \{z \in \mathbf{C}^n : |z_j| < 1, \ \ 1 \leqq j \leqq n\}$、unit ball を $B_n = \{z \in \mathbf{C}^n : \sum_{j=1}^n |z_j|^2 < 1\}$ とし、$T^n = \{z \in \mathbf{C}^n : |z_j| = 1, \ \ 1 \leqq j \leqq n\}$、$S_n = \{z \in \mathbf{C}^n : \sum_{j=1}^n |z_j|^2 = 1\}$ とする。以下、X は U^n か B_n を表し、Γ は T^n か S_n を表すものとする。また Γ 上の nomalized Lebesgue measure を $d\sigma$ で表す。

さて、X 上の正則関数 f が $\sup\limits_{0<r<1} \displaystyle\int_\Gamma \log^+ |f(rz)| d\sigma(z) < \infty$ を満たすとき f は（多変数での）Nevanlinna class $N(X)$ に属するという。１変数の場合と同様、$f \in N(X)$ には有限な nontangential limit が a.e. $z \in \Gamma$ で存在することが知られており、これを $f(z)$ で表すものとする。また $f \in N(X)$ が以下の条件を満たすとき f は（多変数での）Smirnov class $N_*(X)$ に属するという：

$$\sup_{0<r<1} \int_\Gamma \log^+ |f(rz)| d\sigma(z) = \int_\Gamma \log^+ |f(z)| d\sigma(z).$$

線形性を仮定しない Smirnov class 上の等長写像について、以下の結果が得られた：

定理 3-1([3])

Let n be a positive interger and let X be either B_n or U^n. Suppose that $T : N_*(X) \to N_*(X)$ is a surjective isometry. If $T(2f) = 2T(f)$ holds for every $f \in N_*(X)$, then

$$T(f) = \alpha f \circ \Phi, \quad \forall f \in N_*(X) \qquad \text{or} \qquad T(f) = \alpha \overline{f \circ \overline{\Phi}}, \quad \forall f \in N_*(X),$$

where α is a complex number with the unit modulus and for $X = B_n$, Φ is unitary transformation; for $X = U^n$, $\Phi(z_1, \ldots, z_n) = (\lambda_1 z_{i_1}, \ldots, \lambda_n z_{i_n})$, where $|\lambda_j| = 1$, $1 \leqq j \leqq n$ and $(i_1, \ldots, i_n)$ is some permutation of the integers from 1 through n.

一方、$T : N_*(X) \to N_*(X)$ が $T(fg) = T(f)T(g) \quad (f\,,\, g \in N_*(X))$ を満たすとき、T は multiplicative とよばれる。$N_*(X)$ 上の multiplicative isometry について以下の結果が得られた：

系 3-2([3])

Let T be a multiplicative (not necessary linear) isometry from $N_*(X)$ onto itself. Then there exists a holomorphic automorphis Φ on X

$$T(f) = f \circ \Phi, \quad f \in N_*(X) \qquad \text{or} \qquad T(f) = \overline{f(\overline{\Phi})}, \quad f \in N_*(X)$$

hold, where Φ is unitary transformation for $X = B_n$; for $X = U^n$ $\Phi(z_1, \ldots, z_n) = (\lambda_1 z_{i_1}, \ldots, \lambda_n z_{i_n})$, where $|\lambda_j| = 1$, $1 \le j \le n$ and $(i_1, \ldots, i_n)$ is some permutation of the integers from 1 through n.

4．　主定理と、その系の証明の概略

まず今回の主定理を証明する際に重要な役割を果たすのが、以下の定理である。

Mazur-Ulam theorem([5,8])

X , Y を normed vector space とし、$U : X \to Y$ は $U(0) = 0$ を満たす onto isometry とする。このとき U はreal-linear である。

・定理 3-1 の証明の概略

$f, g \in H^1(X)$ とする。このとき

$$\int \log(1 + |\frac{f}{2^n} - \frac{g}{2^n}|) d\sigma = \int \log(1 + |\frac{T(f)}{2^n} - \frac{T(g)}{2^n}|) d\sigma$$

が成り立つ。[7] の Theorem 2.1 と同じ方法を用いると $T(H^1(X)) = H^1(X)$ となり、また $T|_{H^1(X)}$ は H^1-norm $\|\cdot\|_1$ によって導かれる距離に関する isometry となることが分かる。よって $T(0) = 0$ なので Mazur-Ulam theorem により $T|_{H^1(X)}$ は real-linear isometry となる。

さて自然数 N に対して、関数 θ_N を

$$\theta_N(x) = \begin{cases} \frac{(-1)^N}{N+1}, & x = 0 \\ \left(\log(1+x) - \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(-1)^j}{j+1} x^{j+1}\right) / x^{N+1}, & x > 0 \end{cases}$$

と定義する。このとき $\left((-1)^N x^{N+1} \theta_N(x)\right)' = \frac{x^N}{1+x}$ より、$x \ge 0$ のとき $(-1)^N \theta_N(x) \ge 0$ が成り立つ（この結果はあとで Fatou の定理を適用する際に利用する)。

ここで、任意の $f \in N_*(X)$ と自然数 N に対して、$f \in H^N(X)$ と $T(f) \in H^N(X)$ が同値であること、さらに $\|f\|_N = \|T(f)\|_N$ が成立することを証明しよう。$N = 1$ の場合はすでに示されている。次にこれが $N = 1, \ldots, m$ に対して成り立つとする。$f \in H^{m+1}(X)$ とすると、このときすべての $k = 1, \ldots, m$ に対して $f \in H^k(X)$ が成り立ち、また T が $H^1(X)$ 上の real-linear isometry

なので、仮定により

$$(-1)^m \left(\int \log(1 + \frac{|f|}{l}) d\sigma - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(-1)^j}{j+1} \int \frac{|f|^{j+1}}{l} d\sigma \right)$$
$$= (-1)^m \left(\int \log(1 + \frac{|T(f)|}{l}) d\sigma - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(-1)^j}{j+1} \int \frac{|T(f)|^{j+1}}{l} d\sigma \right)$$

がすべての自然数 l について成り立つ。よって

$$\int |f|^{m+1} (-1)^m \theta_m(|f|^m/l) d\sigma = \int |T(f)|^{m+1} (-1)^m \theta_m(|T(f)|^m/l) d\sigma \tag{1}$$

が得られる。さらに $l \to \infty$ として、左辺に Lebesgue の収束定理を用い、右辺に Fatou の定理を用いることで次が得られる：

$$\int |f|^{m+1} (-1)^m \theta_m(0) d\sigma \geq \int |T(f)|^{m+1} (-1)^m \theta_m(0) d\sigma.$$

よって $|T(f)|^{m+1}$ は可積で、 (1) において再び $l \to \infty$ とすると $\theta_m(0) = \frac{(-1)^m}{m+1}$ であることから、両辺に Lebesgue の収束定理を適用して

$$\int |f|^{m+1} d\sigma = \int |T(f)|^{m+1} d\sigma$$

が得られる。$d\sigma$ は有限測度なので

$$\lim_{m\to\infty} \|f\|_m = \|f\|_\infty$$

が任意の $f \in H^\infty(X)$ に対して得られる。任意の $f \in H^\infty(X)$ に対して $\|f\|_m = \|T(f)\|_m$ が成り立ち、$\lim_{m\to\infty} \|T(f)\|_m = \|T(f)\|_\infty$ なので、$T(f) \in H^\infty(X)$ ならびに $\|f\|_\infty = \|T(f)\|_\infty$ が任意の $f \in H^\infty(X)$ について成り立つ。同様にして $T(f) \in H^\infty(X)$ のとき $f \in H^\infty(X)$ なので、$T|_{H^\infty(X)}$ は $\|\cdot\|_\infty$ に関して、$H^\infty(X)$ から $H^\infty(X)$ への surjective isometry となる。$H^\infty(X)$ は極大イデアル空間上の uniform algebra なので、Ellis の定理 [1] から $T|_{H^\infty(X)}$ は complex-linear または anti-complex-linear であることが分かる。

まず $T|_{H^\infty(X)}$ が complex-linear であるとしよう。$H^\infty(X)$ は $N_*(X)$ で dense であり、位相の強弱から T は $N_*(X)$ において complex-linear である。よって [7] の Corollary 2.3 よりこの定理が示される。

次に $T|_{H^\infty(X)}$ が anti-complex-linear であるとすると、同様に T は $N_*(X)$ で anti-complex-linear である。$f \in N_*(X)$ に対して $\widetilde{T} : N_*(X) \to N_*(X)$ を

$$\widetilde{T}(f)(z_1, \ldots, z_n) = T(\overline{f(\overline{z_1}, \ldots, \overline{z_n})})$$

と定義する。このとき $\widetilde{T}$ は $N_*(X)$ から $N_*(X)$ への complex-linear isometry である。[7] の Corollary 2.3 を $\widetilde{T}$ に適用すると、同様にこの T の形が決定される。

・**系 3-2 の証明の概略**

まず $T(2)=2$ であることを示す。$r=\frac{1}{2}$ として、Γ における正測度の集合において $|T(r)|>r$ であると仮定する。このとき正測度の部分集合 E と $\varepsilon>0$ が存在して、E 上 $|T(r)|\geq(1+\varepsilon)r$ である。$\lim_{n\to\infty}\frac{\log(1+(1+\varepsilon)^n r^n)}{\log(1+r^n)}=\infty$ なので、

$$\int_E \log(1+(1+\varepsilon)^{n_0}r^{n_0})d\sigma > \int \log(1+r^{n_0})d\sigma$$

となる自然数 n_0 が存在する。よって

$$\int \log(1+r^{n_0})d\sigma = \int \log(1+|T(r)|^{n_0})d\sigma \geq \int_E \log(1+(1+\varepsilon)^{n_0}r^{n_0})d\sigma > \int \log(1+r^{n_0})d\sigma$$

となり、矛盾が生じる。また $1=T(r)T(\frac{1}{r})$ なので $T(\frac{1}{r})\geq 1$ である。一方

$$\log(1+\frac{1}{r}) = \int \log(1+\frac{1}{r})d\sigma = \int \log(1+|T(\frac{1}{r})|)d\sigma$$

なので、 $|T(\frac{1}{r})|=\frac{1}{r}$ を得る．よって $0<r<1$ のとき $|T(r)|=r$ である。また $\log(1+(1-r))=d(r,1)=d(T(r),1)$ で、$d(T(r),1)=\int\log(1+|1-T(r)|)d\sigma$ であることから $0<r<1$ のとき $T(r)=r$ となる。ここで T が multiplicative であることから、 $T(2)T(\frac{1}{2})=1$ より $T(2)=2$ であることがわかる。よって T は $T(2f)=2T(f)$ を満たす surjective isometry である。 したがって定理 3-1 から

$$T(f)=\alpha f\circ\Phi, \quad f\in N_*(X),$$

または

$$T(f)=\alpha\overline{f(\overline{\Phi})}, \quad f\in N_*(X),$$

が、ある複素数 α と holomorphic automorphism Φ に対して成立する。T が multiplicative であることから $T(1)=1$ なので、 $\alpha=1$ となって証明される。

参考文献

[1] A.J.Ellis, *Real characterizations of function algebras amongst function spaces*, Bull. London Math. Soc., **22** (1990), 381–385

[2] F. Forelli, *The isometries of H^p*, Can. J. Math., **16** (1964), 721–728

[3] O.Hatori and Y.Iida, *Non-linear isometries on the Smirnov class*, preprint

[4] Y.Iida and N.Mochizuki, *Isometries of some F-algebras of holomorphic functions*, Arch. Math., **71**(1998), 297–300

[5] S.Mazur and S.Ulam, *Sur les transformationes isométriques d'espaces vectoriels normés*, C. R. Acad. Sci, Paris, **194** (1932), 946–948

[6] T.M.Rassias, *Properties of isometric mappings*, J. Math. Anal. Appl., **235** (1999), 108–121

[7] K. Stephenson, *Isometries of the Nevanlinna class*, Indiana Univ. Math. J., **26** (1977), 307–324

[8] J.Väisälä, *A proof of the Mazur-Ulam theorem*, Amer. Math. Monthly, **110**(7) (2003), 633–635

シーロフ境界再考

東京都立大学　　富山　淳 (Jun Tomiyama)

シーロフ境界の定義は現在では可換なバナッハ環についての境界にまで拡張されているが本稿では単位元を持つ任意のバナッハ環 (非可換でも良い) にまで拡張し、更に我々の捉えた簡明なその定義により現在知られているシーロフ境界に関する存在も含めた幾つかの基本の結果の証明を大幅に簡略化出来ることを示す。しかしここでの議論はあくまで出発点であり拡張されたシーロフ境界の意味を探ることは今後の大きな課題として残っている。

X をコンパクト空間とし $C(X)$ をその上の連続関数環とする。このとき $C(X)$ の中の関数のシステム A についてシーロフ境界 $\partial(A)$ が定義できるのは A が X の各点を分離でき、定数関数を含む線形部分空間で十分なことは Choquet の定理以来基本的に知られていた。しかしこのことを使った従来の議論は (存在の証明を含めて) representing measure など多くの余分な要素を含み現在でも、以後の引用に見られるように、あまり良く理解されてはいない。その上当初からの問題意識として A は関数環であることが要求され、その定義の拡張としては可換バナッハ環の character space 上への表現が考えられたものと考えられる。

ここでは上記の点を忠実に踏まえ上の A の仮定の下でシーロフ境界の存在を representing measure の問題に言及せずに簡明に証明することを出発点とする。まず A の共役空間 $A^\star$ の中の部分集合、state space $S(A)$ を

$$S(A) = \{\varphi \in A^\star | \varphi(1) = 1 = \|\varphi\|\}.$$

と定義する。State は通常はバナッハ*-環上のノルムが 1 の positive linear functional の名称として使われているが、ここでは A は自己共役性などという条件は求めてはいなく、ときには A 内の実数値関数が定数だけになることもある事に注意しておく。しかし定義により $S(A)$ は $A^\star$ の単位球内の weak *-compact な convex set である。従って Krein-Milman の定理から $S(A)$ には十分沢山の端点が存在することが分るが、state の用語と同じくこれ等を pure state と呼びその全体を $P(A)$ と書く。ここでの議論に必要なのは次の良く知られた結果である。X の点 x における point evaluation を μ_x と書く。

定理. $P(C(X))$ は $C(X)$ の character の集合と一致し、それは $C(X)$ の point evaluation の集合である。

Key Lemma. A を $C(X)$ 内の定数関数を含む線形部分空間とする。このとき A 上の pure state φ は $C(X)$ 上の pure state に拡大出来る。よって X の点 x が存在して、$\varphi = \mu_x|A$. ここで A が X の点を分離するときはこの x は一意である。

証明の要点. φ のノルムを保存した $C(X)$ 上への拡大の全体を $F(\varphi)$ とおくと、これは weak *-compact convex な集合である。よってこれには端点が存在するが、この端点が実は $S(C(X))$ の端点になっていることが証明できる。よって上の定理から求める結果が得られる。A が各点を分離するときは明らかにこの点 x は一意である。 □

A について上の pure states に対応する X の点の集合の closure を $\partial(A)$ と書く。この Lemma から次のシーロフ境界の存在の簡単な証明が得られる。

命題. A を $C(X)$ の定数関数を含み各点を分離する部分線形空間とする。このとき $\partial(A)$ は A のシーロフ境界、つまり最小の閉境界である。

証明. 先ず $S(A)$ は A の point evaluation 全体を含み更に $S(A)$ は $P(A)$ の weak*-convex hull になっているので $\partial(A)$ は A の閉境界である。そこで D を A の閉境界の一つとすると境界の定義から A はその D への制限 $A|D$ と等距離同型になっている。よってその共役空間も同型でありそれらの pure state spaces は互いに homeomorphic である。そこで対応する A と $A|D$ の pure states φ, $\hat{\varphi}$ を考えると Key Lemma より $\partial(A)$ と D の点 x, y が存在して、任意の A の関数 f について

$$f(x) = \varphi(f) = \hat{\varphi}(f|D) = f(y).$$

ここで A は X の点を分離するから $x = y$ 即ち x は D に属しそれらの点の closure として $\partial(A)$ は D に含まれる。すなわちこれは最小の閉境界である。 $\square$

上のことを基にして任意の単位元をもつバナッハ環にシーロフ境界を定義することを考える。以下の議論では A は常にこのような (可換とは限らない) バナッハ環である。K を $S(A)$ の weak *-コンパクト部分集合とする。このとき A を K 上の関数と見ると A より $C(K)$ の中への contractive linear representation π_K が得られ、定義から明らかにその像 $\pi_K(A)$ はこれまでの議論の関数のシステムの条件を満たしている。

定義. $\pi_K(A)$ のシーロフ境界を A の K についてのシーロフ境界と呼び、$\partial_K(A)$ と書く。

A が可換のときの今までのシーロフ境界は上の定義の K をその character space $\Delta(A)$ と取ったときである。この定義によれば与えられたバナッハ環 A には K の大きさにより色々な大きさのシーロフ境界が考えられることになるが先ず問題になるのは A の構造を解析するにはどの位 K が大きければ良いかということである。例えば K として 1 点のみも取れるわけであるがこれでは A の解析には意味を持たない。更に構造の解析と言ってもどのような構造に主点を置くかによって K の持つ意味も異なってくる。例えば A を可換としたとき $\Delta(A)$ は一般には必ずしも $S(A)$ とは一致しないのでその際のシーロフ境界の意味は A の radical ideal を超えての構造の解析に寄与するのみである。したがってこの時にも直結する問題として K を $S(A)$ に取ったらその意味はどうなるかなど... の問題が考えられるが、著者の目下の研究状況では他の研究課題との関係でこれから先の問題は全て今後の事として考えるしかないので、ここでは上の議論の応用として良く知られた次の定理 (例えば最近の E. Kaniuth の本、Springer 2008 参照) に既知の長い古典的な複雑な証明の代わりに簡明な証明を示しておく。簡単のために以下可換バナッハ環 A についての通常のシーロフ境界を $\partial(A)$ と書く。

定理. A に対して B をこれを含み同じ単位元をもつ可換バナッハ環 (即ち A の拡大) とする。このとき $\partial(A)$ の各点は (character として) $\partial(B)$ の点に拡大出来る。

証明. Γ_A, Γ_B をそれぞれ A, B の Gelfand 表現とする。このとき

$$\|\Gamma_A(a)\| = r_A(a) = r_B(a) = \|\Gamma_B(a)\|$$

となるので $\Gamma_A(A)$ は $\Gamma_B(A)$ と isometric isomorphic である。従ってそれらの上の state の空間及び pure state の空間は互いに homeomorphic なので Key Lemma により A の pure states に対応する点が $\partial(B)$ に拡大出来る。更に $\partial(A)$ の点は A の pure states に対応する点の集合の $\Delta(A)$ での closure に属するが、上記の拡大がこれ等の点にまで可能なことは $\Delta(B)$ のコンパクト性より容易に確かめられる。 $\square$

コンパクトな空間 X 上の周知の Stone-Weierstrass の定理はここでの問題の視点で考えるとそれはシーロフ境界の点の分離の問題と捉えることが出来る。$C(X)$ の場合はその pure states の空間自体がコンパクトで $\partial(C(X)) = X$ であるからである。そして $C^\star$ 環の理論ではこの問題の非可換版として 1950 年代から次の問題が探求されていた。それは単位元を持つ場合に限定すると、

> 非可換 Stone-Weierstrass 問題：
> A を $C^\star$-環、B をそれを含む $C^\star$-環 (単位元は同じ) とするときもし A が B の pure states を分離すれば $A = B$ と言えるか？

この問題は特別な類の $C^\star$-環の場合に議論されある程度の肯定的な結果は得られてはいるが全体的には殆ど様子が分かってはいない。そして現在では誰もが問題の追及を諦めている (？) ような状況にある。しかし既に 60 年代に J. Glimm (Ann. of Math., vol. 72, 1960, 217-244) は R.V. Kadison の示唆のもとに plausible な Non-commutative Stone-Weierstrass Theorem は次の形である事を考えそれを長大な議論の末証明した。

定理. $C^\star$-環 A, B が上と同じ状況のとき、もし A が B の pure states の集合の weak *-closure を分離出来るならば $A = B$ である。

この結果は我々の言葉で言えば、A が B の $K = \text{closure}\, P(B)$ のときのシーロフ境界を分離出来れば B と一致するという結果にほかならず、非可換のバナッハ環の場合のシーロフ境界の意味が例え $C^\star$-環のような非常に取り扱いやすいバナッハ*-環の場合でも難しいことを示している。

最後にこれまでの議論はすべて単位元をもつバナッハ環に限定していたが、単位元を持たない場合の議論は可換の場合ほど単純には行かないことを注意しておく。それは involution のある環の場合とは異なって単位元を持たない一般のバナッハ環の場合には reasonable な state の定義をどのようにすれば良いかという問題が絡んでくるからである。これは単純に単位元を付加するだけではすまされない。今の所考えられる最良の場合は A が contractive な近似単位元を持つ場合である。

これからの沢山の問題について今後のこの方面の議論の発展が望まれる。

L^2 空間上のスラント Toeplitz 作用素のスペクトル

信州大学総合工学系研究科　　倉橋　宏至 (Hiroshi Kurahashi)

単位円上の L^2 空間におけるスラント Toeplitz 作用素 U_φ は, M.C. Ho や S.C. Arora and R. Batra, 武村吉光氏によって幅広く研究されている ([1]〜[7]). ここでは, $\varphi = z^m + c$ のときについて, U_φ のスペクトルの形はどうなるかを調べてみた.

1　スペクトルの定義

X を Hilbert 空間とし, T を X 上の有界線形作用素とする. このとき, T の**スペクトル** $\sigma(T)$, **スペクトル半径** $r(T)$ は,

$$\sigma(T) = \big\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ が可逆でない}\big\}$$
$$r(T) = \sup\big\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\big\}$$

と定義される. ここで, I は X 上の恒等作用素である. スペクトル $\sigma(T)$ は, つねに $\mathbb{C}$ の有界閉集合になる. また, $\sigma(T)$ の部分集合に, 次のようなものがある.

①点スペクトル　:　$\sigma_p(T) = \big\{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(\lambda I - T) \neq \{0\}\big\}$

②連続スペクトル　:　$\sigma_c(T) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \begin{array}{l} \ker(\lambda I - T) = \{0\} \text{ かつ} \\ \operatorname{ran}(\lambda I - T) \neq X, \overline{\operatorname{ran}(\lambda I - T)} = X \end{array}\right\}$

③剰余スペクトル　:　$\sigma_r(T) = \big\{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(\lambda I - T) = \{0\} \text{ かつ } \overline{\operatorname{ran}(\lambda I - T)} \neq X\big\}$

④近似点スペクトル　:　$\sigma_{ap}(T) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : {}^{\exists}\{x_n\} \subset X \text{ s.t.} \left\{\begin{array}{l} \|x_n\| = 1 \\ \|(\lambda I - T)x_n\| \to 0 \end{array}\right.\right\}$

⑤本質スペクトル　:　$\sigma_e(T) = \big\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ が Fredholm 作用素でない}\big\}$

ここで, $\ker(\lambda I - T), \operatorname{ran}(\lambda I - T)$ は, それぞれ, 作用素 $\lambda I - T$ の核, 値域を表す. $\overline{\operatorname{ran}(\lambda I - T)}$ は $\operatorname{ran}(\lambda I - T)$ の閉包である. また, $\lambda I - T$ が Fredholm 作用素であるとは, $\operatorname{ran}(\lambda I - T)$ が閉集合で, その余次元と $\ker(\lambda I - T)$ の次元がともに有限になることである. 明らかに, $\sigma(T)$ は $\sigma_p(T), \sigma_c(T), \sigma_r(T)$ に分割される. また, $\sigma_{ap}(T), \sigma_e(T)$ は有界閉集合で, $\sigma_p(T) \subset \sigma_{ap}(T) \subset \sigma(T)$, $\sigma_e(T) \subset \sigma(T)$ が成り立つ.

2　スラント Toeplitz 作用素

$\mathbb{T}$ を $\mathbb{C}$ の単位円とし, μ を $\mathbb{T}$ 上の正規化された 1 次元 Lebesgue 測度とする. μ に関して 2 乗可積分な複素数値関数全体からなる Hilbert 空間を $L^2(\mathbb{T})$ で表す. 各整数 n に対して, $\mathbb{T}$ 上の関数 z^n を, $z^n(\zeta) = \zeta^n \quad (\zeta \in \mathbb{T})$ と定めると, $\{z^n : n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$ は $L^2(\mathbb{T})$ 上の完全正規直交系になる. 次に, μ に関して本質的有界な複素数値関数全体の Banach 環を $L^\infty(\mathbb{T})$ で表す.

いま, $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ を固定する. $L^2(\mathbb{T})$ 上の**乗法作用素** M_φ は,

$$M_\varphi f = \varphi f \qquad (f \in L^2(\mathbb{T}))$$

と定義される. M_φ は $L^2(\mathbb{T})$ 上の有界線形作用素である. 次に, $k = 2, 3, \cdots$ とし, W_k を,

$$W_k z^n = \begin{cases} z^{\frac{n}{k}} & (n \text{ が } k \text{ の倍数のとき }) \\ 0 & (n \text{ が } k \text{ の倍数でないとき }) \end{cases}$$

によって定められる $L^2(\mathbb{T})$ 上の有界線形作用素とする.

$L^2(\mathbb{T})$ 上の k 次**スラント Toeplitz 作用素** U_φ は, 上の 2 つの作用素 M_φ, W_k を用いて,

$$U_\varphi = W_k M_\varphi$$

と定義する. ここで, $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T})$ だから, $\varphi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ と表せる. このとき, U_φ の表現行列は,

$$\begin{pmatrix} & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & a_k & \cdots & a_{-2k+1} & a_{-2k} & a_{-2k-1} & \cdots & a_{-3k} & \cdots \\ \cdots & a_0 & \cdots & a_{-k+1} & a_{-k} & a_{-k-1} & \cdots & a_{-2k} & \cdots \\ \cdots & a_k & \cdots & a_1 & a_0 & a_{-1} & \cdots & a_{-k} & \cdots \\ \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{k+1} & a_k & a_{k-1} & \cdots & a_0 & \cdots \\ \cdots & a_{3k} & \cdots & a_{2k+1} & a_{2k} & a_{2k-1} & \cdots & a_k & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}$$

となる. この行列は, 成分が斜めに傾いているので, U_φ を <u>スラント</u>Toeplitz 作用素と呼ぶようである. 以上の議論で, $k = 1$ の場合を考えると, $U_\varphi = M_\varphi$ となる. このときは, $k = 2, 3, \cdots$ のときと比べて, 様子が異なる. そのため, ここでは $k = 1$ の場合を除外し, $k = 2, 3, \cdots$ としている.

3　知られた結果

$L^2(\mathbb{T})$ 上のスラント Toeplitz 作用素 U_φ について, $k = 2$ の場合については Ho が, 一般の k については Arora and Batra が, いろいろな性質を調べている ([1]〜[6]). そこでは, スペクトル半径 $r(U_\varphi)$ の値を求める公式が, 次のように分かっている.

定理 A　$\psi_n = \overbrace{W_k(\cdots W_k(W_k}^{n}\underbrace{(|\varphi|^2)|\varphi|^2)\cdots|\varphi|^2)}_{n}$ とおくと, $r(U_\varphi) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\|\psi_n\|_\infty}$

U_φ のスペクトルに関しては, Ho や Arora and Batra の結果をもとに, 武村氏は次の 2 つの定理を証明した ([7]).

定理 B $|\varphi| = 1$ a.e. のとき,

$$\begin{aligned}\sigma(U_\varphi) = \sigma_e(U_\varphi) = \sigma_{ap}(U_\varphi) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\} \\ \sigma_p(U_\varphi) &\supset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}\end{aligned}$$

である. また, $|\lambda| < 1$ のとき, $\ker(\lambda I - U_\varphi)$ は無限次元である.

定理 C $\varphi = z^m$ (m : 整数) とする.

(i) m が $k-1$ の倍数でない場合

$$\begin{aligned}\sigma_p(U_\varphi) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\} \\ \sigma_c(U_\varphi) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\} \\ \sigma_r(U_\varphi) &= \emptyset\end{aligned}$$

(ii) m が $k-1$ の倍数の場合

$$\begin{aligned}\sigma_p(U_\varphi) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\} \cup \{1\} \\ \sigma_c(U_\varphi) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\} \setminus \{1\} \\ \sigma_r(U_\varphi) &= \emptyset\end{aligned}$$

一般の $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ に対して, $\sigma(U_\varphi)$ の形は分かっていないようである. これについて Ho は, "$\sigma(U_\varphi) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq r(U_\varphi)\}$ となるのでは?" と予想しており, 上にあげた定理はその結果を支持している.

さて, 上の定理 B, C は, $|\varphi| = 1$ a.e. の場合を扱っている. そこで, $|\varphi| = 1$ a.e. でない場合について, 具体例を挙げて考えることにした.

4 得られた結果

ここでは, $\varphi = z^m + c$ という関数を取り上げた. この関数でも, Ho の予想は成り立つことが分かった.

定理 $\varphi = z^m + c$ (m : 0 でない整数, $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$) のとき,

$$\begin{aligned}\sigma(U_\varphi) = \sigma_e(U_\varphi) = \sigma_{ap}(U_\varphi) &= \left\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \sqrt{1 + |c|^2}\right\} \\ \sigma_p(U_\varphi) &= \left\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < \sqrt{1 + |c|^2}\right\} \\ \sigma_c(U_\varphi) &= \left\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = \sqrt{1 + |c|^2}\right\} \\ \sigma_r(U_\varphi) &= \emptyset\end{aligned}$$

参考文献

[1] S. C. Arora and R. Batra, *On generalized slant Toeplitz operators with continuous symbols*, Yokohama Math. J., **51** (2004), 1–9.

[2] S. C. Arora and R. Batra, *Spectra of generalized slant Toeplitz operators*, Analysis and Applications, Allied Publ, New Delhi, 2004, 43–56.

[3] R. Batra, *Generalized slant Toeplitz operators*, Thesis. Univ. of Delhi. 2004.

[4] M. C. Ho, *Adjoints of slant Toeplitz operators*, Integral Equations Operator Theory, **29** (1997), 301–312.

[5] M. C. Ho, *Properties of slant Toeplitz operators*, Indiana Univ. Math. J., **45** (1996), 843–862.

[6] M. C. Ho, *Spectra of slant Toeplitz operators with continuous symbols*, Michigan Math. J., **44** (1997), 157–166.

[7] 武村 吉光, L^2 空間上のスラント Toeplitz 作用素のスペクトル, 修士論文 (信州大), 2007.

荷重合成作用素の形をとらない等長作用素の例

信州大学大学院総合工学系研究科　古清水 大直 (Hironao Koshimizu)

様々な関数空間において等長作用素の研究がなされている．ここでは, 全射の等長作用素が荷重合成作用素の形をとらない空間の例をあげる．さらに, 有限余次元等長作用素やシフト作用素についても調べる．

1　いくつかの等長作用素の定義

$\mathcal{B}$ を Banach 空間とし, T を $\mathcal{B}$ 上の有界線形作用素とする．T が $\mathcal{B}$ 上の**等長作用素** (isometry) であるとは,

(i)　$\|Tf\| = \|f\| \qquad (f \in \mathcal{B})$

が成り立つときをいう．また, T が (i) と次の条件 (ii) を満たすときは, $\mathcal{B}$ 上の**有限余次元等長作用素** (finite codimensional linear isometry) という．

(ii) T の値域の余次元が有限次元である．

ここで, 「有限次元」とは, 0 次元も含めることにする．したがって, 0 次元の場合は全射の等長作用素ということになる．有限余次元等長作用素の研究には, [17, 8, 14, 10] などがある．

また, 有限余次元等長作用素の 1 つで興味深い作用素として, シフト作用素と呼ばれるものがある．これは, 次のように定義される．T が (i) と次の条件 (ii)$'$, (iii) を満たすとき, T を $\mathcal{B}$ 上の (**前進**または**前方**) **シフト作用素** (forward shift operator または isometric shift) という．

(ii)$'$　T の値域の余次元が 1 である．

(iii)　$\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} T^n(\mathcal{B}) = \{0\}$ である．

これは, 1972 年に Crownover が $\ell^2(\mathbb{N})$ 上のシフト作用素の性質に着目し, Banach 空間上で定義したものである ([4])．以後のシフト作用素の研究に, 論文 [11, 9, 6, 18, 20, 1, 19] がある．

2　荷重合成作用素

X をコンパクト Hausdorff 空間とし, X 上の連続関数全体の集合を $C(X)$ とかく．$C(X)$ は, X の各点での和・スカラー積とノルム

$$\|f\|_\infty = \sup\bigl\{|f(x)| : x \in X\bigr\} \qquad (f \in C(X))$$

に関して, Banach 空間になる．$C(X)$ 上の全射の等長作用素は, 次のように特徴づけられる ([5])．

定理 A. (Banach-Stone の定理)
$C(X)$ 上の全射の等長作用素 T は, $|w(x)| = 1$ $(x \in X)$ となる $w \in C(X)$ と, X から X の上への同相写像 φ を用いて,

$$(Tf)(x) = w(x)f(\varphi(x)) \qquad (x \in X, f \in C(X))$$

と表せる.

この形の作用素を荷重合成作用素という. とくに, $w = 1$ の場合には, 合成作用素という. 他に, 全射の等長作用素が荷重合成作用素の形をとる例として, $1 \leq p < \infty, p \neq 2$ のときの L^p-空間, Hardy 空間 $H^p(\mathbb{D})$, Bergman 空間 $L^p_a(\mathbb{D})$ があることが知られている ([7]).

ここでは, 全射の等長作用素が荷重合成作用素の形をとらない空間の例を与える.

3 $C^1[0,1]$

閉区間 $[0,1]$ 上の連続微分可能関数全体の集合を $C^1[0,1]$ とかく. $C^1[0,1]$ は, $[0,1]$ の各点での和・スカラー積に関して, 線形空間になる. 線形空間 $C^1[0,1]$ にはノルムがたくさん考えられるが, まず, 次の 3 つのノルムを取り上げる.

$$\begin{aligned} \|f\|_C &= \max\{|f(x)| + |f'(x)| : x \in [0,1]\} \\ \|f\|_\Sigma &= \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \qquad\qquad (f \in C^1[0,1]) \\ \|f\|_M &= \max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\} \end{aligned}$$

(ただし, f' は f の導関数である.) これらのノルムは互いに同値であり, $C^1[0,1]$ はそれぞれのノルムに関して Banach 空間になる. それぞれのノルムによって定義された $C^1[0,1]$ において, 全射の等長作用素が荷重合成作用素の形になることが知られている ([3, 16, 13]).

ここで, 次の 2 つのノルムについて考える.

$$\begin{aligned} \|f\|_\sigma &= |f(0)| + \|f'\|_\infty \\ \|f\|_m &= \max\{|f(0)|, \|f'\|_\infty\} \end{aligned} \qquad (f \in C^1[0,1])$$

これらのノルムは, 最初に述べたノルムと同値である. しかし, 全射の等長作用素は荷重合成作用素の形をとらない. 実際, $C^1[0,1]$ がどちらのノルムをもつとしても, 全射の等長作用素は次のように特徴づけられることがわかった.

定理 1. $(C^1[0,1], \|\cdot\|_\sigma)$ または $(C^1[0,1], \|\cdot\|_m)$ 上の全射の等長作用素 T は, $|\lambda| = 1$ となる定数 λ, $|w(x)| = 1$ $(x \in [0,1])$ となる $w \in C[0,1]$ と, $[0,1]$ から $[0,1]$ の上への同相写像 φ を用いて,

$$(Tf)(x) = \lambda f(0) + \int_0^x w(t)f'(\varphi(t))dt \qquad (x \in [0,1], f \in C^1[0,1])$$

と表せる.

例えば, $\lambda=1, w=1, \varphi(t)=t^2$ $(t \in [0,1])$ とおけば, T が荷重合成作用素の形をとらないことがわかる. また, $[0,1]$ 上の Lipschitz 連続関数全体や絶対連続関数全体の空間において, $\|\cdot\|_\sigma, \|\cdot\|_m$ と同じようなノルムで, 全射の等長作用素は荷重合成作用素の形をとらないこともわかる.

さらに, $(C^1[0,1], \|\cdot\|_m)$ において, 次の結果を得た ([15]).

定理 2. $(C^1[0,1], \|\cdot\|_m)$ 上の有限余次元等長作用素は全射になる.
とくに, $(C^1[0,1], \|\cdot\|_m)$ 上のシフト作用素は存在しない.

4 Wiener 環

$\mathbb{T}$ を複素数平面の単位円周とする. フーリエ級数が絶対収束するような $\mathbb{T}$ 上の連続関数全体を W とかく. W は, $\mathbb{T}$ の各点での和・スカラー積と, たたみこみの積に関して, 多元環になる. また, ノルムを

$$\|f\|_W = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)| \quad (f \in W)$$

で定めると, W は単位元をもつ半単純可換 Banach 環になる (ただし, $\widehat{f}(n)$ は f の第 n フーリエ係数である.). これを Wiener 環という. W 上の全射の等長作用素は, 次のように特徴づけられることがわかった.

定理 3. W 上の全射の等長作用素 T は, $|w(n)|=1$ $(n \in \mathbb{Z})$ となる $\mathbb{Z}$ 上の関数 w と, $\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Z}$ の上への全単射 φ を用いて,

$$(Tf)(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w(n)\widehat{f}(\varphi(n))z^n \qquad (z \in \mathbb{T}, f \in W)$$

と表せる.

これより, 全射の等長作用素が荷重合成作用素の形をとらないことがわかる. 例えば, $w=1, \varphi(n)=n$ $(n \neq 0,1,2), \varphi(0)=1, \varphi(1)=2, \varphi(2)=0$ とおけば, T が荷重合成作用素の形をとらない.

定理 3 の証明は, W と $\ell^1(\mathbb{Z})$ が Banach 空間として同型だから, $\ell^1(\mathbb{Z})$ 上で考えればよい. 一般に, $\ell^p(\mathbb{Z})(1 \leq p < \infty, p \neq 2)$ 上の全射の等長作用素は, 次のように特徴づけされている ([2]).

定理 B. $\ell^p(\mathbb{Z})$ 上の全射の等長作用素 T は, $|w(n)|=1$ $(n \in \mathbb{Z})$ となる $\mathbb{Z}$ 上の関数 w と, $\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Z}$ の上への全単射 φ を用いて,

$$(Tf)(n) = w(n)f(\varphi(n)) \qquad (n \in \mathbb{Z}, f \in \ell^p(\mathbb{Z}))$$

と表せる.

定理 B から直ちに定理 3 が証明できる.

また, $\ell^p(\mathbb{Z})(1 \leq p < \infty, p \neq 2)$ 上のシフト作用素は, 次のように特徴づけられることがわかった.

定理 4. $\ell^p(\mathbb{Z})$ 上のシフト作用素 T は, 次の (i) または (ii) のどちらかになる.

(i) ある $n_0 \in \mathbb{Z}$ と, $\cup_{k=0}^{\infty}\varphi^{-k}(n_0) = \mathbb{Z}$ となる $\mathbb{Z} \setminus \{n_0\}$ から $\mathbb{Z}$ の上への全単射 φ と, $|w(n)| = 1$ $(n \neq n_0)$ となる $\mathbb{Z} \setminus \{n_0\}$ 上の関数 w を用いて,

$$(Tf)(n) = \begin{cases} w(n)f(\varphi(n)) & (n \neq n_0) \\ 0 & (n = n_0) \end{cases} \qquad (f \in \ell^p(\mathbb{Z}))$$

と表せる.

(ii) $\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Z}$ の上への全射 φ と, $m := \varphi(i) = \varphi(j)$ かつ $\cup_{k=1}^{\infty}\varphi^{-k}(\{m\}) = \mathbb{Z}$ となる $i, j \in \mathbb{Z}$ $(i \neq j)$ と, $|w(i)|^p + |w(j)|^p = 1$ $(w(i), w(j) \neq 0)$ かつ $|w(n)| = 1$ $(n \neq i, j)$ となる $\mathbb{Z}$ 上の関数 w を用いて,

$$(Tf)(n) = w(n)f(\varphi(n)) \qquad (n \in \mathbb{Z}, f \in \ell^p(\mathbb{Z}))$$

と表せる.

これより, W 上のシフト作用素も特徴づけできる.

$(C^1[0,1], \|\cdot\|_m)$ と W は, どちらも全射の等長作用素が荷重合成作用素の形にならない空間である. しかし, $(C^1[0,1], \|\cdot\|_m)$ 上のシフト作用素は存在しないが, W 上のシフト作用素は存在する.

さて, Jarosz は単位元をもつ半単純可換 Banach 環において, 次のことを示している ([12]).

定理 C. $(A, \|\cdot\|_A)$ を単位元 e をもつ半単純可換 Banach 環とする. このとき,

$Te = e$ となる $(A, \|\cdot\|)$ 上の全射の等長作用素 T は合成作用素の形をとる　　$(*)$

となるような $\|\cdot\|_A$ と同値な A 上のノルム $\|\cdot\|$ が存在する.

$(C^1[0,1], \|\cdot\|_\Sigma)$ は単位元をもつ半単純可換 Banach 環である. $(C^1[0,1], \|\cdot\|_\Sigma)$ 上の全射の等長作用素が荷重合成作用素の形をとるので, この $\|\cdot\|_\Sigma$ で条件 $(*)$ を満たすことがわかる. しかし, $(W, \|\cdot\|_W)$ 上の全射の等長作用素は荷重合成作用素の形をとらなかった. $(W, \|\cdot\|_W)$ は単位元をもつ半単純可換 Banach 環であるから, 定理 C を適用することができる. そこで, 定理 C の証明によると, 次のノルムが条件 $(*)$ を満たすノルムの 1 つであることがわかる.

$$\|f\| = \max\{\|f\|_\infty, \|f - f(1)\|_W\} \quad (f \in W)$$

問題として,

$Te = e$ を仮定しない $(W, \|\cdot\|)$ 上の全射の等長作用素 T が荷重合成作用素の形をとるか?
また, この $(W, \|\cdot\|)$ においてシフト作用素が存在するか?

などが残る.

参考文献

[1] J. Araujo, *On the separability problem for isometric shifts on $C(X)$*, J. Funct. Anal., **256** (2009), 1106–1117.

[2] S. Banach, *Theorie des operations lineares*, Chelsea, Warsaw, 1932.

[3] M. Cambern, *Isometries of certain Banach algebras*, Studia Math., **25** (1965), 217–225.

[4] R.M. Crownover, *Commutants of shifts on Banach spaces*, Michigan Math. J., **19** (1972), 233–247.

[5] N. Dunford and J.T. Schwartz, *Linear operators*, Part I, New York, 1958.

[6] F.O. Farid and K. Varadarajan, *Isometric shift operators on $C(X)$*, Canad. J. Math., **46** (1994), 532–543.

[7] R.J. Fleming and J.E. Jamison, *Isometries on Banach spaces : function spaces*, Chapman & Hall/CRC Monographs and Surveys in pure and Applied Mathematics, 2003.

[8] J.J. Font, *Isometries on function algebras with finite codimensional range*, Manuscripta Math, **100** (1999), 13–21.

[9] A. Gutek, D. Hart, J. Jamison and M. Rajagopalan, *Shift operators on Banach spaces*, J. Funct.Anal., **101** (1991), 97–119.

[10] O. Hatori and K. Kasuga, *Linear isometries of finite codimensions on Banach algebras of holomorphic functions*, Banach J. Math. Anal., **3** (2009), 109–124.

[11] J.R. Holub, *On shift operators*, Canad. Math. Bull., **31** (1988), 85–94.

[12] K. Jarosz, *Isometries in semisimple commutative Banach algebras*, Proc. Amer. Math. Soc., **94** (1985), 65–71.

[13] K. Jarosz and V.D. Pathak, *Isometries between function spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **305** (1988), 193–206.

[14] A. Jiménez-Vargas and M. Villegas-Vallecillos, *Into linear isometries between spaces of Lipschitz functions*, Houston J. Math., **34** (2008), 1165–1184.

[15] H. Koshimizu, *Finite codimensional linear isometries on spaces of differentiable and Lipschitz functions*, Cent. Eur. J. Math., **9** (2011), 139–146.

[16] N.V. Rao and A.K. Roy, *Linear isometries of some function spaces*, Pacific J. Math., **35** (1971), 177–192.

[17] S. Takahasi and T. Okayasu, *A note on finite codimensional linear isometries of $C(X)$ into $C(Y)$*, Internat. J. Math. Math. Sci, **18** (1995), 677–680.

[18] T. Takayama and J. Wada, *Isometric shift operators on the disc algebra*, Tokyo J. Math., **21** (1998), 115–120.

[19] 古清水 大直, $C^1[0,1]$ 上のシフト作用素, 信州大学修士論文, 2009.

[20] 新家 洋輔, Banach 空間上のシフト作用素, 信州大学修士論文, 2008.

位相推移的力学系に付随する荷重合成作用素

筑波大学数理物質科学研究科数学専攻
川村一宏 (Kazuhiro Kawamura)

X をコンパクト距離空間，X 上の全射連続写像 $T: X \to X$ を位相力学系と呼ぶ．”位相力学系 ”という名称は，T の反復合成による軌道の漸近挙動を問題とすることに由来する． $C(X)$ を X 上の複素数値連続関数全体に sup ノルムを入れた Banach 空間，$w: X \to \mathbb{C}$ を連続関数とする．このとき w を荷重とする荷重合成作用素 $U_{T,w}: C(X) \to C(X)$ が次の式で定義される：

$$(U_{T.w}f)(x) = w(x) \cdot f(T(x)), \quad f \in C(X), \ x \in X \tag{1}$$

特に荷重 w が定値関数 1 であるとき，$U_{T,1}$ を U_T と略記する．本稿では T の位相力学系的性質と荷重合成作用素 $U_{T,w}$ の性質，特に $U_{T,w}$ の固有値との関係について考察する．

測度論的力学系の研究においては，この種の研究の歴史は古い．確率測度空間 (X,μ) 上の保測変換 $T: X \to X$ のエルゴード理論的性質と $L^2(X,\mu)$ 上に誘導する合成作用素 $U_T: L^2(X,\mu) \to L^2(X,\mu)$ のユニタリ作用素としての性質との関係について多くのことが調べられている．残念ながら私の素養不足のため，ここでその詳細を述べることができない（ごく基本的な事実については [5] 参照）．本稿における考察は，これらの古典的研究の位相的類似と見なすことができる．

位相力学系理論における基本問題の一つは，力学系を位相共役のもとで分類することである．位相力学系 $S: X \to X$ と $T: Y \to Y$ が位相共役であるとは，位相同型写像 $h: X \to Y$ が $T \circ h = h \circ S$ を満たすように取れることである．以下の命題によって，位相共役による分類は合成作用素の等長変換による分類と等価である．

命題 1. 位相力学系 $S: X \to X$ と $T: Y \to Y$ が位相共役であるための必要十分条件は，等長線形同型写像 $W: C(Y) \to C(X)$ が存在して，$U_S \circ W = W \circ U_T$ を満たすことである．

証明は Banach-Stone の定理を用いて直ちに得られる．ただし Banach-Stone の定理を思い起こせば，合成作用素の等長線形同型による共役性から位相共役性を導くことはほぼ絶望的であることが見て取れる．その意味で命題 1 は位相共役性と合成作用素の等長線形共役性の同値性を示す概念的な命題に過ぎず，実用的なものではない．

次に荷重関数 w に課されるべき条件について考察する．力学系 $T: X \to T$ の振舞いと作用素 $U_{T,w}$ の関係について考察することを念頭に置けば，w の値が 0 を取る様な点は，力学系 T における特徴的な点であることが望ましい．そのような特徴的な点として代表的なものは周期点或いは不動点であろう．一方双曲型力学系においては周期点が稠密であることがしばしば起こる．このことを考えれば任意の $x \in X$ に対して

$$w(x) \neq 0 \tag{2}$$

と仮定してもよいであろう．この仮定の下で (1) を次のように書き直す:

$$(U_{T,w}f)(x) = |w(x)| \cdot (w(x)/|w(x)|) \cdot f(T(x)), \quad f \in C(X),\ x \in X \tag{3}$$

右辺第１項 $|w(x)|$ は正の実数値関数であり，作用素　$(U'_{T.w}f)(x) = w(x)/|w(x)| \cdot f(T(x))$ の ”伸び率 ”を表している．そこでこの項を無視して，$w(x)/|w(x)|$ を改めて $w(x)$ とおき，以下は

$$|w(x)| \equiv 1, \quad x \in X \tag{4}$$

と仮定する．この仮定は（２）に比べれば必然性に欠けるものであることは否めない. (4) を仮定せずに議論することは今後の課題である.

作用素 $U_{T,w}$ の固有値を調べるにあたって，いくつかの予備的な考察から始める.

(a)　仮定（４）と T が全射であることから，$U_{T,w} : C(X) \to C(X)$ は等長作用素である．従って $U_{T,w}$ の任意の固有値の絶対値は１に等しい.

(b) 差し当たって $T : X \to X$ が位相推移的 -即ちある点 x_0 の前進軌道 $\{T^n(x_0) \mid n \geq 0\}$ が X で稠密である- と仮定する．λ を $U_{T,w}$ の固有値，$f \in C(X)$ をその固有関数の一つとすると,

$$U_{T,w}f = w \cdot f \circ T = \lambda f \tag{5}$$

が成り立つ. (5) の両辺の絶対値を取り，仮定（４）及び (a) を用いれば次が得られる.

$$\text{任意の } n(\geq 0) \text{ に対して} \quad |f(T^n(x_0))| = |f(x_0)|. \tag{6}$$

軌道 $\{T^n(x_0) \mid n \geq 0\}$ が稠密であることと f の連続性から，$|f(x)| \equiv \mathrm{const} \neq 0$　が分かる．従って固有関数 f は $|f| \equiv 1$ を満たすとしてよい.

これらの考察をもとに，次の様な荷重のなす集合を考える．$\mathbb{T}$ は複素数平面上の，原点を中心とする単位円，$\mathrm{Map}(X, \mathbb{T})$ は X から $\mathbb{T}$ への連続写像全体のなす集合を表す．$\mathrm{Map}(X, \mathbb{T})$ に compact-open トポロジーを入れ，$f, g \in \mathrm{Map}(X, \mathbb{T})$ に対して，積 $f \cdot g$ を $f \cdot g(x) = f(x) \cdot g(x),\ x \in X$ と定義すると，$\mathrm{Map}(X, \mathbb{T})$ は位相アーベル群である.

定義及び命題 2. $T : X \to X$ をコンパクト距離空間 X 上の連続全射とする．次の様な荷重の集合を考える：

$$\mathcal{W}_T = \{w : X \to \mathbb{T} \mid U_{T,w}f = \lambda \cdot f \quad \text{を満たす} \lambda \in \mathbb{T} \text{ と } f \in \mathrm{Map}(X, \mathbb{T}) \text{ が存在する}\} \tag{7}$$

このとき $\mathcal{W}_T$ は $\mathrm{Map}(X, \mathbb{T})$ の部分（アーベル）群をなす.

$[X, \mathbb{T}]$ で X から $\mathbb{T}$ への連続写像のホモトピー類を表す．X の整数係数１次元チェックコホモロジー群 $\check{\mathrm{H}}^1(X; \mathbb{Z})$ とホモトピー類 $[X, \mathbb{T}]$ との間に自然な同型が存在する．そこで $f \in \mathrm{Map}(X, \mathbb{T})$ にたいして f の属するホモトピー類 $[f] \in [X, \mathbb{T}] \cong \check{\mathrm{H}}^1(X; \mathbb{Z})$ を対応させる写像 $[\cdot] : \mathrm{Map}(X, \mathbb{T}) \to [X, \mathbb{T}]$ を考え，その $\mathcal{W}_T$ への制限写像を

$$W_T : \mathcal{W}_T \to \check{\mathrm{H}}^1(X; \mathbb{Z})$$

とおく．コホモロジー群 $\check{\mathrm{H}}^1(X; \mathbb{Z})$ に離散位相を入れたとき，W_T が連続準同型であることを見るのは易しい．そこで

$$\mathrm{Im}W_T \quad と \quad \mathrm{Ker}W_T$$

を記述すれば，$\mathcal{W}_T$ がある程度理解できると期待される．

まず写像 $[\cdot] : \mathrm{Map}(X, \mathbb{T}) \to [X, \mathbb{T}] \cong \check{\mathrm{H}}^1(X; \mathbb{Z})$ も準同型で，その kernel は次のように書けることを想起する：

$$\mathrm{Ker}[\cdot] = \exp iC_{\mathbb{R}}(X),$$

ここで $C_{\mathbb{R}}(X)$ は X 上の実数値連続関数のなす Banach 空間である．

定理３．上の記号の下，次が成り立つ．

$$\mathrm{Im}(W_T) = \mathrm{Im}(T^* - \mathrm{id} : \check{\mathrm{H}}^1(X; \mathbb{Z}) \to \check{\mathrm{H}}^1(X; \mathbb{Z}))$$

ここで T^* は T が誘導する $\check{\mathrm{H}}^1(X; \mathbb{Z})$ 上の準同型を表す．

例４．

(4.1) $n \geq 2$ を自然数，$\rho_n : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ を $\rho_n(z) = z^n, z \in \mathbb{T}$ と定義する．ρ_n は positively expansive open map（ここでは定義を略す）で，位相推移的であることはよく知られている．このとき定理３から

$$\mathrm{W}_{\rho_n} \cong (n-1)\mathbb{Z}.$$

ここで ρ_n の位相的エントロピーは $\log n$ であることに注意すると，$\mathrm{Im}(W_T)$ によって ρ_n の力学系的性質の一部を見ることができたといってもよいかもしれない．

(4.2) $r_\alpha : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ を $\mathbb{T}$ 上の無理数回転とする．このとき $\mathrm{Im}W_{r_\alpha} = 0$. 従って r_α の力学系的性質は $\mathrm{Im}(W_{r_\alpha})$ には反映されない．

次に $\mathrm{Ker}W_T$ について調べるため，以下の記号を導入する：

$$\mathrm{Cob}(T) := \{f \circ T - f \mid f \in C_{\mathbb{R}}(X)\}$$

$\mathrm{Cob}(T)$ は測度論的力学系理論において coboundary と呼ばれている関数の族であり，与えられた力学系 $T : X \to X$ に対して，どのような関数が $\mathrm{Cob}(T)$ に属するかという問題が, $C_{\mathbb{R}}(X)$ を L^1, L^∞ などに置き換えて調べられている (例えば [2, Section 2.9], [4] 参照）．

定理５．$T : X \to X$ はコンパクト距離空間 X 上の連続全射とする．

(1) $\check{\mathrm{H}}^1(X; \mathbb{Z}) = 0$ または

(2) X は連結でかつ $T^* - \mathrm{id} : \check{\mathrm{H}}^1(X; \mathbb{Z}) \to \check{\mathrm{H}}^1(X; \mathbb{Z})$ は単射

であると仮定する．このとき次が成り立つ．

$$\mathrm{Ker}(W_T) = \{\ \omega \exp(i\psi) \mid \omega \in \mathbb{T} \text{ かつ } \psi \in \mathrm{Cob}(T)\}.$$

さらに X が連結なら

$$\mathrm{Ker}(W_T) \cong \mathbb{T} \oplus \exp(i\mathrm{Cob}(T))$$

が成り立つ.

注 6

(6.1) Cob(T) を明示的に決めることは一般に難しい．一方次が事実が知られている ([3]).

Cob(T) は

$$\{f \in C_{\mathbb{R}}(X) \mid 任意の\ T-不変な\ X\ 上の確率測度\ \mu\ に対して,\ \int_X f d\mu = 0\}$$

内で稠密である.

(6.2) 無理数回転 r_α に対しては定理 5 の仮定はどちらも満たされない．しかしながら議論を多少修正することによって同じ結論を得ることができる.

(6.3) 定理 5 の KerW_T に属する関数は Baggett [1] によって"projective coboundary"と呼ばれている関数の一種である．しかしながら現在の所 Baggett の結果との明示的な関係を見出すことができない.

参考文献

[1] L. Baggett, On circle-valued cocycles of an ergodic measure-preserving transformations Israel J. Math. 61 (1988), 29- 38.

[2] A. Katok and B. Hasselblatt, Introduction to the modern theory of dynamical systems, encyclopedia of mathematics and its applications 54 (1995), Cambridge Univ. Press.

[3] P. Liardet and D. Volný, *Sums of continuous and differentiable functions in dynamical systems, Israel J. Math. 98 (1997), 29-60.*

[4] A.N. Quas, Rigidity of continuous coboundaries, Bull. London Math. Soc. 29 (1997), 595-600.

[5] P. Walters, *An introduction to Ergodic theory*, G.T.M. 79, Springer (1982).

関数環上の全射等距離写像

新潟大学　羽鳥　理 (Osamu Hatori)
茨城大学　平澤　剛 (Go Hirasawa)
山形大学　三浦　毅 (Takeshi Miura)

1　乗法的スペクトル保存写像

近年，Banach 環の間のスペクトルを保存する写像の研究が盛んになされている．これらの研究では，写像の線形性や連続性を仮定しなくともある種のスペクトルの性質から自動的に線形かつ連続になることが示されている．このような「ある種の性質を保存すると他のどのような性質が保存されるか」を調べる問題は "Preserver Problem" と呼ばれ [10]，その源流を辿ると Fröbenius [2] にまで遡ることが出来るといわれている（本報告執筆者である三浦の力量では文献 [2] を解読できていない．このように無責任な表現を用いることをお許し頂きたい）．比較的最近では，Gleason-Kahane-Żelazko theorem [3, 5] がある．

Theorem 1 (Gleason-Kahane-Żelazko theorem [3, 5]) $\mathcal{A}$ を *Banach* 環とする．写像 $T\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ が線形で，さらに

$$T(a) \in \sigma(a) \qquad (\forall a \in \mathcal{A})$$

をみたせば T は乗法的，つまり $T(ab) = T(a)T(b)$ $(\forall a, b \in \mathcal{A})$ が成り立つ．ここに $\sigma(a)$ は a のスペクトルである．

Gleason-Kahane-Żelazko theorem では写像の線形性が仮定されている．この仮定は自然であると思われるが，Kowalski and Słodkowski [6] は線形性を仮定しなくとも同様の結果が得られることを示した．

Theorem 2 (A theorem by Kowalski-Słodkowski [6]) $\mathcal{A}$ を *Banach* 環とする．（線形とは限らない）写像 $T\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ が $T(0) = 0$ 及び

$$T(a) - T(b) \in \sigma(a - b) \qquad (\forall a, b \in \mathcal{A})$$

をみたせば T は線形かつ乗法的である

このようにある種のスペクトルに関する条件のもとでは，写像が自動的に線形・乗法的になることが知られている．近年盛んに行われている研究の発端は Molnár [9] の定理であると思われるが，その結果は Kowalski-Slodkowski の定理の掛け算版と見れば極自然なものである．

Theorem 3 (Molnár [9]) X を第一可算コンパクト *Hausdorff* 空間とする．全射 $T\colon C(X) \to C(X)$ が $T(1)=1$ 及び

$$\sigma(T(f)T(g)) = \sigma(fg) \qquad (\forall f, g \in C(X))$$

をみたせば，T は自己同形写像，つまり同相写像 $\varphi\colon X \to X$ が存在して

$$T(f)(x) = f(\varphi(x)) \qquad (\forall f \in C(X), x \in X)$$

となる．

Molnár [9] の導入したスペクトル条件 $\sigma(T(f)T(g)) = \sigma(fg)$ は乗法的スペクトル保存性などと呼ばれ，Molnár [9] の定理は関数環や（可換とは限らない）Banach 環など様々な方向に拡張されている．その中で特に我々の研究と密接に関連し，その後の研究に最も影響を与えたのが Luttman and Tonev [7] の定理であると考えている．

Theorem 4 (A theorem by Luttman and Tonev [7]) A, B を関数環とし，$\mathrm{Ch}(A)$, $\mathrm{Ch}(B)$ をそれぞれ A, B の *Choquet* 境界とする．全射 $T\colon A \to B$ が $T(1)=1$ 及び

$$\sigma_\pi(T(f)T(g)) = \sigma_\pi(fg) \qquad (\forall f, g \in A)$$

をみたせば，同相写像 $\varphi\colon \mathrm{Ch}(B) \to \mathrm{Ch}(A)$ が存在して

$$T(f)(y) = f(\varphi(y)) \qquad (\forall f \in A, y \in \mathrm{Ch}(B))$$

が成り立つ．つまり T は関数環としての等距離同型写像である．ただし

$$\sigma_\pi(f) = \{z \in \sigma(f) : |z| = \|f\|_\infty\}$$

である．

Luttman and Tonev [7] の定理で用いられている $\sigma_\pi(f)$ は f の peripheral spectrum と呼ばれる．定義より $\sigma_\pi(f)$ は $\sigma(f)$ の部分集合であるが，原点からの最遠点だけからなる集合という意味で，スペクトルに比べて非常に薄っぺらな印象を受ける．にも関わらず全射 T の代数的・位相的構造を決定するには十分な集合なのである．

2　等距離写像との関連

Luttman and Tonev [7] が積の peripheral spectrum に関する条件 $\sigma_\pi(T(f)T(g)) = \sigma_\pi(fg)$ を扱ったのに対し，Rao, Tonev and Toneva [11] は和の peripheral spectrum を問題にした．実際，前者は Molnár の定理の拡張であるのに対し，後者は Kowalski and Słodkowski の定理に関連している．

Theorem 5 (Rao, Tonev and Toneva [11]) 関数環の間の全射 $T\colon A \to B$ が

$$\sigma_\pi(T(f)+T(g)) = \sigma_\pi(f+g) \qquad (\forall f, g \in A)$$

$$\|\,|T(f)|+|T(g)|\,\| = \|\,|f|+|g|\,\| \qquad (\forall f, g \in A)$$

をみたせば，T は関数環としての等距離同型写像である．

Tonev and Yates [12] は peripheral spectrum に関する条件を

Theorem 6 (Tonev and Yates [12]) 関数環の間の全射 $T\colon A \to B$ が

$$\|T(f)+T(g)\|_\infty = \|f+g\|_\infty \qquad (\forall f, g \in A)$$

$$\|\,|T(f)|+|T(g)|\,\|_\infty = \|\,|f|+|g|\,\|_\infty \qquad (\forall f, g \in A)$$

をみたせば，同相写像 $\varphi\colon \mathrm{Ch}(B) \to \mathrm{Ch}(A)$ が存在して $|T(f)(y)| = |f(\varphi(y))|$ $(\forall f \in A, y \in \mathrm{Ch}(B))$ となる．さらに $T(1)=1$ かつ $T(i)=i$ のとき，T は関数環としての等距離同型写像である．

このように関数環の間の全射に対しては，線形性を仮定しなくとも，ある条件のもとでは自動的に線形になることが示されているが，条件

$$\|\,|T(f)|+|T(g)|\,\|_\infty = \|\,|f|+|g|\,\|_\infty$$

は不自然に思われる．したがってこのような条件を除いても類似の結果が得られないか，と考えることは極自然な問題である．実際，より一般に次が得られた．

Theorem 7 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ を単位的半単純可換 *Banach* 環とし，その極大イデアル空間をそれぞれ $M_{\mathcal{A}}$, $M_{\mathcal{B}}$ とする．全射 $T\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ がスペクトル半径 $\mathrm{r}(\cdot)$ に関して

$$\mathrm{r}(T(a)+T(b)) = \mathrm{r}(a+b) \qquad (\forall a, b \in \mathcal{A}) \tag{1}$$

をみたせば，B の *Shilov* 境界 ∂B 上で $|\widehat{T(e)}| = 1$ が成り立つ．ここで e は $\mathcal{A}$ の単位元であり，$\hat{\cdot}$ は *Gelfand* 変換である．さらに $\varphi(\partial\mathcal{B}) = \partial\mathcal{A}$ をみたす同相写像 $\varphi\colon M_{\mathcal{B}} \to M_{\mathcal{A}}$ 及び開かつ閉集合 $K \subset M_{\mathcal{B}}$ が存在して

$$\widehat{T(a)}(y) = \begin{cases} \widehat{T(e)}(y)\hat{a}(\varphi(y)) & y \in K \\ \widehat{T(e)}(y)\overline{\hat{a}(\varphi(y))} & y \in M_{\mathcal{B}} \setminus K \end{cases}$$

がすべての $a \in \mathcal{A}$ に対して成り立つ．もし，さらに $M_{\mathcal{B}}$ 上 $\widehat{T(e)} = 1$ かつ $\widehat{T(ie)} = i$ が成り立てば，T は多元環としての同形写像である．

証明の概略 Mazur-Ulam の定理 [8] より，線形ノルム空間の間の全射等距離写像が 0 を 0 に写せば，必然的に実線形写像であることが知られている（この事実は [11, 12] の証明においても用いられている．また Mazur-Ulam の定理 [8] の簡単な証明が Väisälä [13] によって与えられている）．よって (1) より T は実線形である．

一方で $\hat{\mathcal{A}}$ の $C(M_{\mathcal{A}})$ における一様閉包を A とすれば，A は $M_{\mathcal{A}}$ 上の関数環であることが分かる．同様にして $M_{\mathcal{B}}$ 上の関数環 B を定めれば，スペクトル半径に関する T の等距離性から，T は A から B への全射等距離写像に拡張できることもただちに示される．よって T は関数環の間の全射，実線形等距離写像とみなすことが出来る．ここで Ellis の定理 [1] により，このような写像の形は決定されているので，それを適用することにより定理の証明は終わる．■

参考文献

[1] A.J. Ellis, *Real characterizations of function algebras amongst function spaces*, Bull. London Math. Soc. **22** (1990), 381–385.

[2] G. Fröbenius, *Uber die darstellung der endlichen gruppen durch lineare substitutionen*, Deutsch. Acad. Wiss., (1897), 994–1015.

[3] A. M. Gleason, *A characterization of maximal ideals*, J. Analyse Math. **19** (1967), 171–172.

[4] O. Hatori, G. Hirasawa and T. Miura, *Additively spectral-radius preserving surjections between unital semisimple commutative Banach algebras*, Cent. Eur. J. Math., **8** (2010), 597–601.

[5] J. P. Kahane and W. Żelazko, *A characterization of maximal ideals in commutative Banach algebras*, Studia Math. **29** (1968), 339–343.

[6] S. Kowalski and Słodkowski, *A characterization of multiplicative linear functionals in Banach algebras*, Studia Math., **67** (1980), 215–223.

[7] A. Luttman and T. Tonev, *Uniform algebra isomorphisms and peripheral multiplicativity*, Proc. Amer. Math. Soc., **135** (2007), 3589–3598.

[8] S. Mazur and S. Ulam, *Sur les transformationes isométriques d'espaces vectoriels normés*, C. R. Acad. Sci. Paris **194** (1932), 946–948.

[9] L. Molnár, *Some characterizations of the automorphisms of $B(H)$ and $C(X)$*, Proc. Amer. Math. Soc., **130** (2001), 111–120.

[10] L. Molnár, *Selected preserver problems on algebraic structures of linear operators and on function spaces*, Lecture Notes in Math. **vol 1895**, Springer (2006).

[11] N. V. Rao, T. V. Tonev and E. T. Toneva, *Uniform algebra isomorphisms and peripheral spectra*, Contemp. Math., **427** (2007), 401–416.

[12] T. Tonev and R. Yates, *Norm-linear and norm-additive operators between uniform algebras*, J. Math. Anal. Appl., **357** (2009), 45–53.

[13] J. Väisälä, *A proof of the Mazur-Ulam theorem*, Amer. Math. Monthly, **110-7** (2003), 633–635.

等距離写像の代数構造

新潟大学自然科学系　　羽鳥　理 (Osamu Hatori)

1. 背景

ユークリッド空間の間の等距離写像は affine 写像である。さらに一般にこのようなことがノルム空間で成り立つことは Mazur-Ulam の定理としてよく知られている。また，単位円周の群の間の等距離写像についても群構造を保存することは自明である。このように距離構造から代数構造が復元できるという現象をいくつかの群で調べてみた。この講演ではそのなかの 2 つについて述べた。

2. 群の間の等距離写像の構造

単位的可換 C*環の間の等距離複素線形写像は Banach 環としての同形写像に荷重をかけたものである。これは Banach-Stone の定理としてよく知られていて，単位的可換 C*環は関数環に置き換えらることも Nagasawa の定理として知られている。Kadison は単位的 C*環の間の等距離複素線形写像は Jordan $*$-isomorphism に左から unitary をかけた形をしていることを示し，Banach-Stone の定理を非可換化した。しかしながらこのような結果は一般の Banach 環に対しては期待できない。可換の場合でも、Banach 空間としては同形であっても多元環としては同形でない単位的半単純可換 Banach 環がたくさんある。一方上述のように距離構造が代数構造と復元するというような現象が散見される中で、筆者は単位的 Banach 環の可逆元からなる群の間の等距離群同形写像は Banach 環の間の等距離実同形写像に拡張できることを示し，特に可換の場合は可逆群が距離空間としての同型なら，実 Banach 環として実等距離同形であることも示した [2, 3]。本稿では一般線形群や unitary 群の間の等距離写像の構造について述べる。以下では H は Hilbert 空間，$B(H)$ を H 上の有界作用素全体の Banach 環とし，$B(H)^{-1}$ で $B(H)$ の可逆群，$U(H)$ で H 上の unitary 作用素全体とする。作用素通しの距離は作用素ノルムにより定める。また I は H 上の高騰作用素とする。

定理 2.1 ([3]). *T は $B(H)^{-1}$ からそれ自身の上への等距離写像とし，$T(I) = I$ とする。このとき H 上の unitary または antiunitary U が存在して*

$$T(A) = UAU^*, \quad \forall A \in B(H)^{-1}$$

または

$$T(A) = UA^*U^*, \quad \forall A \in B(H)^{-1}$$

が成り立つ。

Proof. $B(H)^{-1}$ は連結であることが知られているので，local Mazur-Ulam の定理（[1, Theorem 14.1]）を用いて T は $B(H)$ からそれ自身の上への等距離 affine 写像 $\tilde{T}$ に拡張できることが分かる。$B(H)$ が半単純であることを考慮して $\tilde{T}$ は実線形写像であることが分かる。すると $\tilde{T}$ は invertibility preserving (i.e., $\tilde{T}(G(H)^{-1}) = B(H)^{-1}$) な additive map であることが分かる。$\dim H = \infty$ の場合は [7, Theorem 3.2] により，$\dim H < \infty$ の場合には [6, Theorem 1.1] により $\|U\| = 1$ であり可逆な複素線形または反線形な H 上の作用素 U が存在して

$$\tilde{T}(A) = UAU^{-1} \quad \forall A \in B(H)$$

が言える。ここで A に rank 1 operator を考えてる通常の方法により，U は等距離写像であることが分かる。つまり U は unitary か antiunitary である。 $\square$

定理 2.2 ([5])**.** *T は $U(H)$ からそれ自身の上への等距離写像とし，$T(I)=I$ とする。このとき H 上の unitary または antiunitary U が存在して*

$$T(A)=UAU^*, \quad \forall A\in B(H)^{-1}$$

または

$$T(A)=UA^*U^*, \quad \forall A\in B(H)^{-1}$$

が成り立つ。

Proof. $\dim H=1$ の場合は自明なので $\dim H\geq 2$ の場合を考える。以下ステップに分けて証明の概略を示す。
(1) T が isometry であることから，[4] の結果を用いて

$$T(ABA)=T(A)T(B)T(A) \tag{2.1}$$

が任意の $A,B\in U(H)$ に対して成り立つ（Jordan triple preserving)。

(2) 大きさ 1 の任意の複素数 λ に対して $T(\lambda I)=\lambda I$ が成り立つかまたは，$T(\lambda I)=\bar{\lambda}$ が成り立つ。実際以下のようである。$S^2=I$ である unitary S を symmetry という。また T の全射性と (2.1) より S が symmetry であることと $T(S)$ が symmetry であることは同値である

$$S^2=I\leftrightarrow T(S)T(S)=I$$

すると任意の unitary U と symmetry S に対して

$$US=SU\leftrightarrow SUS=U\leftrightarrow T(S)T(U)T(S)=T(U)\leftrightarrow T(U)T(S)=T(S)T(U) \tag{2.2}$$

である。つまり U が任意の symmetry と可換であることと $T(U)$ がそうであることは同値である。S が symmetry であることと $(I-S)/2$ が projection であることは同値であるから，$T(\lambda I)$ はすべての projection と可換である。つまり $T(\lambda I)$ はスカラー operator である。さらに T が等距離写像であることを考慮して

$$T(\lambda I)=\lambda I, \quad \forall\lambda\in\mathbb{T} \tag{2.3}$$

または

$$T(\lambda I)=\bar{\lambda}I, \quad \forall\lambda\in\mathbb{T} \tag{2.4}$$

である。後者の場合は $U\to(T(U))^*$ を改めて T とすることにより，$T(\lambda I)=\lambda I$ として一般性を失わないので以下ではそのようにする。

(3) $P(H)$ を projection 全体とする。

$$S:P(H)\to P(H)$$

を $S(P)=(I-T(I-2P))/2$ により定める。すると S は全射等距離写像である。等式 (2.2) より

$$PQ=QP\leftrightarrow S(P)S(Q)=S(Q)S(P) \tag{2.5}$$

である。

(4) rank-1 または corank-1 の projection を simple projection とよぼう。[8, pp. 276–277] によると $P\neq 0,I$ である $P\in P(H)$ について，P が simple であることと，P と可換な任意の $Q\in P(H)$ に対して $\#\{\{P,Q\}^k\}^k\ \leq\ 2^3$ であることは同値である。ここで，$\{\ \}^k$ は $\{\ \}$ の各要素と可換な projection 全体の集合である。このことと (2.5) より，P が simple projection であることと $S(P)$ が simple projection であることは同値である。さらに $P,Q\in P(H)$ が unitary 同値であることと，$S(P),S(Q)$ が unitary 同値であることも同値である。(実際，$U\in P(H)$ に対して $P=UQU^*$ とす

ると，自己共役作用素 h が存在して $U=\exp(ih)$ であるので，n を十分大きくして $k=0,1,\dots,n$ について $U_k=\exp(\frac{ikh}{n})$，$Q_k=U_kQU_k^*$ とおく。$Q_0=Q$, $Q_n=P$ である。n が十分大きければ $\|Q_k-Q_{k+1}\|<1$ とできるが，S が等距離なので $\|S(Q_k)-S(Q_{k+1})\|<1$ である。ここで距離が 1 より小さい projection は unitary 同値であることが知られているので各 $k=0,1,\dots,k-1$ に対して $S(Q_k)$ と $S(Q_{k+1})$ は unitary 同値である。U_k, Q_k の定義より順につないで $S(Q)$ と $S(P)$ は unitary 同値であることが分かる。$\dim H\geq 3$ ならば，rank-1 作用素と corank-1 作用素は unitary 同値ではないから，

$$\text{(a)}\qquad S(\{\text{rank-1 projection}\})=\{\text{rank-1 projection}\}$$

か

$$\text{(b)}\qquad S(\{\text{rank-1 projection}\})=\{\text{corank-1 projection}\}$$

である。$\dim H=2$ の場合は (a) と (b) は同値なので結局 (a) か (b) のどちらかが起こる。

(5) (a) の場合を考える。$P_1(H)$ を rank-1 projection 全体とする。すると $S_1=S|_{P_1(H)}$ は $P_1(H)$ から $P_1(H)$ の上への等距離写像である。$P,Q\in P_1(H)$ について $P-Q$ の固有値は $0,\pm\sqrt{1-\mathrm{tr}PQ}$ 以外にはないので $\|P-Q\|=\sqrt{1-\mathrm{tr}PQ}$ である。S が等距離なので

$$\mathrm{tr}PQ=\mathrm{tr}S(P)S(Q)\qquad \forall P,Q\in P_1(H)$$

である。よって Wigner の定理によって H 上の unitary または antiunitary 作用素 U が存在して

$$S(P)=UPU^*\qquad \forall P\in P_1(H)$$

である。

(6) $S(P)=(I-T(I-2P))/2$ だったので，(5) の最後の等式は

$$T(I-2P)=U(I-2P)U^*\qquad \forall P\in P_1(H) \tag{2.6}$$

と書き換えることができる。この式から $T(V)=UVU^*$ $(V\in U(H))$ を導く。((2) ででてきた $T(\lambda I)=\bar{\lambda}I$ の場合は (2) で述べたようにして $(T(V))^*=UVU^*$, 従って $T(V)=UV^*U^*$ が導かれる。）実際以下のようにする。$T(\cdot)$ を $U^*T(\cdot)U$ に置き換えると $U^*T(\cdot)U$ も $U(H)$ からそれ自身への全射等距離写像なので，ここまでの方法により

$$T(I-2P)=I-2P,\qquad \forall P\in P_1(H) \tag{2.7}$$

が言えている。次に任意の symmetry L に対して $T(L)=L,-L$ を示す。L が symmetry であることと，projection E が存在して $L=I-2E$ であることが同値なので，

$$T(I-2E)=I-2E,-(I-2E)\qquad \forall P\in P(H)$$

を示せばよい。(2) で $T(\{\text{symmetry}\})=\{\text{symmetry}\}$ であることが示されているので，任意の $E\in P(H)$ に対して $E'\in P(H)$ が存在して $T(I-2E)=I-2E'$ である。$E=0$ または $E=I$ の場合は，$T(I)=i$ と $T(-I)=-I$ であることから，それぞれ $E'=E$ となる。それ以外の E を考える。$P\in P_1(H)$ とすると (2.2) であることと (2.7) より

(2.8)
$$\begin{aligned}PE=EP\leftrightarrow (I-2P)(I-2E)=(I-2E)(I-2P)\leftrightarrow T(I-2P)T(I-2E)=T(I-2E)T(I-2P)\\ \leftrightarrow (I-2P)(I-2E')=(I-2E')(I-2P)\leftrightarrow PE'=E'P\end{aligned}$$

である。さて，$PE=EP$ であることと，$\mathrm{range}P\subset\mathrm{range}E$ または $\mathrm{range}P\perp\mathrm{range}E$ であることは同値なので，

$$\mathrm{range}E\subset\mathrm{range}E'\cup(\mathrm{range}E')^\perp$$

である。線形代数より

$$\mathrm{range}E\subset\mathrm{range}E' \text{ or } \mathrm{range}E\subset(\mathrm{range}E')^\perp=\mathrm{range}(I-E')$$

となり，同様に

$$\mathrm{range}E' \subset \mathrm{range}E \text{ or } \mathrm{range}E' \subset \mathrm{range}(I-E)$$

である。よって $\mathrm{range}E \subset \mathrm{range}E'$ であるならば，$\mathrm{range}E' \subset \mathrm{range}(I-E)$ では $E \neq 0$ であるので矛盾するから，$\mathrm{range}E' \subset \mathrm{range}E$ となり，よって $\mathrm{range}E = \mathrm{range}E'$ である。$\mathrm{range}E \subset \mathrm{range}(I-E')$ ならば同様にして $\mathrm{range}E = \mathrm{range}(I-E')$ である。以上より任意の $E \in P(H)$ に対して $T(I-2E) = \pm(I-2E)$，つまり任意の symmetry L に対して $T(L) = \pm L$ である。

次に unitary U を任意にとり固定する。(2.2) により U と可換な任意の symmetry L に対して $T(U)$ と $T(L)$ は可換であるが，$T(L) = \pm L$ なので $T(U)$ と L は可換である。L が symmetry であることと $(I-L)/2$ が projection であることが同値であるから，U と可換な任意の projection は $T(U)$ とも可換であり，(2.2) を考慮して逆も成り立つことが分かる。Fuglede の定理（nomal 作用素 N が作用素 A と可換ならば，N は A^* とも可換である。）より $T(U)$ の commutant は von Neumann 環である。任意の von Neumann 環はそれに含まれる projection の closed linear hull であるから上とあわせて U の commutant と $T(u)$ の commutant は一致する。よって double commutant 通しも一致する。次に I でも 0 でもない projection P を任意にとり，$\lambda, \mu \in \mathbb{T}$ も任意にとり $\lambda P + \mu(I-P) \in U(H)$ を考える。線形代数より double commutatnt $\{\lambda P + \mu(I-P)\}''$ は

$$\{\lambda P + \mu(I-P)\}'' = \{\alpha P + \beta(I-P) : \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}$$

である。$T(\lambda P + (I-P)) \in (T(\lambda P + (I-P)))''$ なので $f(\lambda), g(\lambda) \in \mathbb{T}$ が存在して

$$T(\lambda P + (I-P)) = f(\lambda)P + g(\lambda)(I-P)$$

である。特に写像

$$f : \mathbb{T} \to \mathbb{T},\ g : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$$

が定まる。

$$f(\lambda\mu\lambda)P + g(\lambda\mu\lambda)(I-P) = T(\lambda\mu\lambda P + (I-P)) = T((\lambda P + (I-P))(\mu P + (I-P))(\lambda P + (I-P)))$$

$$T(\lambda P + (I-P))T(\mu P + (I-P))T(\lambda P + (I-P)) = f(\lambda)f(\mu)f(\lambda)P + g(\lambda)g(\mu)g(\lambda)(I-P)$$

であるから

$$f(\lambda\mu\lambda) = f(\lambda)f(\mu)f(\lambda),\ g(\lambda\mu\lambda) = g(\lambda)g(\mu)g(\lambda)$$

であり，$T(I) = I$ より $f(1) = g(1) = 1$ である。これから f,g は積を保存することが分かる。T が等距離なので

$$\max\{|f(\lambda) - f(\mu)|, |g(\lambda) - g(\mu)|\} = |\lambda - \mu|$$

であるから f, g は連続であり，従って f, g は局所コンパクト Abel 群 $\mathbb{T}$ の character である。従って整数 n, n' が存在して

$$f(z) = z^n, g(z) = z^{n'}, \quad z \in \mathbb{T}$$

である。さらに $|f(\lambda) - f(\mu)| \leq |\lambda - \mu|$ であるから $n = -1, 0, 1$ のどれかである。特に（しばらく）P を rank-1 とする。rank-1 ならば $T(I-2P) = I - 2P$ であったから $g(-1) = 1$ となり，$n' = 0$ である。また，任意の $\mu \in \mathbb{T}$ に対して $T(\mu I) = \mu I$ であったから

$$\max\{|\mu - \lambda|, |\mu - 1|\} = \|(\mu - \lambda)P + (\mu - 1)(I-P)\| = \|\mu I - (\lambda P + (I-P))\|$$

$$\|T(\mu I) - T(\lambda P + (I-P))\| = \|\mu I - (f(\lambda)P + (I-P))\| = \|(\mu - f(\lambda))P + (\mu - 1)(I-P)\| = \max\{|\mu - f(\lambda)|, |\mu - 1|$$

となり，よって

$$\max\{|\mu - \lambda|, |\mu - 1|\} = \max\{|\mu - f(\lambda)|, |\mu - 1|\}$$

が任意の $\lambda, \mu \in \mathbb{T}$ に対して成立する。$n = -1, 0, 1$ であることを考慮して $n = 1$ が分かる。続けて，今度は任意の（rank-1 とは限らない）$P \in P(H)$ について $T(\lambda P + (I-P)) = \lambda P + (I-P)$ であることを示す。$P = 0, I$ なら成立することはすでに分かっているから，$P \neq 0, I$ の場合を示す。また rank-1 の場合も示したので，$\mathrm{rank}P \geq 2$ の場合を示す。Q を P の rank-1 subprojection とす

る。そこで $\lambda,\mu,\nu\in\mathbb{T}$ に対して $\lambda P+(I-P)$ と $\mu Q+(I-Q)$，νI との距離と $T(\lambda P+(I-P))$ と $T(\mu Q+(I-Q))$，$T(\nu I)$ との距離を見る。$T(\lambda P+(I-P))=f(\lambda)P+g(\lambda)(I-P)$ であることを考慮して

$$\|(\lambda P+(I-P))-(\mu Q+(I-Q))\|=\|(\lambda-1)(P-Q)+(\lambda-\mu)Q\|$$

であり，Q が P の subprojection で $\mathrm{rank}Q=1<\mathrm{rank}P$ なので

$$=\max\{|\lambda-1|,|\lambda-\mu|\}$$

である。$\mathrm{rank}Q=1$ であるから

$$\|T(\lambda P+(I-P))-T(\mu Q+(I-Q))\|=\|f(\lambda)P+g(\lambda)(I-P)-(\mu Q+(I-Q))\|$$
$$=\|(f(\lambda)-\mu)Q+(f(\lambda)-1)(P-Q)+(g(\lambda)-1)(I-P)\|=\max\{|f(\lambda)-\mu|,|f(\lambda)-1|,|g(\lambda)-1|\}$$

である。よって任意の $\lambda,\mu\in\mathbb{T}$ に対して

$$\max\{|\lambda-1|,|\lambda-\mu|\}=\max\{|f(\lambda)-1|,|g(\lambda)-1|,|f(\lambda)-\mu|\}$$

である。また，

$$\|\lambda P+(I-P)-\nu I\|=\|(\lambda-\nu)P+(1-\nu)(I-P)\|=\max\{|\lambda-\nu|,|1-\nu|\}$$

で

$$\|T(\lambda P+(I-P))-T(\nu I)\|=\|f(\lambda)P+g(\lambda)(I-P)-\nu I\|=\max\{|f(\lambda)-\nu|,|g(\lambda)-\nu|\}$$

である。よって任意の $\lambda,\nu\in\mathbb{T}$ に対して

$$\max\{|\lambda-\nu|,|1-\nu|\}=\max\{|f(\lambda)-\nu|,|g(\lambda)-\nu|\}$$

である。以上より $n=1,\ n'=0$ が分かる。従って任意の（0 と I の場合も）$P\in P(H)$ と任意の $\lambda\in\mathbb{T}$ に対して

$$T(\lambda P+(I-P))=\lambda P+(I-P)$$

が成立する。

次に $U_1,\dots,U_n$ を任意有限個の unitary とする。T が Jordan triple prreserving であるから

$$T(U_nU_{n-1}\cdots U_2U_1U_2\cdots U_{n-1}U_n)=T(U_n)T(U_{n-1})\cdots T(U_2)T(U_1)T(U_2)\cdots T(U_{n-1})T(U_n)$$

である。特に $P_1,\dots,P_n$ を互いに直交する projection とし，$\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{T}$ とし，$U_k=\lambda_kP_k+(I-P_k)$ とすると前段の結果より $T(U_k)=U_k$ であり

$$U_n\dots U_2U_1U_2\dots U_n=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2P_k$$

であるから

$$T(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2P_k)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2P_k$$

である。$\{\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2P_k : n$ は自然数$,\lambda_k\in\mathbb{T},P_1\dots,P_n$は互いに直交する projection$\}$ は $U(H)$ で稠密であり T は連続なので，以上より

$$T(U)=U,\qquad\forall U\in U(H)$$

が示された。(もとの T が等式 (2.4) をみたす場合は，もとの T に対して $U\to(T(U))^*$ を改めて T とおきなおした。従ってもとの T については $T(U)=U^*,\qquad\forall U\in U(H)$ である。)

(7) (4) の最後にある (b) について考察する。$\dim H=2$ ならば (a) と同値なので (6) ですでに結論を得てある。$\dim H=1$ の場合は定理自身が自明である。よって $\dim H\geq 3$ の場合が問題となる。

しかし，$\dim H \geq 3$ であると，実際には (b) は起こらないことが分かる。実際 (6) での方法をたどると自然に矛盾に到達する。以下で概略を説明する。

$$I - S : P_1(H) \to P_1(H)$$

を考えると，S が等距離なので $I - S$ も等距離である。すると

$$\mathrm{tr}PQ = \mathrm{tr}(P - S(P))(Q - S(Q))$$

が成り立ち，$I - S$ が全射だから Wigner の定理より，H 上の unitary または antiunitary W が存在して

$$S(P) = W(I - P)W^*, \quad \forall P \in P_1(H)$$

が成り立つ。前述と同様に始めに与えられた T を W^*TW に置き換えて改めて W^*TW を T として，

$$S(P) = I - P, \quad \forall P \in P_1(H)$$

である。$S(P) = \frac{I - T(I-2P)}{2}$ を考慮すると

(2.9) $$T(I - 2P) = -(I - 2P), \quad \forall P \in P_1(H)$$

である。すると (6) での方法と同様の方法で

$$T(I - 2P) = \pm(I - 2P), \quad \forall P \in P(H)$$

が分かり，任意の $P \in P(H)$ に対して $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ が存在して

$$T(\lambda P + (I - P)) = f(\lambda)P + g(\lambda)(I - P), \quad \forall \lambda \in \mathbb{T}$$

である。また (6) と同じようにして

$$f(\lambda) = \lambda,\ \forall \lambda \in \mathbb{T} \text{ or } f(\lambda) = \bar{\lambda},\ \forall \lambda \in \mathbb{T} \text{ or } f = 1 \text{ on } \mathbb{T},$$

$$g(\lambda) = \lambda,\ \forall \lambda \in \mathbb{T} \text{ or } g(\lambda) = \bar{\lambda},\ \forall \lambda \in \mathbb{T} \text{ or } g = 1 \text{ on } \mathbb{T}$$

である。特に $P \in P_1(H)$ だと (2.9) より $T(-P + (I - P)) = P - (I - P)$ だから $\mathbb{T}$ 上で $f = 1$ であることが分かる。よって $P \in P_1(H)$ について

$$\|\lambda P + (I - P) - \mu I\| = \|(\lambda - \mu)P + (1 - \mu)(I - P)\| = \max\{|\lambda - \mu|, |1 - \mu|\},$$

$$\|T(\lambda P + (I - P)) - T(\mu I)\| = \|P + g(\lambda)(I - P) - \mu I\| = \\ \|(1 - \mu)P + (g(\lambda) - \mu)(I - P)\| = \max\{|1 - \mu|, |g(\lambda) - \mu|\}$$

であり，$\|T(\lambda P + (I - P)) - T(\mu I)\| = \|\lambda P + (I - P) - \mu I\|$ なので任意の $\lambda, \mu \in \mathbb{T}$ に対して

$$\max\{|\lambda - \mu|, |1 - \mu|\} = \max\{|1 - \mu|, |g(\lambda) - \mu|\}$$

が分かり，よって

$$g(\lambda) = \lambda, \quad \forall \lambda \in \mathbb{T}$$

である。よって任意の $P \in P_1(H)$ に対して

$$T(\lambda P + (I - P)) = P + \lambda(I - P), \quad \forall \lambda \in \mathbb{T}$$

である。

次に P を rank-2 projection とする。($\dim H \geq 3$ なので $P \neq I$ である。) すると上と同様に $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ が存在して

$$T(\lambda P + (I - P)) = f(\lambda)P + g(\lambda)(I - P), \quad \forall \lambda \in \mathbb{T}$$

であり，

$$f(\lambda) = \lambda,\ \forall \lambda \in \mathbb{T} \text{ or } f(\lambda) = \bar{\lambda},\ \forall \lambda \in \mathbb{T} \text{ or } f = 1 \text{ on } \mathbb{T},$$

$$g(\lambda) = \lambda,\ \forall\lambda \in \mathbb{T} \text{ or } g(\lambda) = \bar{\lambda},\ \forall\lambda \in \mathbb{T} \text{ or } g = 1 \text{ on } \mathbb{T}$$

である。Q を P の rank-1 subprojection とする。任意の $\lambda, \mu \in \mathbb{T}$ について

$$\|\lambda P + (I-P) - (\mu Q + (I-Q))\| = \|(\lambda-\mu)Q + \lambda(P-Q) - (P-Q)\| = \max\{|\lambda-\mu|, |\lambda-1|\},$$

$$\|T(\lambda P + (I-P)) - T(\mu Q + (I-Q)\| = \|f(\lambda)P + g(\lambda)(I-P) - (Q - \mu(I-Q))\| = \\ \|(g(\lambda)-\mu)(I-P) + (f(\lambda)-1)Q + (f(\lambda)-\mu)(P-Q)\| = \max\{|g(\lambda)-\mu|, |f(\lambda)-1|, |f(\lambda)-\mu|\}$$

であり，よって任意の $\lambda, \mu \in \mathbb{T}$ に対して

$$\max\{|\lambda-\mu|, |\lambda-1|\} = \max\{|g(\lambda)-\mu|, |f(\lambda)-1|, |f(\lambda)-\mu|\} \tag{2.10}$$

である。また任意の $\lambda, \mu \in \mathbb{T}$ についても

$$\|\lambda P + (I-P) - \nu I\| = \|(\lambda-\nu)P + (1-\nu)(I-P)\| = \max\{|f(\lambda)-\nu|, |1-\nu|\}$$

で

$$\|T(\lambda P + (I-P)) - T(\nu I)\| = \|f(\lambda P + g(\lambda)(I-P) - \nu I\| = \\ \|(f(\lambda)-\nu)P + (g(\lambda)-\nu)(I-P)\| = \max\{|f(\lambda)-\nu|, |g(\lambda)-\nu|\}$$

である。よって

$$\max\{|\lambda-\nu|, |1-\nu|\} = \max\{|f(\lambda)-\nu|, |g(\lambda)-\nu|\}, \quad \forall\lambda, \nu \in \mathbb{T} \tag{2.11}$$

さらに

$$f(\lambda) = \lambda,\ \forall\lambda \in \mathbb{T} \text{ or } f(\lambda) = \bar{\lambda},\ \forall\lambda \in \mathbb{T} \text{ or } f = 1 \text{ on } \mathbb{T}, \\ g(\lambda) = \lambda,\ \forall\lambda \in \mathbb{T} \text{ or } g(\lambda) = \bar{\lambda},\ \forall\lambda \in \mathbb{T} \text{ or } g = 1 \text{ on } \mathbb{T} \tag{2.12}$$

である。(2.11) で λ と ν を -1 に非常に近く，1 から遠くにとると，左辺 $= |1-\nu|$ であるから，$\mathbb{T}$ 上で $f = 1$ かつ $g = 1$ でないといけない。また (2.11) で左辺は λ に依存して変化するので $f = 1$ と $g = 1$ は同時には起こらない。$f = 1, g \neq 1$ とすると，$g(z) = z$ または $g(z) = \bar{z}$ であるが，$g(z) = z$ なら (2.10) より

$$\max\{|\lambda-\mu|, |lambda-1|\} = \max\{|\lambda-\mu|, |1-\mu|\}$$

であるが $\lambda = i, \mu = -1$ だと矛盾している。また $g(z) = \bar{z}$ ならやはり (2.10) より

$$\max\{|\lambda-\mu|, |\lambda-1|\} = \max\{|lam\bar{b}da-\mu|, |1-\mu|\}$$

となり，やはり矛盾が起こる。以上より（恒等的に）$f = 1$ は起こらない。一方 $g = 1$ としても以下のように矛盾が起こる。実際 $f(z) = z,\ f(z) = \bar{z}$ としても上と同じように (2.10) から矛盾が起こる。以上より $\dim H \geq 3$ だと

$$S(P_1(H)) = \{\text{corank-1 projection}\}$$

は起こらない。 $\square$

References

[1] Y. Benyamini and J. Lindenstrauss, Geometric Nonlinear Functional Analysis

[2] O. Hatori, *Isometries between groups of invertible elements in Banach algebras*, Studia Math., **194**(2009), 293–304

[3] O. Hatori, *Algebraic properties of isometries between groups of invertible elements in Banach algebras*, J. Math. Anal. Appl., **376**(2011), 84–93

[4] O. Hatori, G. Hirasawa, T. Miura and L. Molnár, *Isometries and maps compatible with inverted Jordan triple products on groups*, preprint

[5] O. Hatori and L. Molnár, *Isometries of the unitary group*, preprint

[6] H. Havlicek and P.Semrl, *From geometry to invertible preservers*, Studia Math., **174**(2006), 99–109

[7] J. Hou and J. Cui, *Additive maps on standard operator algebras preserving invertibility or zero divisor*, Linear Algebra Apl., **359**(2003), 219–233

[8] L. Molnár and Timmermann, *A metric on the space of porjections admitting nice isometries*, Studia Math., **191**(2009), 271–281

Representing and interpolating sequences on parabolic Bloch type spaces

Yôsuke HISHIKAWA and Masahiro YAMADA

1. Introduction

Let $n \geq 1$ and H be the upper half-space of the $(n+1)$-dimensional Euclidean space, that is, $H = \{X = (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}\ ;\ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ t > 0\}$. For $0 < \alpha \leq 1$, the parabolic operator $L^{(\alpha)}$ is defined by

$$L^{(\alpha)} := \partial_t + (-\Delta_x)^\alpha, \tag{1.1}$$

where $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_\ell = \partial/\partial x_\ell$, and $\Delta_x = \partial_1^2 + \cdots + \partial_n^2$. Let $C(H)$ be the set of all real-valued continuous functions on H, and $C_0(H)$ be the set of all functions in $C(H)$ which vanish continuously at $\partial H \cup \{\infty\}$. For a positive integer k, $C^k(H)$ denotes the set of all k times continuously differentiable functions on H, and put $C^\infty(H) = \cap_k C^k(H)$. Furthermore, let $C_c^\infty(H)$ be the set of all functions in $C^\infty(H)$ with compact support. A function $u \in C(H)$ is said to be $L^{(\alpha)}$-harmonic if $L^{(\alpha)}u = 0$ in the sense of distributions. Put $m(\alpha) = \min\{1, \frac{1}{2\alpha}\}$, and for a real number $\sigma > -m(\alpha)$, let $\mathcal{B}_\alpha(\sigma)$ be the set of all $L^{(\alpha)}$-harmonic functions $u \in C^1(H)$ with the norm

$$\|u\|_{\mathcal{B}_\alpha(\sigma)} := |u(0,1)| + \sup_{(x,t)\in H} t^\sigma \left\{ t^{\frac{1}{2\alpha}} |\nabla_x u(x,t)| + t|\partial_t u(x,t)| \right\} < \infty, \tag{1.2}$$

where $\nabla_x = (\partial_1, \cdots, \partial_n)$. Furthermore, let $\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$ be the set of all functions $u \in \mathcal{B}_\alpha(\sigma)$ with $u(0,1) = 0$. We note that $\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma) \cong \mathcal{B}_\alpha(\sigma)/\mathbb{R}$. Also, we remark that $\mathcal{B}_\alpha(\sigma)$ and $\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$ are the Banach spaces with the norm (1.2) (see Theorem 3.2 of [6]). We call $\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$ (also $\mathcal{B}_\alpha(\sigma)$) the α-parabolic Bloch type spaces. The α-parabolic Bloch type spaces $\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$ are introduced and studied in [6]. In particular, it is known that when $\alpha = 1/2$, every $u \in \widetilde{\mathcal{B}}_{1/2}(\sigma)$ is harmonic on H (see Remark 3.3 of [6]). Thus, $\widetilde{\mathcal{B}}_{1/2}(\sigma)$ is the harmonic Bloch type space. Moreover, we also note that when $\alpha = 1$, every $u \in \widetilde{\mathcal{B}}_1(\sigma)$ is a solution of the heat equation $\big(\partial_t - \Delta_x\big)u = 0$.

In this paper, we study representing and interpolating sequences on parabolic Bloch type spaces. First, we describe the definition of $\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$-representing sequences. Let $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. For $k \in \mathbb{N}_0$, a function ω_α^k on $H \times H$ is defined by

$$\omega_\alpha^k(X;Y) = \omega_\alpha^k(x,t;y,s) := \mathcal{D}_t^k W^{(\alpha)}(x-y, t+s) - \mathcal{D}_t^k W^{(\alpha)}(-y, 1+s) \tag{1.3}$$

for all $X = (x,t), Y = (y,s) \in H$, where $\mathcal{D}_t = -\partial_t$ and $W^{(\alpha)}$ is a fundamental solution of $L^{(\alpha)}$. Let ℓ^∞ be the Banach space of all bounded sequences. Also, let $\mathbb{X} = \{X_j\} = \{(x_j, t_j)\}$ be a sequence in H. For $\{\lambda_j\} \in \ell^\infty$, let

$$U_\sigma^k\{\lambda_j\}(X) = U_{\sigma,\mathbb{X}}^k\{\lambda_j\}(X) := \sum_j \lambda_j t_j^{\frac{n}{2\alpha}+k-\sigma} \omega_\alpha^k(X;X_j) \tag{1.4}$$

for all $X \in H$. We say that $\{X_j\}$ is a $\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$-representing sequence of order k if $U_\sigma^k\{\lambda_j\} \in \widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$ for all $\{\lambda_j\} \in \ell^\infty$ and the operator $U_\sigma^k : \ell^\infty \to \widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$ is bounded and onto.

Next, we describe the definition of $\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$-interpolating sequences. Let $k \in \mathbb{N}$. For $u \in \widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$, we define a sequence of real numbers $T_\sigma^k u$ by

$$T_\sigma^k u = T_{\sigma,\mathbb{X}}^k u := \{t_j^{k+\sigma}\partial_t^k u(X_j)\}. \tag{1.5}$$

We say that $\{X_j\}$ is a $\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$-interpolating sequence of order k if the linear operator $T_\sigma^k : \widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma) \to \ell^\infty$ is bounded and onto. It is known that for every $k \in \mathbb{N}$, there exists a constant $C > 0$ such that

$$t^{k+\sigma}|\partial_t^k u(x,t)| \le C\|u\|_{\mathcal{B}_\alpha(\sigma)}$$

for all $u \in \widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$ and $(x,t) \in H$ (see (4) of Theorem 3.2 of [6]). Thus, $T_\sigma^k : \widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma) \to \ell^\infty$ is always bounded, and this is a reason why we consider a weight $t_j^{k+\sigma}$ in the definition of the operator T_σ^k. We note that our definitions and investigations for such sequences are more general. We study properties of operators $U_{\sigma,\mathbb{X}}^k$ and $T_{\sigma,\mathbb{X}}^k$ when k is a fractional order.

Representation theorems for holomorphic and harmonic functions in L^p were studied in [2]. Also, interpolating sequences for the classical Hardy space H^∞ were studied by L. Carleson [1], and many investigations on various settings are well known. In [6], the reproducing formula on the function space $\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$ is given. A representing sequence gives the discrete version of the reproducing formula on the function space $\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$. The interpolating sequences are closely related to representing sequences, and such sequences are very interesting in their own right. In this paper, we study representing and interpolating sequences on the α-parabolic Bloch type spaces $\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$.

2. Preliminaries

In this section, we recall some basic properties. We describe a fundamental solution of $L^{(\alpha)}$. For $x \in \mathbb{R}^n$, let

$$W^{(\alpha)}(x,t) := \begin{cases} \dfrac{1}{(2\pi)^n}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-t|\xi|^{2\alpha} + i\, x\cdot\xi)\, d\xi & (t > 0) \\ 0 & (t \le 0), \end{cases}$$

where $x \cdot \xi$ denotes the inner product on $\mathbb{R}^n$ and $|\xi| = (\xi\cdot\xi)^{1/2}$. The function $W^{(\alpha)}$ is a fundamental solution of $L^{(\alpha)}$ and it is $L^{(\alpha)}$-harmonic on H. Furthermore, $W^{(\alpha)} \in C^\infty(H)$.

Since we treat fractional calculus in our investigations, we recall the definitions of the fractional integral and differential operators for functions on $\mathbb{R}_+ = (0,\infty)$. (For details, see [3] .) For a real number $\kappa > 0$, let

$$\mathcal{FC}^{-\kappa} := \big\{\varphi \in C(\mathbb{R}_+)\ ;\ \exists\kappa' > \kappa \text{ s.t. } \varphi(t) = O(t^{-\kappa'})\ \ (t \to \infty)\ \big\}. \tag{2.1}$$

For a function $\varphi \in \mathcal{FC}^{-\kappa}$, we can define the fractional integral $\mathcal{D}_t^{-\kappa}\varphi$ of φ by

$$\mathcal{D}_t^{-\kappa}\varphi(t) := \frac{1}{\Gamma(\kappa)}\int_0^\infty \tau^{\kappa-1}\varphi(\tau+t)d\tau, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{2.2}$$

In particular, put $\mathcal{FC}^0 := C(\mathbb{R}_+)$ and $\mathcal{D}_t^0\varphi := \varphi$. Moreover, let

$$\mathcal{FC}^\kappa := \{\varphi\,;\ \partial_t^{\lceil\kappa\rceil}\varphi \in \mathcal{FC}^{-(\lceil\kappa\rceil-\kappa)}\}, \tag{2.3}$$

where $\lceil\kappa\rceil$ is the smallest integer greater than or equal to κ. Then, we can also define the fractional derivative $\mathcal{D}_t^\kappa\varphi$ of $\varphi \in \mathcal{FC}^\kappa$ by

$$\mathcal{D}_t^\kappa\varphi(t) := \mathcal{D}_t^{-(\lceil\kappa\rceil-\kappa)}\left((-\partial_t)^{\lceil\kappa\rceil}\varphi\right)(t), \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{2.4}$$

Clearly, when $\kappa \in \mathbb{N}_0$, the operator $\mathcal{D}_t^\kappa$ coincides with the ordinary differential operator $(-\partial_t)^\kappa$. For a multi-index $\gamma = (\gamma_1, \cdots, \gamma_n) \in \mathbb{N}_0^n$, let $\partial_x^\gamma := \partial_1^{\gamma_1}\cdots\partial_n^{\gamma_n}$.

We give the definition of the kernel function, which is the generalization of (1.3). Put $\Omega := \left\{\kappa \in \mathbb{R}\,;\ \kappa > -\frac{n}{2\alpha}\right\}$. Then, for $(\gamma,\kappa) \in \mathbb{N}_0^n \times \Omega$, Lemma 2.1 implies that a function $\omega_\alpha^{\gamma,\nu}$ on $H \times H$ can be defined by

$$\omega_\alpha^{\gamma,\nu}(X;Y) = \omega_\alpha^{\gamma,\nu}(x,t;y,s) := \partial_x^\gamma\mathcal{D}_t^\nu W^{(\alpha)}(x-y,t+s) - \partial_x^\gamma\mathcal{D}_t^\nu W^{(\alpha)}(-y,1+s) \tag{2.5}$$

for all $X = (x,t), Y = (y,s) \in H$. We may write $\omega_\alpha^\nu = \omega_\alpha^{0,\nu}$.

We also consider the subspace of $\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$. The α-parabolic little Bloch type space $\mathcal{B}_{\alpha,0}(\sigma)$ is the set of all functions $u \in \mathcal{B}_\alpha(\sigma)$ with

$$\lim_{(x,t)\to\partial H\cup\{\infty\}} t^\sigma\{t^{\frac{1}{2\alpha}}|\nabla_x u(x,t)| + t|\partial_t u(x,t)|\} = 0. \tag{2.6}$$

Furthermore, let $\widetilde{\mathcal{B}}_{\alpha,0}(\sigma)$ be the set of all functions $u \in \mathcal{B}_{\alpha,0}(\sigma)$ with $u(0,1) = 0$. Clearly, $\widetilde{\mathcal{B}}_{\alpha,0}(\sigma)$ is the closed subspace of $\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$ by the definition. We describe reproducing formulae by fractional derivatives on $\mathcal{B}_\alpha(\sigma)$. In particular, Lemma 2.1 is Theorem 5.7 of [6].

LEMMA 2.1. *Let $0 < \alpha \le 1$ and $\sigma > -m(\alpha)$. If real numbers $\kappa \in \mathbb{R}_+$ and $\nu \in \mathbb{R}$ satisfy $\kappa > -\sigma$ and $\nu > \sigma$, then*

$$u(x,t) - u(0,1) = \frac{2^{\kappa+\nu}}{\Gamma(\kappa+\nu)}\int_H \mathcal{D}_t^\kappa u(y,s)\omega_\alpha^\nu(x,t;y,s)s^{\kappa+\nu-1}dV(y,s) \tag{2.7}$$

for all $u \in \mathcal{B}_\alpha(\sigma)$ and $(x,t) \in H$, where dV is the Lebesgue volume measure on H. Furthermore, (2.7) *also holds for $\nu > \max\{0,\sigma\}$ when $\kappa = 0$.*

Now, we recall the definition of α-parabolic cylinders, which are introduced in [8]. The α-parabolic cylinders will be used for the definition of separated sequences below. For $Y = (y,s) \in H$ and $0 < \delta < 1$, an α-parabolic cylinder $S_\delta^{(\alpha)}(Y) = S_\delta^{(\alpha)}(y,s)$ is defined by

$$S_\delta^{(\alpha)}(y,s) := \left\{(x,t) \in H; |x-y| < \left(\tfrac{2\delta}{1-\delta^2}s\right)^{1/2\alpha},\ \tfrac{1-\delta}{1+\delta}s < t < \tfrac{1+\delta}{1-\delta}s\right\}.$$

Clearly, $\lim_{\delta\to1} S_\delta^{(\alpha)}(Y) = H$ and $S_\delta^{(\alpha)}(y,s) = \Phi_Y^{(\alpha)}\left(S_\delta^{(\alpha)}(0,1)\right)$ for each $Y \in H$, where $\Phi_Y^{(\alpha)}(X)$ is the function defined by

$$\Phi_Y^{(\alpha)}(X) := (s^{1/2\alpha}x + y, st), \quad X = (x,t) \in H.$$

Also, $V(S_\delta^{(\alpha)}(y,s)) = 2B_n\left(\frac{2\delta}{1-\delta^2}s\right)^{\frac{n}{2\alpha}+1}$, where B_n is the volume of the unit ball in $\mathbb{R}^n$. For $0 < \delta < 1$, we say that a sequence $\{X_j\} \subset H$ is δ-separated in the α-parabolic sense if α-parabolic cylinders $S_\delta^{(\alpha)}(X_j)$ are pairwise disjoint.

3. The $\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$-representing operator

In this section, we define $\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$-representing operators, and study their properties. First, we give the definition of the $\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$-representing operators. Let $\sigma > -m(\alpha)$ and $\mathbb{X} = \{X_j\} = \{(x_j, t_j)\}$ be a sequence in H. Furthermore, let $(\gamma, \kappa) \in \mathbb{N}_0^n \times \Omega$. For $\{\lambda_j\} \in \ell^\infty$, put

$$(3.1) \qquad U_\sigma^{\gamma,\kappa}\{\lambda_j\}(X) = U_{\sigma,\mathbb{X}}^{\gamma,\kappa}\{\lambda_j\}(X) := \sum_j \lambda_j t_j^{\frac{n+|\gamma|}{2\alpha}+\kappa-\sigma}\omega_\alpha^{\gamma,\kappa}(X;X_j), \qquad X \in H.$$

We say that $U_\sigma^{\gamma,\kappa}$ is the $\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$-representing operator of order (γ,κ) if $U_\sigma^{\gamma,\kappa}\{\lambda_j\} \in \widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$ for all $\{\lambda_j\} \in \ell^\infty$ and $U_\sigma^{\gamma,\kappa} : \ell^\infty \to \widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$ is bounded. We give a necessary and sufficient condition for a sequence $\{X_j\}$ in order that $U_\sigma^{\gamma,\kappa}$ is the $\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$-representing operator and also that $U_\sigma^{\gamma,\kappa}$ maps c_0 into $\widetilde{\mathcal{B}}_{\alpha,0}(\sigma)$, where c_0 is the subspace of ℓ^∞ consisting of sequences that converge to 0. We may regard a finite sequence as an element of c_0.

THEOREM 3.1. *Let $0 < \alpha \le 1$, $\sigma > -m(\alpha)$, $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$, and κ be a real number such that $\kappa > \sigma$. Furthermore, let $\mathbb{X} = \{X_j\} = \{(x_j,t_j)\}$ be a sequence in H. Then, $U_\sigma^{\gamma,\kappa}$ is the $\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$-representing operator of order (γ,κ) and $U_\sigma^{\gamma,\kappa}$ maps c_0 into $\widetilde{\mathcal{B}}_{\alpha,0}(\sigma)$ if and only if for any $0 < \delta < 1$, there exists $M \in \mathbb{N}$ such that $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 \cup \cdots \cup \mathbb{X}_M$ and each sequence $\mathbb{X}_i$ is δ-separated in the α-parabolic sense.*

4. The $\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$-interpolating operator

In this section, we define $\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$-interpolating operators, and study their properties. First, we give the definition of the $\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$-interpolating operators. Let $\sigma > -m(\alpha)$ and put $\Sigma_0 := \{0\} \cup \{\kappa \in \mathbb{R}\ ;\ \kappa > \max\{0, -\sigma\}\}$. Furthermore, let $\mathbb{X} = \{X_j\} = \{(x_j,t_j)\}$ be a sequence in H, and $(\gamma,\kappa) \in (\mathbb{N}_0^n \times \Sigma_0)\backslash\{(0,0)\}$. Then, for $u \in \widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$, we define a sequence of real numbers $T_\sigma^{\gamma,\kappa}u$ by

$$(4.1) \qquad T_\sigma^{\gamma,\kappa}u = T_{\sigma,\mathbb{X}}^{\gamma,\kappa}u := \left\{t_j^{\frac{|\gamma|}{2\alpha}+\kappa+\sigma}\partial_x^\gamma \mathcal{D}_t^\kappa u(X_j)\right\}.$$

We note that the linear operator $T_\sigma^{\gamma,\kappa} : \widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma) \to \ell^\infty$ is always bounded, and we call $T_\sigma^{\gamma,\kappa}$ the $\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$-interpolating operator of order (γ,κ). We also consider $T_\sigma^{\gamma,\kappa}$ on the subspace $\widetilde{\mathcal{B}}_{\alpha,0}(\sigma)$ of

$\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$. We shall give sufficient conditions for a sequence $\{X_j\}$ in order that $T_\sigma^{\gamma,\kappa}$ maps $\widetilde{\mathcal{B}}_{\alpha,0}(\sigma)$ into c_0. We give the following results.

THEOREM 4.1. *Let* $0 < \alpha \le 1$, $\sigma > -m(\alpha)$, *and* $(\gamma, \kappa) \in (\mathbb{N}_0^n \times \Sigma_0)\setminus\{(0,0)\}$. *Then, the following statements hold.*

(1) *If* $u \in \widetilde{\mathcal{B}}_{\alpha,0}(\sigma)$, *then* $\lim_{(x,t)\to\partial H\cup\{\infty\}} t^{\frac{|\gamma|}{2\alpha}+\kappa+\sigma}\partial_x^\gamma \mathcal{D}_t^\kappa u(x,t) = 0.$

(2) *If a sequence* $\mathbb{X} = \{X_j\} \subset H$ *satisfies* $X_j \to \partial H \cup \{\infty\} \quad (j \to \infty)$, *then* $T_\sigma^{\gamma,\kappa} = T_{\sigma,\mathbb{X}}^{\gamma,\kappa}$ *maps* $\widetilde{\mathcal{B}}_{\alpha,0}(\sigma)$ *into* c_0.

(3) *If for any* $0 < \delta < 1$, *there exists* $M \in \mathbb{N}$ *such that* $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 \cup \cdots \cup \mathbb{X}_M$ *and each sequence* $\mathbb{X}_i$ *is* δ*-separated in the* α*-parabolic sense, then* $T_\sigma^{\gamma,\kappa} = T_{\sigma,\mathbb{X}}^{\gamma,\kappa}$ *maps* $\widetilde{\mathcal{B}}_{\alpha,0}(\sigma)$ *into* c_0.

5. The $\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$-representing theorem

In this section, we give a representing theorem for the α-parabolic Bloch type spaces. We say that $\{X_j\}$ is a $\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$-representing sequence of order (γ, κ) if $U_\sigma^{\gamma,\kappa}\{\lambda_j\} \in \widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$ for all $\{\lambda_j\} \in \ell^\infty$ and the operator $U_\sigma^{\gamma,\kappa} : \ell^\infty \to \widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$ is bounded and onto. We also say that $\{X_j\}$ is a $\widetilde{\mathcal{B}}_{\alpha,0}(\sigma)$-representing sequence of order (γ, κ) if $U_\sigma^{\gamma,\kappa}\{\lambda_j\} \in \widetilde{\mathcal{B}}_{\alpha,0}(\sigma)$ for all $\{\lambda_j\} \in c_0$ and the operator $U_\sigma^{\gamma,\kappa} : c_0 \to \widetilde{\mathcal{B}}_{\alpha,0}(\sigma)$ is bounded and onto. In this section, we give a representing theorem for $\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$ and $\widetilde{\mathcal{B}}_{\alpha,0}(\sigma)$, that is, we give a sufficient condition for a sequence $\{X_j\}$ to be the $\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$-representing and $\widetilde{\mathcal{B}}_{\alpha,0}(\sigma)$-representing sequence.

Given $0 < \delta < 1$, we say that a sequence $\{X_j\} \subset H$ is a δ-lattice in the α-parabolic sense if $H = \bigcup_j S_\delta^{(\alpha)}(X_j)$ and $\{X_j\}$ is ε-separated in the α-parabolic sense for some $0 < \varepsilon < \delta$. The notion of the δ-lattice in the α-parabolic sense is introduced in [9] and an example of δ-lattice is given in Remark 4.3 of [9].

THEOREM 5.1. *Let* $0 < \alpha \le 1$, $\sigma > -m(\alpha)$, *and* κ *be a real number such that* $\kappa > \sigma$. *Then, there exists* $0 < \delta_0 < 1$ *such that if a sequence* $\{X_j\}$ *in* H *is a* δ*-lattice in the* α*-parabolic sense with* $0 < \delta \le \delta_0$, *then* $\{X_j\}$ *is a* $\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$*-representing and* $\widetilde{\mathcal{B}}_{\alpha,0}(\sigma)$*-representing sequence of order* $(0, \kappa)$.

6. The $\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$-interpolating theorem

In this section, we give a interpolating theorem for the α-parabolic Bloch type spaces. We say that $\{X_j\}$ is a $\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$-interpolating sequence of order (γ, κ) if the linear operator $T_\sigma^{\gamma,\kappa}$: $\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma) \to \ell^\infty$ is bounded and onto. We also say that $\{X_j\}$ is a $\widetilde{\mathcal{B}}_{\alpha,0}(\sigma)$-interpolating sequence of order (γ, κ) if $T_\sigma^{\gamma,\kappa} : \widetilde{\mathcal{B}}_{\alpha,0}(\sigma) \to c_0$ is bounded and onto. In this section, we give a interpolating theorem for $\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$ and $\widetilde{\mathcal{B}}_{\alpha,0}(\sigma)$, that is, we give a sufficient condition for a sequence $\{X_j\}$ to be the $\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$-interpolating and $\widetilde{\mathcal{B}}_{\alpha,0}(\sigma)$-interpolating sequence.

THEOREM 6.1. *Let* $0 < \alpha \le 1$, $\sigma > -m(\alpha)$, *and* $(\gamma, \kappa) \in (\mathbb{N}_0^n \times \Sigma_0)\setminus\{(0,0)\}$. *Then, there exists* $0 < \delta_0 < 1$ *such that if a sequence* $\{X_j\}$ *in* H *is* δ*-separated in the* α*-parabolic* *sense with $\delta_0 \leq \delta < 1$, then $\{X_j\}$ is a $\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$-interpolating and $\widetilde{\mathcal{B}}_{\alpha,0}(\sigma)$-interpolating sequence of order (γ, κ).*

References

[1] L. Carleson, An interpolation problem for bounded analytic functions, Amer. J. Math. **80**(1958), 921–930.

[2] R. Coifman and R. Rochberg, Representation theorems for holomorphic and harmonic functions in L^p, Astérisque **77**(1980), 11–66.

[3] Y. Hishikawa, Fractional calculus on parabolic Bergman spaces, Hiroshima Math. J. **38**(2008), 471–488.

[4] Y. Hishikawa, The reproducing formula with fractional orders on the parabolic Bloch space, to appear in J. Math. Soc. Japan.

[5] Y. Hishikawa, Representing sequences on parabolic Bergman spaces, to appear in J. Korean Math. Soc..

[6] Y. Hishikawa and M. Yamada, Function spaces of parabolic Bloch type, to appear in Hiroshima Math. Journal.

[7] M. Nishio, K. Shimomura and N. Suzuki, α-parabolic Bergman spaces, Osaka J. Math. **42**(2005), 133–162.

[8] M. Nishio, N. Suzuki, and M. Yamada, Interpolating sequences of parabolic Bergman spaces, Potential Analysis **28**, 357–378 (2008).

[9] M. Nishio, N. Suzuki, and M. Yamada, Carleson inequalities on parabolic Bergman spaces, Tohoku Math. J. **62**, 269–286 (2010).

Yôsuke Hishikawa
Department of General Education, Gifu National College of Technology
Kamimakuwa 2236-2, Motosu City, Gifu 501-0495, Japan
yosuke-h@gifu-nct.ac.jp
and
Masahiro Yamada
Department of Mathematics, Faculty of Education, Gifu University
Yanagido 1–1, Gifu 501–1193, Japan
yamada33@gifu-u.ac.jp

Generalized weighted Bergman spaces and fractional derivatives on the unit ball

信州大学総合工学系研究科　　武嶋　利直 (Toshinao Takeshima)

$\mathbb{C}^n$ の単位球 $\mathbb{B}_n$ 上の通常の荷重 Bergman 空間 $A^p_\alpha(\mathbb{B}_n)$ は weight α が、$(-1,\infty)$ であるときに定義される。これら通常の 2 つの荷重 Bergman 空間 $A^p_\alpha(\mathbb{B}_n)$, $A^q_\beta(\mathbb{B}_n)$ は $p=q$ のとき同型となり、その同型対応を与える作用素として fractional derivatives $\mathscr{R}_{s,t}$ が知られている。この講演内容の前半では、通常の荷重 Bergman 空間 $A^p_\alpha(\mathbb{B}_n)$ の weight α の範囲 $(-1,\infty)$ を、実数全体 $(-\infty,\infty)$ に拡張した一般化された荷重 Bergman 空間の精確な定義を与え、その位相線形空間としての基本構造を紹介する。後半では、通常の荷重 Bergman 空間についての上述の同型定理が, 一般化された荷重 Bergman 空間に対しても成立することを、[1] の結果を用いて証明する。これは、[2],Theorem 12 の別証明を与えている。

1　一般化された Bergman 空間の定義

$\mathbb{C}^n$ の単位球 $\mathbb{B}_n$ の通常の荷重 Bergman 空間を、記号 $A^p_\alpha(\mathbb{B}_n)$ $\big(0<p<\infty, \alpha\in(-1,\infty)\big)$ で表す。すなわち、

$$A^p_\alpha(\mathbb{B}_n)=\Big\{f\in H(\mathbb{B}_n):\|f\|_{A^p_\alpha(\mathbb{B}_n)}<\infty\Big\}.$$

ここで、$H(\mathbb{B}_n)$ は $\mathbb{B}_n$ 上の正則関数全体を表し、

$$d\nu_\alpha(z)=c_\alpha(1-|z|^2)^\alpha d\nu(z)\qquad(z\in\mathbb{B}_n),\qquad c_\alpha=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\Gamma(\alpha+1)},$$

$$\|f\|_{A^p_\alpha(\mathbb{B}_n)}=\Big\{\int_{\mathbb{B}_n}|f|^p\,d\nu_\alpha\Big\}^{\frac{1}{p}}\qquad\big(f\in H(\mathbb{B}_n)\big).$$

$f\in H(\mathbb{B}_n)$ に対し、その radial derivative を $\mathscr{R}f$ で表す。すなわち、$f=\sum_{j=0}^{\infty}f_j$ を f の原点における同次多項式展開とするとき、

$$\mathscr{R}f=\sum_{j=0}^{\infty}jf_j$$

と定義する。また、一般に $\{\mathscr{R}^kf\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ を次のように定義する。

$$\mathscr{R}^0f=f=\sum_{j=0}^{\infty}f_j\quad,\quad\mathscr{R}^1f=\mathscr{R}f=\sum_{j=0}^{\infty}jf_j$$

$k \geq 2$ のとき、

$$\mathscr{R}^k f = \mathscr{R}(\mathscr{R}^{k-1} f) = \sum_{j=0}^{\infty} j^k f_j \quad .$$

任意の $p \in \mathbb{R}_+$, 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し、一般化された荷重 Bergman 空間 $A^p_\alpha(\mathbb{B}_n)$ を定義する。ただし、$\mathbb{R}_+$ は正の実数全体とする。$I_{\alpha,p}, \kappa_{\alpha,p}$ を次のように定義する。

$$I_{\alpha,p} = \{k \in \mathbb{Z}_+ : pk + \alpha > -1\} = \mathbb{Z}_+ \cap (-\frac{\alpha+1}{p}, \infty),$$
$$\kappa_{\alpha,p} = \min I_{\alpha,p}$$

明らかに、

$$0 \in I_{\alpha,p} \Longleftrightarrow \kappa_{\alpha,p} = 0 \Longleftrightarrow \alpha \in (-1, \infty)$$

任意の $k \in I_{\alpha,p}$ に対し、$H(\mathbb{B}_n)$ の部分空間 $A^p_{\alpha,k}(\mathbb{B}_n)$ を、また $f \in H(\mathbb{B}_n)$ に対し、$\|f\|_{A^p_{\alpha,k}(\mathbb{B}_n)}$ を以下のように定義する。

$$k \in \mathbb{N} \text{ のとき、} \quad A^p_{\alpha,k}(\mathbb{B}_n) = \{f \in H(\mathbb{B}_n) : \mathscr{R}^k f \in A^p_{pk+\alpha}(\mathbb{B}_n)\},$$
$$\|f\|_{A^p_{\alpha,k}(\mathbb{B}_n)} = \left\{|f(0)|^p + \|\mathscr{R}^k f\|^p_{A^p_{pk+\alpha}(\mathbb{B}_n)}\right\}^{\frac{1}{p}}$$
$$k = 0 \text{ のとき、} \quad A^p_{\alpha,k}(\mathbb{B}_n) = A^p_\alpha(\mathbb{B}_n),$$
$$\|f\|_{A^p_{\alpha,k}(\mathbb{B}_n)} = \|f\|_{A^p_\alpha(\mathbb{B}_n)}$$

補題 1　$\alpha \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}_+$, に対し、次の (i),(ii), が成立する。

(i) $A^p_{\alpha,k}(\mathbb{B}_n) = A^p_{\alpha,k'}(\mathbb{B}_n)$ for $\forall\{k, k'\} \subset I_{\alpha,p}$

(ii) $\forall\{k, k'\} \subset I_{\alpha,p}$に対して、次の式を満たす$n, p, \alpha, k, k'$のみに依存する正定数$C_1, C_2$が存在する。

$$C_1 \|f\|_{A^p_{\alpha,k}(\mathbb{B}_n)} \leq \|f\|_{A^p_{\alpha,k'}(\mathbb{B}_n)} \leq C_2 \|f\|_{A^p_{\alpha,k}(\mathbb{B}_n)} \qquad (\forall f \in H(\mathbb{B}_n))$$

定義　$\alpha \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}_+$ に対し、一般化された荷重 Bergman 空間 $A^p_\alpha(\mathbb{B}_n)$ を次のように定義する。

$$A^p_\alpha(\mathbb{B}_n) = A^p_{\alpha,\kappa_{\alpha,p}}(\mathbb{B}_n)$$

また、任意の $f \in H(\mathbb{B}_n)$ に対し、

$$\|f\|_{A^p_\alpha(\mathbb{B}_n)} = \|f\|_{A^p_{\alpha,\kappa_{\alpha,p}}(\mathbb{B}_n)}$$

と定義する。

命題 2　$\alpha \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}_+$ とする。
$p \in [1, \infty)$ のとき、
一般化された荷重 Bergman 空間 $A^p_\alpha(\mathbb{B}_n)$ は、norm $\|\cdot\|_{A^p_\alpha(\mathbb{B}_n)}$ に関して Banach 空間である。
$p \in (0, 1]$ のとき、
一般化された荷重 Bergman 空間 $A^p_\alpha(\mathbb{B}_n)$ は、距離 $d_{A^p_\alpha(\mathbb{B}_n)}$ に関して $\mathcal{F}$-空間である。ただし、$d_{A^p_\alpha}(f,g) = \|f-g\|^p_{A^p_\alpha} \qquad \big(\{f,g\} \subset A^p_\alpha(\mathbb{B}_n)\big).$

2　一般化された Banach 空間に対する同型定理

$\{s,t\} \subset \mathbb{C}, n+s \notin (-\mathbb{N}), n+s+t \notin (-\mathbb{N})$, $f \in H(\mathbb{B}_n)$ に対し、fractional derivatives $\mathscr{R}^{s,t}f, \mathscr{R}_{s,t}f$ を次のように定義する。
$f = \sum\limits_{j=0}^{\infty} f_j$ を f の原点における同次多項式展開 とするとき、

$$\mathscr{R}^{s,t}f = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1+s)\Gamma(n+1+k+s+t)}{\Gamma(n+1+s+t)\Gamma(n+1+k+s)}\, f_k,$$
$$\mathscr{R}_{s,t}f = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1+s+t)\Gamma(n+1+k+s)}{\Gamma(n+1+s)\Gamma(n+1+k+s+t)}\, f_k$$

容易にわかるように、$\mathscr{R}^{s,t}, \mathscr{R}_{s,t}$ は何れも $\mathbb{B}_n$ 上の広義一様収束位相に関し $H(\mathbb{B}_n)$ から $H(\mathbb{B}_n)$ の上への連続な全単射線型作用素であり、$(\mathscr{R}^{s,t})^{-1} = \mathscr{R}_{s,t}$ である。

$f \in H(\mathbb{B}_n), p \in (0,\infty], r \in [0,1)$ に対し、平均 $M_p(r,f)$ を通常のように定義する。すなわち、

$$M_p(r,f) = \Big\{ \int_{\mathbb{S}_n} \big|f(r\zeta)\big|^p \, d\sigma(\zeta) \Big\}^{\frac{1}{p}} \quad (0 < p < \infty \text{ のとき})$$
$$M_\infty(r,f) = \sup_{\zeta \in \mathbb{S}_n} \big|f(r\zeta)\big|.$$

ここで、$\mathbb{S}_n = \partial\mathbb{B}_n$ であり , σ は $\mathbb{S}_n$ 上の正規化された Euclidean surface measure である。
次の 2 つの定理 TheoremA , TheoremB は、それぞれ、[1] の Theorem1,Theorem2 である。

TheoremA.　$p \in (0,\infty],\ q \in \mathbb{R}_+, \alpha \in \mathbb{R},\ \{s,t\} \subset \mathbb{C}, \tilde{t} = \Re t \in \mathbb{R}_+,\ \ n+s \notin (-\mathbb{N}),\ n+s+t \notin (-\mathbb{N})$ とする。このとき、$n,p,q,\alpha,s,t,$ のみに依存する正定数 C が存在し、任意の $f \in H(\mathbb{B}_n)$ に対し、

$$\int_0^1 (1-r)^{\alpha+q\tilde{t}} M^q_p(r, \mathscr{R}^{s,t}f)\, dr \le C \int_0^1 (1-r)^\alpha M^q_p(r,f)\, dr$$

が成立する。

TheoremB. $p \in (0,\infty],\ q \in \mathbb{R}_+, \alpha \in (-1,\infty),\ \{s,t\} \subset \mathbb{C}, \tilde{t} = \Re t \in \mathbb{R}_+, n+s \notin (-\mathbb{N}),\ n+s+t \notin (-\mathbb{N})$ とする。このとき、$n,p,q,\alpha,s,t,$ のみに依存する正定数 C が存在し、任意の $f \in H(\mathbb{B}_n)$ に対し、

$$\int_0^1 (1-r)^\alpha M_p^q(r,\mathscr{R}_{s,t}f)\,dr \le C\int_0^1 (1-r)^{\alpha+q\tilde{t}} M_p^q(r,f)\,dr$$

が成立する。

補助定理. $\alpha \in (-1,\infty),\ p \in \mathbb{R}_+$ とする。このとき、n,p,α のみに依存する 2 つの正定数 C_1, C_2 が存在し、任意の $f \in H(\mathbb{B}_n)$ に対し、

$$C_1\|f\|^p_{A^p_\alpha(\mathbb{B}_n)} \le \int_0^1 (1-r)^\alpha M_p^p(r,f)\,dr \le C_2\|f\|^p_{A^p_\alpha(\mathbb{B}_n)}$$

が成立する。

[**同型定理**.] $\alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}_+,\ s \in \mathbb{C},\ t = \frac{\alpha-\beta}{p}, n+s \notin (-\mathbb{N}),\ n+s+t \notin (-\mathbb{N})$ とする。このとき、

$$\mathscr{R}_{s,t} : A^p_\alpha(\mathbb{B}_n) \longrightarrow A^p_\beta(\mathbb{B}_n)$$

は全単射有界線形作用素である。

証明の概略. $t > 0$ のときのみ示せば十分である。$^\forall k \in \mathbb{N} \cap I_{\alpha,p} \cap I_{\beta,p}$ を固定する。TheoremA,TheoremB, より、

$^\exists C_1 \in \mathbb{R}_+$

$$s.t. \quad \int_0^1 (1-r)^{kp+\alpha} M_p^p(r,\mathscr{R}^{s,t}f)\,dr \le C_1\int_0^1 (1-r)^{kp+\beta} M_p^p(r,f)\,dr \qquad (1)$$

$^\exists C_2 \in \mathbb{R}_+$

$$s.t. \quad \int_0^1 (1-r)^{kp+\beta} M_p^p(r,\mathscr{R}^{s,t}f)\,dr \le C_2\int_0^1 (1-r)^{kp+\alpha} M_p^p(r,f)\,dr \qquad (2)$$

補助定理より、

$^\exists\{C_3, C_4\} \subset \mathbb{R}_+$

$$\text{s.t} \quad C_3\|f\|^p_{A^p_{pk+\alpha}} \le \int_0^1 (1-r)^{pk+\alpha} M_p^p(r,f)\,dr \le C_4\|f\|^p_{A^p_{pk+\alpha}} \qquad (3)$$

$^\exists\{C_5, C_6\} \subset \mathbb{R}_+$

$$\text{s.t} \quad C_5\|f\|^p_{A^p_{pk+\beta}} \le \int_0^1 (1-r)^{pk+\beta} M_p^p(r,f)\,dr \le C_6\|f\|^p_{A^p_{pk+\beta}} \qquad (4)$$

① $\qquad \|\mathscr{R}_{s,t}f\|^p_{A^p_\beta} \le C\|f\|^p_{A^p_\alpha}$

$(\because)$

$$\begin{aligned}
\|f\|^p_{A^p_{\alpha,k}} &= |f(0)|^p + \|\mathscr{R}^k f\|^p_{A^p_{pk+\alpha}} \\
\text{(3) より、} &\ge |f(0)|^p + \frac{1}{C_4}\int_0^1 (1-r)^{pk+\alpha} M_p^p(r, R^k f)\,dr \\
\text{(2) より、} &\ge |f(0)|^p + \frac{1}{C_2C_4}\int_0^1 (1-r)^{pk+\beta} M_p^p(r, R_{s,t}R^k f)\,dr \\
\text{(4) より、} &\ge |(R_{s,t})f(0)|^p + \frac{C_5}{C_2C_4}\|\mathscr{R}^k\mathscr{R}_{s,t}f\|_{A^p_{pk+\beta}} \\
&\ge C_7\Big\{|(\mathscr{R}_{s,t})f(0)|^p + \|\mathscr{R}^k\mathscr{R}_{s,t}f\|_{A^p_{pk+\beta}}\Big\} = C_7\|\mathscr{R}_{s,t}f\|^p_{A^p_{\beta,k}}
\end{aligned}$$

② $\qquad \|\mathscr{R}^{s,t}f\|^p_{A^p_\alpha} \le C_8\|f\|^p_{A^p_\beta}$

$(\because)$ ①と同様 ((1) と (3),(4) の右側の評価を使う)

③ $(\mathscr{R}^{s,t})^{-1} = \mathscr{R}_{s,t}$ だから、①、②より、

$$\mathscr{R}_{s,t} : A^p_\alpha(\mathbb{B}_n) \longrightarrow A^p_\beta(\mathbb{B}_n) \quad \text{は全単射有界線型作用素}$$

$\square$

参考文献

[1] Y.Matsugu and T.Takeshima, A complete form of the Stoll-Shi's theorem concerning the fractional integrals of holomorphic functions, Far East J.Math.Sci.**44**(2010),197-218.

[2] R.Zhao and K.Zhu, *Theory of Bergman Spaces in the the Unit Ball of* $\mathbb{C}^n$, Mémoires de la SMF 115, 2008.

[3] K.Zhu, *Spaces of Holomorphic Functions in the Unit Ball*, Springer-Verlag, New York, 2005.

Differences of weighted composition operators between H^∞ and the Bloch space

茨城大学工学部 細川 卓也 (Takuya Hosokawa)

1 Introduction

Let $\mathbb{D}$ be the open unit disk in the complex plane and let $H(\mathbb{D})$ be the space of all analytic functions on $\mathbb{D}$. Denote by $S(\mathbb{D})$ the set of analytic self-maps of $\mathbb{D}$. We define the composition operator C_φ by $C_\varphi f(z) = f \circ \varphi(z)$ for $\varphi \in S(\mathbb{D})$ and the multiplication operator M_u by $M_u f(z) = u(z)f(z)$ for $u \in H(\mathbb{D})$. Moreover we define the weighted composition operator uC_φ as the product of M_u and C_φ, that is,

$$uC_\varphi f(z) = u(z) f \circ \varphi(z).$$

Denote the set of all bounded analytic functions on $\mathbb{D}$ by H^∞. Then H^∞ is a Banach algebra with the supremum norm

$$\|f\|_\infty = \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)|.$$

We recall the Bloch space $\mathcal{B}$ consists of all $f \in H(\mathbb{D})$ such that

$$|\!|\!| f |\!|\!| = \sup_{z\in\mathbb{D}} (1-|z|^2)|f'(z)| < \infty.$$

Then $|\!|\!| \cdot |\!|\!|$ is a complete semi-norm on $\mathcal{B}$ and is Möbius invariant. It is well known that $\mathcal{B}$ is a Banach space under the norm $\|f\|_\mathcal{B} = |f(0)| + |\!|\!| f |\!|\!|$. Note that $|\!|\!| f |\!|\!| \le \|f\|_\infty$ for $f \in H^\infty$, and hence $H^\infty \subset \mathcal{B}$.

We use the following lemma to characterize the compactness of weighted composition operators.

Lemma 1.1 (Weak Convergence Lemma) *Let X and Y be H^∞ or $\mathcal{B}$. Let $\{f_n\}$ be a bounded sequence in X such that f_n converges to 0 uniformly on every compact subset of $\mathbb{D}$. Then $uC_\varphi - vC_\psi : X \to Y$ is compact if and only if $\|(uC_\varphi - vC_\psi)f_n\|_Y \to 0$.*

Madigan and Matheson [10] characterized the compact composition operators on the Bloch space using the hyperbolic derivative $\varphi^\#$ defined by

$$\varphi^\#(z) = \frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}\,\varphi'(z).$$

For $p \in \mathbb{D}$, the automorphism α_p of $\mathbb{D}$ exchanging 0 for p has the following form;

$$\alpha_p(z) = \frac{p - z}{1 - \overline{p}z}.$$

For z, w in $\mathbb{D}$, the pseudo-hyperbolic distance $\rho(z, w)$ and the hyperbolic metric $\rho(z, w)$ is given by

$$\rho(z, w) = |\alpha_z(w)| = \left|\frac{z - w}{1 - \overline{z}w}\right|, \quad \beta(z, w) = \frac{1}{2}\log\frac{1 + \rho(z, w)}{1 - \rho(z, w)}.$$

Let X be a Banach space of analytic functions on $\mathbb{D}$ and z, w be two points in $\mathbb{D}$. The induced distance $d_X(z, w)$ on X defined by

$$d_X(z, w) = \sup\{|f(z) - f(w)| : \|f\|_X \leq 1\}$$

It is well known that

$$d_{H^\infty}(z, w) = \frac{2 - 2\sqrt{1 - \rho(z, w)^2}}{\rho(z, w)}$$

and

$$d_{\mathcal{B}}(z, w) = \beta(z, w)$$

(see [9] and [14]). Putting $w = 0$ in the equation above, we get the growth condition for Bloch functions;

$$|f(z)| \leq |f(0)| + \|\|f\|\| \, \beta(z, 0).$$

The set of composition operators on analytic functional space is not a linear space. Shapiro and Sundberg [13] raised the problems on topological structure for the case of H^2. The compact differences of two composition operators were studied in the characterization of the path component.

Theorem 1.2 (H-Izuchi-Zheng [4], MacCluer-Ohno-Zhao [8]) *Let φ and ψ be in $S(\mathbb{D})$. Then the followings hold. Then the followings are equivalence.*

(i) $C_\varphi - C_\psi : H^\infty \to H^\infty$ *is compact,*

(ii) $C_\varphi - C_\psi : \mathcal{B} \to H^\infty$ *is compact,*

(iii) $\lim_{|\varphi(z)| \to 1} \rho(\varphi(z), \psi(z)) = \lim_{|\psi(z)| \to 1} \rho(\varphi(z), \psi(z)) = 0.$

To consider the differences of two composition operators on $\mathcal{B}$, we define the Bloch type induced distance $\flat(z, w)$ by

$$\flat(z, w) = \sup_{\|\|f\|\| \leq 1} |(1 - |z|^2)f(z)' - (1 - |w|^2)f'(w)|.$$

Then we have the following estimate.

Proposition 1.3 (H-Ohno [5]) *For any $z, w \in \mathbb{D}$,*

$$\rho(z, w)^2 \leq \flat(z, w) \leq 20\rho(z, w).$$

The compactness of $C_\varphi - C_\psi$ on $\mathcal{B}$ was characterized in [5] For the weighted case, $uC_\varphi - vC_\psi$ on H^∞ was studied in [3], $uC_\varphi - vC_\psi$ on $\mathcal{B}$ was also studied in [2], In the sequel of this report, we consider the cases of $uC_\varphi - vC_\psi : \mathcal{B} \to H^\infty$ and $uC_\varphi - vC_\psi : H^\infty \to \mathcal{B}$.

2 $uC_\varphi - vC_\psi : \mathcal{B} \to H^\infty$

We introduce Ohno's result.

Theorem 2.1 (Ohno [11], [3]) *Let $u \in H(\mathbb{D})$ and $\varphi \in S(\mathbb{D})$.*
(i) $uC_\varphi : \mathcal{B} \to H^\infty$ is bounded if and only if $u \in H^\infty$ and $\sup_{z\in\mathbb{D}} |u(z)|\beta(\varphi(z), 0) < \infty$.
(ii) Suppose that $uC_\varphi : \mathcal{B} \to H^\infty$ is bounded. Then $uC_\varphi : \mathcal{B} \to H^\infty$ is compact if and only if $\lim_{|\varphi(z)|\to 1} |u(z)|\beta(\varphi(z), 0) = 0$.

To discuss the boundary behaviors, define the sets of sequences in $\mathbb{D}$.

Definition 2.2 *Let $\{z_n\}$ be a convergent sequence in $\mathbb{D}$ and $\Delta = \{\{z_n\} \subset \mathbb{D} : |z_n| \to 1\}$. We write $\tilde{\beta}(z) = \max\{1, \beta(z, 0)\}$. Let $u \in H(\mathbb{D})$ and $\varphi \in S(\mathbb{D})$. Define*

$$D_{u,\varphi} = \big\{\{z_n\} \in \Delta : |z_n| \to 1,\ |u(z_n)|\tilde{\beta}(\varphi(z_n)) \to \infty\big\}$$

and

$$E_{u,\varphi} = \big\{\{z_n\} \in \Delta : |\varphi(z_n)| \to 1,\ |u(z)|\beta(\varphi(z), 0) \not\to 0\big\}.$$

Moreover we define that $\Delta_{u,\varphi} = D_{u,\varphi} \cup E_{u,\varphi}$.

Then $uC_\varphi : \mathcal{B} \to H^\infty$ is bounded if and only if $D_{u,\varphi} = \emptyset$, and $uC_\varphi : \mathcal{B} \to H^\infty$ is compact if and only if $\Delta_{u,\varphi} = \emptyset$.

Theorem 2.3 (H-Ohno [6]) *Let $u, v \in H(\mathbb{D})$ and $\varphi, \psi \in S(\mathbb{D})$. Suppose that neither uC_φ nor vC_ψ is bounded from $\mathcal{B}$ to H^∞. Then $uC_\varphi - vC_\psi : \mathcal{B} \to H^\infty$ is bounded if and only if the following conditions hold:*
(i) $D_{u,\varphi} = D_{v,\psi}$.
(ii) $\sup_{\{z_n\}\in D_{u,\varphi}} \lim_{n\to\infty} |u(z_n) - v(z_n)|\tilde{\beta}(\varphi(z_n)) < \infty$.
(iii) $\sup_{\{z_n\}\in D_{u,\varphi}} \lim_{n\to\infty} |u(z_n)|\beta(\varphi(z_n), \psi(z_n)) < \infty$.

It is possible to replace φ with ψ in *(ii)* and also u with v in *(iii)*.

Example 2.4 *Let $\sigma(z) = (1 + z)/(1 - z)$. Put*

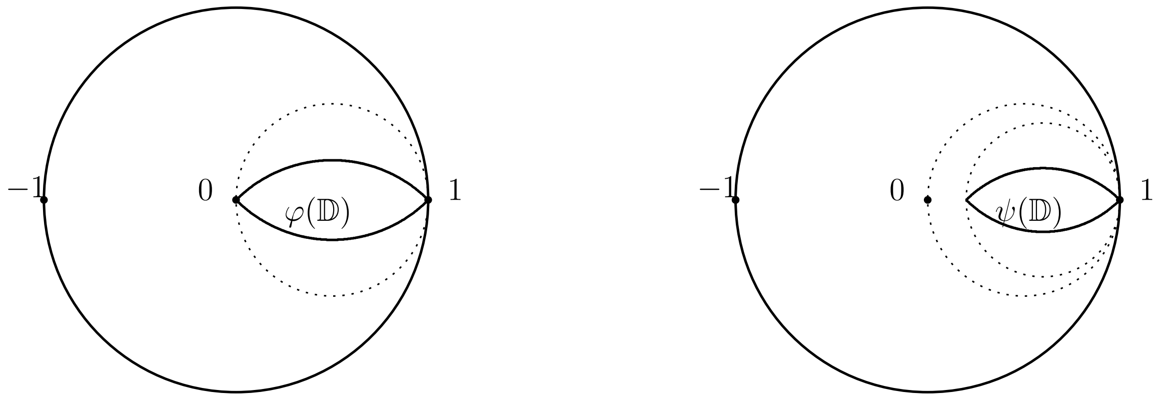
$$\ell(z) = \frac{\sqrt{\sigma(z)} - 1}{\sqrt{\sigma(z)} + 1} \quad \text{and} \quad \varphi(z) = \frac{\ell(z) + 1}{2}.$$

For enough small $\varepsilon > 0$, put $\tau(z) = z + \varepsilon(1 - z)^2$ and $\psi(z) = \tau(\varphi(z))$.
(i) Take a function $u \in H^\infty$ and put $v = u + 1$. Then both uC_φ and vC_ψ are bounded on H^∞, and hence $uC_\varphi - vC_\psi$ is also bounded on H^∞. But $uC_\varphi - vC_\psi : \mathcal{B} \to H^\infty$ is not bounded since $|u(z) - v(z)|\tilde{\beta}(\varphi(z)) = \tilde{\beta}(\varphi(z)) \to \infty$ as $z \to 1$.

(ii) Put

$$s(z) = \left(\log \log \frac{e^e}{1 - \varphi(z)} \right)^{-1}$$

and $t(z) = s(z) - (1 - \varphi(z))(1 - \psi(z))$. *Then both* sC_φ *and* tC_ψ *are bounded on* H^∞. *Neither* sC_φ *nor* tC_ψ *is bounded from* $\mathcal{B}$ *to* H^∞, *but* $sC_\varphi - tC_\psi : \mathcal{B} \to H^\infty$ *is bounded.*



Theorem 2.5 (H-Ohno [6]) *Let* $u, v \in H^\infty$ *and* $\varphi, \psi \in S(\mathbb{D})$. *Suppose that* $uC_\varphi - vC_\psi : \mathcal{B} \to H^\infty$ *is bounded and neither* uC_φ *nor* vC_ψ *is compact. Then* $uC_\varphi - vC_\psi : \mathcal{B} \to H^\infty$ *is compact if and only if the following conditions hold:*

(i) $\Delta_{u,\varphi} = \Delta_{v,\psi}$.

(ii) $\lim_{n\to\infty} |u(z_n) - v(z_n)|\beta(\varphi(z_n), 0) = 0$ *for any* $\{z_n\} \in \Delta_{u,\varphi}$.

(iii) $\lim_{n\to\infty} |u(z_n)|\beta(\varphi(z_n), \psi(z_n)) = 0$ *for any* $\{z_n\} \in \Delta_{u,\varphi}$.

It is possible to replace φ with ψ in *(ii)* and also u with v in *(iii)*.

Example 2.6 *Let* $\varphi(z)$ *and* $\psi(z)$ *be the same maps in Example 2.4.*

(i) Take a polynomial $p(z)$ *such that* $p(1) \neq 0$ *and put*

$$q(z) = p(z) + \left(\log \log \frac{e}{1 - \varphi(z)} \right)^{-1}.$$

Then both pC_φ *and* qC_ψ *are bounded on* H^∞, *but are not compact. The difference* $pC_\varphi - qC_\psi$ *is compact on* H^∞. *But* $pC_\varphi - qC_\psi : \mathcal{B} \to H^\infty$ *is not bounded, and hence is not compact.*

(ii) Put

$$\mu(z) = \left(\log \frac{e}{1 - \varphi(z)} \right)^{-1}$$

and $\nu(z) = \mu(z) - (1 - \varphi(z))(1 - \psi(z))$. *Then both* μC_φ *and* νC_ψ *are compact on* H^∞, *but are not compact from* $\mathcal{B}$ *to* H^∞. *We can see that* $\mu C_\varphi - \nu C_\psi : \mathcal{B} \to H^\infty$ *is compact.*

3 $uC_\varphi - vC_\psi : H^\infty \to \mathcal{B}$

In this section we consider the weighted composition operators acting from H^∞ to $\mathcal{B}$. We introduce the characterization of boundedness and compactness of uC_φ on $\mathcal{B}$.

Theorem 3.1 (Ohno [11]) *Let $u \in H(\mathbb{D})$ and $\varphi \in S(\mathbb{D})$. Then the followings hold.*

(i) $uC_\varphi : H^\infty \to \mathcal{B}$ *is bounded if and only if* $\sup_{z\in\mathbb{D}} \left|u(z)\, \varphi^\#(z)\right| < \infty$ *and* $u \in \mathcal{B}$.

(ii) Suppose uC_φ is bounded on $\mathcal{B}$. Then $uC_\varphi : H^\infty \to \mathcal{B}$ is compact if and only if $\lim_{|\varphi(z)|\to 1} \left|u(z)\, \varphi^\#(z)\right| = 0$ *and* $\lim_{|\varphi(z)|\to 1} (1-|z|^2)\, |u'(z)| = 0$.

Here we characterize the boundedness of $uC_\varphi - vC_\psi : H^\infty \to \mathcal{B}$.

Theorem 3.2 (H-Ohno [7]) *Let $u, v \in \mathcal{B}$ and $\varphi, \psi \in S(\mathbb{D})$. Suppose that uC_φ and vC_ψ are not bounded from H^∞ to $\mathcal{B}$. Then $uC_\varphi - vC_\psi : H^\infty \to \mathcal{B}$ is bounded if and only if the followings hold:*

(i) $\sup_{z\in D} |u(z)\varphi^\#(z) - v(z)\psi^\#(z)| < \infty$.

(ii) $\sup_{z\in D} |u(z)\varphi^\#(z)|\rho(\varphi(z), \psi(z)) < \infty$.

(iii) $u - v \in \mathcal{B}$.

(iv) $\sup_{z\in D} (1-|z|^2)|u'(z)|\rho(\varphi(z), \psi(z)) < \infty$.

It is possible to replace u with v, and φ with ψ in *(ii)*, and also u with v in *(iv)*.

Next we consider compact differences from H^∞ to $\mathcal{B}$.

Definition 3.3 *Let $u \in H(\mathbb{D})$ and $\varphi \in S(\mathbb{D})$. Put*

$$\Gamma^\#_{u,\varphi} = \Big\{ \{z_n\} \in \Delta : |\varphi(z_n)| \to 1, |u(z_n)\varphi^\#(z_n)| \not\to 0 \Big\}$$

and

$$\Lambda_{u,\varphi} = \Big\{ \{z_n\} \in \Delta : |\varphi(z_n)| \to 1, (1-|z_n|^2)|u'(z_n)| \not\to 0 \Big\}.$$

Then $uC_\varphi : H^\infty \to \mathcal{B}$ is compact if and only if $\Gamma^\#_{u,\varphi} = \Lambda_{u,\varphi} = \emptyset$.

Theorem 3.4 (H-Ohno [7]) *Let u, v be in $\mathcal{B}$ and $\varphi, \psi \in S(\mathbb{D})$. Suppose that $uC_\varphi - vC_\psi$ is bounded on $\mathcal{B}$, but neither uC_φ nor vC_ψ is compact. Then $uC_\varphi - vC_\psi : H^\infty \to \mathcal{B}$ is compact if and only if the followings hold:*

(i) $\Gamma^\#_{u,\varphi} = \Gamma^\#_{v,\psi}$.

(ii) $\lim_{n\to\infty} |u(z_n)\, \varphi^\#(z_n) - v(z_n)\, \psi^\#(z_n)| = 0$ *for any* $\{z_n\} \in \Gamma^\#_{u,\varphi}$.

(iii) $\lim_{n\to\infty} |u(z_n)\, \varphi^\#(z_n)|\, \rho(\varphi(z_n), \psi(z_n)) = 0$ *for any* $\{z_n\} \in \Gamma^\#_{u,\varphi}$.

(iv) $\Lambda_{u,\varphi} = \Lambda_{v,\psi}$.

(v) $\lim_{n\to\infty} (1-|z_n|^2)|u'(z_n) - v'(z_n)| = 0$ *for any* $\{z_n\} \in \Lambda_{u,\varphi}$.

(vi) $\lim_{n\to\infty} (1-|z_n|^2)|u'(z_n)|\, \rho(\varphi(z_n), \psi(z_n)) = 0$ *for any* $\{z_n\} \in \Lambda_{u,\varphi}$.

It is possible to replace u with v, and φ with ψ in *(iii)*, and also u with v in *(vi)*.

参考文献

[1] C. C. Cowen and B. D. MacCluer, *Composition Operators on Spaces of Analytic Functions*, CRC Press, Boca Raton, 1995.

[2] T. Hosokawa, *Differences of weighted composition operators on the Bloch spaces*, *Complex Analysis and Operator Theory 3* (2009), 847-866.

[3] T. Hosokawa, K. Izuchi and S. Ohno, *Topological structure of the space of weighted composition operators on H^∞*, *Integral Equations Operator Theory* **53** (2005), 509–526.

[4] T. Hosokawa, K. Izuchi and D. Zheng, *Isolated points and essential components of composition operators on H^∞*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **130** (2002), 1765–1773.

[5] T. Hosokawa and S. Ohno, *Differences of composition operators on the Bloch spaces*, *J. Operator Theory* **57** (2007), 229–242.

[6] T. Hosokawa and S. Ohno, *Differences of weighted composition operators acting from Bloch space to H^∞*, to appear in *Trans. Amer. Math. Soc.*

[7] T. Hosokawa and S. Ohno, *Differences of weighted composition operators acting from H^∞ to Bloch space*, preprint.

[8] B. D. MacCluer, S. Ohno and R. Zhao, *Topological structure of the space of composition operators on H^∞*, *Integral Equations Operator Theory* **40** (2001), 481–494.

[9] K. Madigan, *Composition operators into Lipschitztype spaces.* Thesis, SUNY Albany, 1993.

[10] K. Madigan, A. Matheson, *Compact composition operators on the Bloch space*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **347** (1995), 2679–2687.

[11] S. Ohno, *Weighted composition operators between H^∞ and the Bloch space*, Taiwanese J. Math. **5** (2001), 555–563.

[12] S. Ohno and R. Zhao, *Weighted composition operators on the Bloch space*, *Bull. Austral. Math. Soc.* **63** (2001), 177–185.

[13] J. Shapiro and C. Sundberg, *Isolation amongst the composition operators*, *Pacific J. Math.* **145** (1990), 117–152.

[14] K. Zhu, *Operator Theory in Function Spaces*, Dekker, New York, 1990; 2nd ed. by Amer. Math. Soc., Providence, 2007.

参加者 名簿

氏名 (敬称略)	所 属
飯田 安保	岩手医科大学 共通教育センター
植木 誠一郎	茨城大学 工学部
春日 一浩	工学院大学 学習支援センター
川村 一宏	筑波大学 数理物質科学研究科 数学専攻
倉橋 宏至	信州大学 総合工学系研究科 Ｄ１
栗林 勝彦	信州大学 理学部
古清水 大直	信州大学 総合工学系研究科 Ｄ２
小松 良大	信州大学 工学系研究科 Ｍ１
齋藤 洋樹	東京理科大学 理学研究科 数学専攻 Ｄ３
謝 賓	信州大学 国際若手研究者育成拠点
神保 敏弥	奈良教育大学 名誉教授
瀬戸 道生	島根大学 総合理工学部
高木 啓行	信州大学 理学部
高橋 眞映	山形大学 名誉教授
高山 琢磨	亜細亜大学 法学部 非常勤
武嶋 利直	信州大学 総合工学系研究科 Ｄ１
鶴見 和之	東京電機大学
富山 淳	東京都立大学 名誉教授
荷見 守助	茨城大学 名誉教授
羽鳥 理	新潟大学 自然科学系 (理学部)
濱田 裕康	九州大学 数理学府 Ｄ３
平澤 剛	茨城大学 工学部
細川 卓也	茨城大学 工学部
三浦 毅	山形大学 理工学研究科
嶺 幸太郎	筑波大学 数理物質科学研究科
山路 哲史	名古屋大学 多元数理科学研究科 Ｄ３
山田 雅博	岐阜大学 教育学部
渡邉 恵一	新潟大学 自然科学系 (理学部)
渡邉 誠治	新潟工科大学
浅貝 公斗	信州大学 理学部 学生
神山 俊	信州大学 理学部 学生
船川 大樹	信州大学 理学部 学生