2009年度 関数環研究集会

報　告　集

2010年 7月

2009 年度の関数環研究集会は，丹羽 典郎先生に会場をご手配いただき，日本大学 薬学部にて，2009 年 11 月 26 日 (木)・27 日 (金) の 2 日間，開催されました*。大勢の方々にご参加いただき，11 の講演が行われました。2 日間，有意義な情報交換や活発な討論ができ，充実した集会になりました。ご講演くださった皆様をはじめ，ご参加くださった皆様，そして，集会にご協力くださいました皆様に，心よりお礼申し上げます。

講演者の方々には報告原稿をお書きいただきましたので，ここに取りまとめ，報告集といたします。

世話人： 信州大学 理学部　高木 啓行

* 会場費は，山形大学 理工学研究科の三浦 毅先生のご援助と，信州大学 学長裁量経費「数理科学分野の連携と融合，創成：信州数理科学研究センター特別重点研究」によって，賄いました。

2009年度 関数環研究集会 プログラム

11月26日(木)

[1] 13 : 30 〜 14 : 00　植木 誠一郎　(茨城大学 工学部)
Zygmund F-algebra の等距離写像 1

[2] 14 : 05 〜 14 : 35　古清水 大直　(信州大学 総合工学系研究科 D 1)
Lipschitz 空間上のシフト作用素 3

[3] 14 : 50 〜 15 : 20　嶺　幸 太 郎　(筑波大学 数理物質科学研究科)
コンパクト化の近似定理 8

[4] 15 : 25 〜 15 : 55　平　澤　　剛　(茨城大学 工学部)
対称作用素と自己共役作用素の位相的な関係について 15

[5] 16 : 00 〜 16 : 30　新 藤　瑠 美　(新潟大学 自然科学研究科 D 3)
関数環の同型性を導く末梢スペクトルに関連した条件について 20

[6] 16 : 45 〜 17 : 15　羽　鳥　　理　(新潟大学 自然科学系)
A Mazur-Ulam theorem 26

[7] 17 : 20 〜 17 : 50　荷 見　守 助　(茨城大学 名誉教授)
Parreau-Widom 型の Denjoy 領域について 31

11月27日(金)

[8] 10 : 00 〜 10 : 30　細 川　卓 也　(茨城大学 工学部)
Linear combinations of composition operators on H^∞ and the Bloch spaces
. . . . 36

[9] 10 : 35 〜 11 : 05　山 田　雅 博　(岐阜大学 教育学部)
Conjugate functions on spaces of parabolic Bloch type 42

[10] 11 : 20 〜 11 : 50　三　浦　　毅　(山形大学 理工学研究科)
Standard operator algebra 上の peripheral spectrum 保存写像 2 48

[11] 11 : 55 〜 12 : 25　飯 田　安 保　(岩手医科大学 共通教育センター)
上半平面での関数空間 $\mathfrak{M}^p$ について 52

Zygmund F-algebra の等距離写像

茨城大学工学部　　植木 誠一郎 (Sei-Ichiro Ueki)

1　Zygmund F-algebra について

区間 $[0,\infty)$ 上の非負凸関数 $\varphi_e(t) := t\log(e+t)$ に対して，次のような正則関数の関数空間 $N\log N_\alpha(\mathbb{B})$ $(\alpha > -1)$ を考える．

$$N\log N_\alpha(\mathbb{B}) := \left\{ f \in H(\mathbb{B}) \;\middle|\; \int_{\mathbb{B}} \varphi_e(\log(1+|f(z)|))dV_\alpha(z) < \infty \right\},$$
$$|||f||| := \int_{\mathbb{B}} \varphi_e(\log(1+|f(z)|))dV_\alpha(z).$$

ここで，dV_α は $\mathbb{B}$ 上の正規化された重み付き Lebesgue 測度を表す．

関数 $\varphi_e(\log(1+t))$ の凹性により，$|||f+g||| \le |||f|||+|||g|||$ が成立する．このことから $N\log N_\alpha(\mathbb{B})$ には自然に距離が定義され，その距離に関して完備であることがわかる．$|||\cdot|||$ はノルムにはならないので $N\log N_\alpha(\mathbb{B})$ は Banach 空間ではないが，２つの不等式：

$$|||cf||| \le \max\{1, |c|^2\}|||f|||, \qquad |||fg||| \le 2(|||f||| + |||g|||)$$

により，$N\log N_\alpha(\mathbb{B})$ はスカラー倍と積に関しても閉じており，かつそれらの演算が連続になっている．すなわち，$N\log N_\alpha(\mathbb{B})$ は F-algebra になっている．

2　等距離写像

関数空間にまつわる問題として，その等距離写像の構造決定の問題が古くからある．解析関数空間の場合には，W. Rudin–F. Forelli による Hardy 空間の等距離写像，C. Kolaski による Bergman 空間の等距離写像，K. Stephenson による Nevanlinna 空間の等距離写像についての研究が知られている．例えば，Bergman 空間の等距離写像 T は，measure-preserving 性を備える正則写像 ψ を用いて $Tf = T1 \cdot C_\psi f$ という荷重合成作用素の形で表現できる．さらに，全射な等距離写像は，$w \in \mathbb{B}$，$|c| = 1$ である複素数 c，$\mathbb{B}$ の自己準同型写像 Ψ により次の形で表される：

$$Tf(z) = c\left\{\frac{1-|w|^2}{(1-\langle z,w\rangle)^2}\right\}^{\frac{\alpha+N+1}{p}} f(\Psi(z)).$$

Zygmund F-algebra $N\log N_\alpha(\mathbb{B})$ は Bergman 空間と同様，Bergman-Orlicz 空間族の特別な場合であるから $N\log N_\alpha(\mathbb{B})$ の等距離写像についても考察しようというのが，研究動機である．

Bergman 空間 $A^1_\alpha(\mathbb{B})$ と $N\log N_\alpha(\mathbb{B})$ の間には, 包含関係：$A^1_\alpha(\mathbb{B}) \subset N\log N_\alpha(\mathbb{B})$ が成立する. $N\log N_\alpha(\mathbb{B})$ の等距離写像の $A^1_\alpha(\mathbb{B})$ への制限を考えると, この制限写像は $A^1_\alpha(\mathbb{B})$ の等距離写像であることがわかる. したがって, Bergman 空間の等距離写像の特徴付けを用いることで次の結果を得る：

定理[1]　$N\log N_\alpha(\mathbb{B})$ の等距離写像 T は $|c|=1$ である複素数 c と measure-preserving 性を持つ正則写像 ψ により,

$$Tf(z) = c\cdot f(\psi(z)) \qquad (f \in N\log N_\alpha(\mathbb{B}),\, z \in \mathbb{B})$$

と書くことができる.

全射等距離写像 T とその逆写像 T^{-1} にこの結果を適用すると, 等距離写像を構成する正則写像 ψ は原点を固定する $\mathbb{B}$ の自己準同型写像となる. カルタンの定理によりこのような写像は $\mathbb{C}^N$ のユニタリ変換であるので, この定理の系として次が得られる：

系　$N\log N_\alpha(\mathbb{B})$ の全射な等距離写像 T は $|c|=1$ である複素数 c と $\mathbb{C}^N$ のユニタリ変換 $\mathcal{U}$ により,

$$Tf(z) = c\cdot f(\mathcal{U}(z)) \qquad (f \in N\log N_\alpha(\mathbb{B}),\, z \in \mathbb{B})$$

と書くことができる.

Zygmund F-algebra の全射等距離写像の形は Bergman 空間のそれと比べるとより簡単な構造をしていることがわかる. また, $N\log N_\alpha(\mathbb{B})$ の全射な等距離写像全体を $\mathrm{Isom}(N\log N_\alpha(\mathbb{B}))$, $\mathbb{C}^N$ のユニタリ群を $\mathcal{U}(N,\mathbb{C})$ と表すとき, この系は $\mathrm{Isom}(N\log N_\alpha(\mathbb{B})) \simeq \mathbb{T}\times\mathcal{U}(N,\mathbb{C})$ であることを示している.

3　一般化について ～～ 今後の課題 ～～

$\mathbb{R}$ 上の非負非減少な強凸関数 Φ に対して, $\Phi(\log|f|) \in L^1(dV_\alpha)$ を満たす正則関数 f の全体を Bergman-Orlicz 空間 A^Φ_α とする. A^Φ_α の特別な場合が, Bergman 空間や Bergman-Privalov 空間, Zygmund F-algebra などである. 特に, Φ が

$$\Phi(\log|f+g|) \lesssim \Phi(\log|f|) + \Phi(\log|g|), \quad \Phi(\log|fg|) \lesssim \Phi(\log|f|) + \Phi(\log|g|)$$

をみたすとき, A^Φ_α を Bergman-Orlicz algebra とよぶ. Bergman-Privalov 空間, Zygmund F-algebra の全射等距離写像は何れも $\mathbb{T}\times\mathcal{U}(N,\mathbb{C})$ と同型であるので, これらの一般化として次のような問題が考えられる：

問題　Bergman-Orlicz algebra A^Φ_α に対して, 次は成立するか？

$$\mathrm{Isom}(A^\Phi_\alpha) \simeq \mathbb{T}\times\mathcal{U}(N,\mathbb{C}).$$

[1]今回発表した研究成果は, S. Stević 氏との共同研究 *Isometries of a Bergman-Privalov-type space on the unit ball* (Discrete Dyn. Nat. Soc., vol. 2009, Article ID 725860, 16 pp.) によって得られたものです. 共同研究の声をかけてくれた Stević 氏に感謝します.

Lipschitz 空間上のシフト作用素

信州大学大学院総合工学系研究科　古清水 大直 (Hironao Koshimizu)

様々な関数空間で等長作用素は研究されている．ここでは Lip[0, 1] 上の等長作用素を調べた．

1　シフト作用素の定義

等長作用素のひとつにシフト作用素がある．もっとも基本的な設定でのシフト作用素は, 数列空間 $\ell^2 = \left\{ (x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots) : \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < +\infty \right\}$ 上の次の作用素である．

$$
\begin{aligned}
S \ &: \ \ell^2 \ni (x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots) \ \longmapsto \ (0, x_1, \cdots, x_{i-1}, \cdots) \in \ell^2 \\
T \ &: \ \ell^2 \ni (x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots) \ \longmapsto \ (x_2, x_3, \cdots, x_{i+1}, \cdots) \in \ell^2
\end{aligned}
$$

S は ℓ^2 上の前進シフト作用素, T は ℓ^2 上の後退シフト作用素と呼ばれている．これらの作用素は, 有界線形作用素の基本的な例である．

さて, 可分な無限次元 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ は, ℓ^2 と内積空間として同型だから, 上の作用素 S, T は, 自然に $\mathcal{H}$ 上でも考えることができる．それでは,

これらの作用素は, より一般的に Banach 空間上でも考えられないだろうか？

この疑問は, まったく自然に発せられる．

以下, $\mathcal{B}$ を Banach 空間とし, $\mathcal{B}$ 上の有界線形作用素全体の Banach 空間を $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ とかく．$T \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ に対して, T の値域と核は, それぞれ $\operatorname{ran} T$ と $\ker T$ とおく．1972 年, R.M. Crownover は, ℓ^2 上のシフト作用素の性質に着目し, Banach 空間上の前進シフト作用素の定義をした ([2])．

定義 1. $T \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ とする．T は, 次の 3 つの条件 (i)〜(iii) を満たすとき, $\mathcal{B}$ 上の**前進シフト作用素** (forward shift operator) と呼ばれる．

(i) T は $\mathcal{B}$ 上の等長作用素である．つまり,
$\|Tx\| = \|x\| \qquad (x \in \mathcal{B})$.

(ii) $\operatorname{ran} T$ の余次元が 1 である．

(iii) $\bigcap_{n=1}^{\infty} \operatorname{ran} T^n = \{0\}$ である．

また, T が (i) と次の条件 (iv) を満たすときは, $\mathcal{B}$ 上の**有限余次元等長作用素** (finite codimensional linear isometry) という．

(iv) $\operatorname{ran} T$ の余次元が有限次元である．

ここで, 「有限次元」とは, 0 次元も含めることにする.

定義1にしたがって, いくつかの関数空間上の前進シフト作用素が研究された. それらは, 論文 [8], [7], [4], [14], [16], [1] などに見られる. また, 有限余次元等長作用素に関しては [13], [6] がある.

1988 年には, J.R. Holub が, 同様の方針で, Banach 空間上の後退シフト作用素を定義した ([8]).

定義 2. $T \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ とする. T は, 次の 3 つの条件 (i)$'$〜 (iii)$'$ を満たすとき, $\mathcal{B}$ 上の**後退シフト作用素** (backward shift operator) と呼ばれる.

(i)$'$ $\|Tx\| = \inf\{\|x+z\| : z \in \ker T\} \qquad (x \in \mathcal{B})$.

(ii)$'$ $\ker T$ の次元が 1 である.

(iii)$'$ $\bigcup_{n=1}^{\infty} \ker T^n$ が $\mathcal{B}$ で稠密である.

定義2の条件 (i)$'$ は,「T によって自然に定義される $\mathcal{B}/\ker T$ から $\mathcal{B}$ への単射の作用素 $f + \ker T \mapsto Tf$ が等長作用素になる」という意味である. この定義にもとづく研究には, [8], [9], [10], [15], [12], [17], [16] がある.

ここでは, Lip$[0,1]$ 上の全射の等長作用素を調べる. また, 定義 1, 2 にしたがい Lip$[0,1]$ 上のシフト作用素や有限余次元等長作用素を調べる.

2 $C(X)$

具体的な Banach 空間上において, 全射の等長作用素, シフト作用素や有限余次元等長作用素を考える. このような観点での研究は, これまでに, たくさん発表されている. たとえば, 連続関数の空間における話題について, わかっていることを述べてみよう. X をコンパクト Hausdorff 空間とし, X 上の連続関数全体の集合を $C(X)$ とかく. $C(X)$ は, X の各点での和・スカラー積とノルム

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in X\} \qquad (f \in C(X))$$

に関して, Banach 空間になる. まず, $C(X)$ 上の全射の等長作用素について, 次のように特徴づけられる ([3]).

定理 A. (Banach-Stone の定理)
$C(X)$ 上の全射等長作用素 T は, $|w(x)| = 1$ $(x \in X)$ となる $w \in C(X)$ と, X から X の上への同相写像 φ を用いて,

$$(Tf)(x) = w(x)f(\varphi(x)) \qquad (x \in X, f \in C(X))$$

と表せる.

次に, $C(X)$ 上の前進シフト作用素は, X の形状により, 存在する場合と存在しない場合がある. 前進シフト作用素が存在しない例として, A. Gutek, D. Hart, J. Jamison and M. Rajagopalan [7] は, X が閉区間 $[0,1]$ の場合をあげている. さらに, S. -E. Takahasi and T. Okayasu [13] は, 有限余次元等長作用素は全射になることを示した.

定理 B. $C[0,1]$ 上の有限余次元等長作用素は全射になる.
とくに, $C[0,1]$ 上の前進シフト作用素は存在しない.

一方, 後退シフト作用素については, 明解に次のことが成り立つ.

定理 C. $C(X)$ が無限次元ならば, $C(X)$ 上の後退シフト作用素は存在しない.

この結果は, [9], [10], [15] で証明されている.

3 Lip[0, 1]

閉区間 $[0,1]$ 上の Lipschitz 連続関数 f は, $[0,1]$ のほとんどいたるところ f' が存在して, f' は $[0,1]$ 上の本質的有界な可測関数になる. そこで, $[0,1]$ 上の本質的有界な可測関数全体の集合を $L^\infty[0,1]$ とかく. ただし, $[0,1]$ のほとんどいたるところ同じ関数は同じ元とみなす. $L^\infty[0,1]$ は $[0,1]$ のほとんどいたる点での和・スカラー積・積とノルム

$$\|f\|_{L^\infty} = \operatorname{ess\,sup}\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$$

と, 複素共役による対合に関して, 単位元をもつ可換 C^* 環になる.

さて, 閉区間 $[0,1]$ 上の Lipschitz 連続関数全体の集合を $\mathrm{Lip}[0,1]$ とかく. $\mathrm{Lip}[0,1]$ は $[0,1]$ の各点での和・スカラー積に関して, 線形空間になる. 線形空間 $\mathrm{Lip}[0,1]$ には, たくさんのノルムが考えられるが, ここでは次の 2 つのノルムを取り上げる.

$$\begin{aligned}\|f\|_\Sigma &= \|f\|_\infty + \|f'\|_{L^\infty} \\ \|f\|_M &= \max\bigl\{|f(0)|, \|f'\|_{L^\infty}\bigr\}\end{aligned} \qquad (f \in \mathrm{Lip}[0,1])$$

これらのノルムは同値で, $\mathrm{Lip}[0,1]$ は, それぞれのノルムに関して Banach 空間になる. これらを区別するときは,

$$\mathrm{Lip}[0,1]_\Sigma, \qquad \mathrm{Lip}[0,1]_M$$

とかくことにする.

これから, $\mathrm{Lip}[0,1]$ 上の全射の等長作用素, シフト作用素や有限余次元等長作用素を調べる. 1971 年, N.V. Rao and A.K. Roy は, 次のことを示した ([11, Theorem 3.3]).

定理 D. $\mathrm{Lip}[0,1]_\Sigma$ 上の全射の等長作用素 T は, $|\lambda| = 1$ となる定数 λ を用いて,
$Tf(x) = \lambda f(x)$ または $\lambda f(1-x) \quad (x \in [0,1], f \in \mathrm{Lip}[0,1]_\Sigma)$ と表せる.

また, 1988 年, J.R. Holub は, 次のことを示した ([8, Theorem 2.3]).

定理 E. $\mathrm{Lip}_{\mathbb{R}}[0,1]_\Sigma$ 上の前進シフト作用素は存在しない.

ここで, $\mathrm{Lip}_{\mathbb{R}}[0,1]_\Sigma$ は実数値関数の場合である. 実際, この証明は複素数値関数の場合に通用しない.

そこで, 別のノルムで考えることにしたところ, $\mathrm{Lip}[0,1]_M$ 上の全射の等長作用素, シフト作用素や有限余次元等長作用素について, 次の結果を得た.

定理 1. $\mathrm{Lip}[0,1]_M$ 上の全射の等長作用素 T は, $|\lambda|=1$ となる定数 λ , $|w(x)|=1$ (a.e. $x \in [0,1]$) となる $w \in L^\infty[0,1]$ と, $L^\infty[0,1]$ から $L^\infty[0,1]$ の上への多元環同型写像 Φ を用いて,

$$(Tf)(x) = \lambda f(0) + \int_0^x w(t) f'((\Phi i)(t))dt \qquad (x \in [0,1], f \in \mathrm{Lip}[0,1]_M)$$

と表せる. ただし, $i(x) = x$ (a.e. $x \in [0,1]$) とする.

定理 2. $\mathrm{Lip}[0,1]_M$ 上の有限余次元等長作用素は全射になる.
とくに, $\mathrm{Lip}[0,1]_M$ 上の前進シフト作用素は存在しない.

定理 3. $\mathrm{Lip}[0,1]_M$ 上の後退シフト作用素は存在しない.

証明の概要 $L^\infty[0,1]$ の極大イデアル空間を M とかく. M にない 1 点 p を付け加えたコンパクト空間 $\mathsf{M} \cup \{p\}$ を考えると, $\mathrm{Lip}[0,1]_M$ は, $C(\mathsf{M} \cup \{p\})$ と等長同型になるので, $\mathrm{Lip}[0,1]_M$ の話題を $C(\mathsf{M} \cup \{p\})$ で考えることができる. すると, 定理 1 は, 定理 A から得られる. 定理 2 に関しては, 定理 B の証明を参考にして, M が孤立点をもたない, 極端非連結の空間であることに注意すると, $C(\mathsf{M} \cup \{p\})$ 上の有限余次元等長作用素は全射になることがわかる. 最後に, 定理 3 は, 定理 C を適用することから得られる.

ここで, $C(X)$ 上の有限余次元等長作用素について考えてみる. 上の定理 2 の証明を参考にすると, [7, Corollary 4.2] の拡張であるが, 次のことが得られる.

注意. X をコンパクト Hausdorff 空間, 極端非連結, 高々有限個の孤立点をもち, 孤立点でない点も 1 つもつとする. このとき, $C(X)$ 上の有限余次元等長作用素は全射になる.

"注意" の仮定には当てはまらないが, 定理 B で紹介したように, $C[0,1]$ 上の有限余次元等長作用素は全射になる. また, X が自然数の 1 点コンパクト化であるときには, $C(X)$ 上の前進シフト作用素が存在する ([7]). さらに, X が可分でないときに, $C(X)$ 上の前進シフト作用素が存在する例もある ([1]). このように, $C(X)$ 上の有限余次元等長作用素に関して, ある程度分かってきてはいる. しかし, X の形で $C(X)$ 上の有限余次元等長作用素の特徴づけができていないのが現状である.

参考文献

[1] J. Araujo, *On the separability problem for isometric shifts on $C(X)$*, J. Funct. Anal., **256** (2009), 1106–1117.

[2] R.M. Crownover, *Commutants of shifts on Banach spaces*, Michigan Math. J., **19** (1972), 233–247.

[3] N. Dunford and J.T. Schwartz, *Linear operators*, Part I, New York, 1958.

[4] F.O. Farid and K. Varadarajan, *Isometric shift operators on $C(X)$*, Canad. J. Math., **46** (1994), 532–543.

[5] R.J. Fleming and J.E. Jamison, *Isometries on Banach spaces : function spaces*, Chapman & Hall/CRC Monographs and Surveys in pure and Applied Mathematics, 2003.

[6] J.J. Font, *Isometries on function algebras with finite codimensional range*, Manuscripta Math, **100** (1999), 13–21.

[7] A. Gutek, D. Hart, J. Jamison and M. Rajagopalan, *Shift operators on Banach spaces*, J. Funct.Anal., **101** (1991), 97–119.

[8] J.R. Holub, *On shift operators*, Canad. Math. Bull., **31** (1988), 85–94.

[9] M. Rajagopalan and K. Sundaresan, *Backward shifts on Banach spaces* $C(X)$, J. Math. Anal. Appl., **202** (1996), 485–491.

[10] M. Rajagopalan and K. Sundaresan, *Backward shifts on Banach spaces* $C(X)$*, II*, *in* “Proceedings of the Tennessee Topology Conference”, World Scientific, Singpore, 1997.

[11] N.V. Rao and A.K. Roy, *Linear isometries of some function spaces*, Pacific J. Math., **35** (1971), 177–192.

[12] T.M. Rassias and K. Sundaresan, *Generalized backward shifts on Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl., **260** (2001), 36–45.

[13] S. Takahasi and T. Okayasu, *A note on finite codimensional liner isometries of* $C(X)$ *into* $C(Y)$, Internat. J. Math. Math. Sci, **18** (1995), 677–680.

[14] T. Takayama and J. Wada, *Isometric shift operators on the disc algebra*, Tokyo J. Math., **21** (1998), 115–120.

[15] 有泉 浩明, 関数環上の後退シフト作用素, 信州大学修士論文, 1998.

[16] 新家 洋輔, Banach 空間上のシフト作用素, 信州大学修士論文, 2008.

[17] 髙木 啓行, 関数環上の後退シフト作用素, 数理解析研究所講究録, **1243** (2002), 49–51.

コンパクト化の近似定理

筑波大学数理物質科学研究科　　嶺　幸太郎 (Kotaro Mine)

1　導入

$\mathbb{R}$ を実数直線, $\mathbf{I}$ を単位閉区間 $[-1,1]$ とする．位相空間 X のハウスドルフ・コンパクト化全体を $\mathcal{K}(X)$ で表す．$\mathcal{K}(X)$ が空でない, すなわち X のハウスドルフ・コンパクト化が存在するための必要十分条件は X がチコノフ空間[1]となることであった．以下, X はすべてチコノフ空間とし, コンパクト化とはハウスドルフ・コンパクト化を指すものとする．

さて, $\mathcal{K}(X)$ 上には, 次のような向き "$\leq$" および同値関係 "$\sim$" が定義できる．

定義 1.1. ふたつのコンパクト化 $\gamma X, \delta X \in \mathcal{K}(X)$ において $f|_X = \mathrm{id}_X$ なる連続関数 $f : \delta X \to \gamma X$ が存在するとき $\gamma X \leq \delta X$ と書く．$\gamma X \leq \delta X$ かつ $\delta X \leq \gamma X$ が成立するとき $\gamma X \sim \delta X$ と関係 "$\sim$" を定義すれば, これは同値関係となる．更に, $\mathcal{K}(X)/\sim$ 上にも "$\leq$" により自然に向きが定義され, $(\mathcal{K}(X)/\sim, \leq)$ は順序集合, とくに上半完備束[2]となる．以下, 順序集合 $(\mathcal{K}(X)/\sim, \leq)$ を $\mathcal{K}(X)$ と略記する．

$\gamma X \sim \delta X$ ならば, 定義により γX と δX は同相 $(\approx)$ となる．逆は必ずしも成り立たないことに注意したい．$K(X)$ が上半完備束であることは自明ではなく, 例えば後で述べる事実 3.1 から得られる．

$\mathcal{K}(X)$ の最大元 $\beta X = \sup \mathcal{K}(X)$ は Stone-Čech コンパクト化である．更に X が局所コンパクト空間である場合 $\mathcal{K}(X)$ は完備束となり, その最小元 $\alpha X = \inf \mathcal{K}(X)$ は X の 1 点コンパクト化である．ある $\gamma X \in K(X)$ がいくつかのコンパクト化たちの上限となっているとき, γX はそれらで**近似できる**と呼ぶことにしよう．ただし, これはあくまでも言葉のあやであり, $\mathcal{K}(X)$ 上に位相が定義されているわけではないことに注意したい．

それでは, あるコンパクト化がより単純なコンパクト化で近似できるためには, どういった条件が必要なのであろうか．また, 近似に必要なコンパクト化の数はどれくらい少なくできるのか．これらの自然な問題に対する考察を本稿では与えたい．

---

[1] ハウスドルフ空間 X が**チコノフ空間**であるとは, $f(F) = \{0\}$, $f(x) = 1$ なる連続関数 $f : X \to \mathbf{I}$ の存在が X の任意の閉集合 F およびその外側の点 $x \in X \setminus F$ に対して言えることである．

[2] 順序集合が**上半完備束** (**complete upper semilattice**) であるとは, 任意の部分集合がその順序において上限を持つことである．任意の部分集合が上限および下限を持つ場合は**完備束** (**complete lattice**) であるという．

2　既に知られているいくつかの近似定理

まずは, いくつかの既存の結果を紹介しよう. 多くの先行研究のすべてを紹介することはできないが, βX に対する近似定理として例えば次が知られている.

定理 2.1 (Chandler-Faulkner [1], 1987)**.** 局所コンパクト空間 X が無限遠で連結ならば βX は特異コンパクト化たちで近似できる.

ここで, 局所コンパクト空間 X が**無限遠で連結** (**connected at infinity**) であるとは, 補集合が連結となるより大きいコンパクト部分集合が X のいかなるコンパクト部分集合に対しても存在することである. $\gamma X \in \mathcal{K}(X)$ が**特異コンパクト化** (**singular compactification**) であるとは, 剰余 $\gamma X \setminus X$ が γX のレトラクトとなるようなコンパクト化のことである.[3]

定理 2.2 (Woods [5], 1995)**.** 距離付け可能[4]な空間 X において, βX は Smirnov コンパクト化で近似できる.

Smirnov コンパクト化については, X 上の実数値連続関数環の部分環を用いて次節で定義したい.

上述の近似定理はいずれも Stone-Čech コンパクト化に対するものであるが, 任意のコンパクト化に対する近似定理としては例えば次がある.

定理 2.3 (Faulkner [3], 1990)**.** ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ の任意のコンパクト化は, 剰余が閉区間 $\mathbf{I}$ または 1 点と同相なコンパクト化で近似できる.

事実 2.4. 距離付け可能かつ可分[5]な局所コンパクト空間 X の任意のコンパクト化は, 距離付け可能なコンパクト化で近似できる.

今回は次の定理の証明の概略を紹介するとともに, この証明のアイデアが上述の定理群をどれだけ一般化できるか検討したい.

定理 2.5. $\mathbb{R}$ の任意のコンパクト化は $\mathbb{R}^2$ に埋め込めるようなコンパクト化で近似できる.

3　連続関数環とコンパクト化

X の実数値有界連続関数全体を $C^*(X)$ で表す. $C^*(X)$ に一様ノルムによる位相を入れれば自然な和と積の演算に関してバナッハ環となる. $C^*(X)$ の単位的閉部分環で X の位相を生成するもの全体を $\mathcal{A}(X)$ とする. ここで, $A \subset C^*(X)$ が X の位相を**生成する**とは, A のすべての元が連続となる最弱位相が X の元の位相に一致することである. X はチコノフ空間であるので, これは X の任意の閉集合とその外側の点を分離する関数が A の中に存在することと同値になる.

単位的可換 C^* 環とコンパクト・ハウスドルフ空間の間には一対一の対応があることが知られている. これを X のコンパクト化に限って見てみると次のことが分かる.

[3] 正確にはこれは定義と同値な条件である. 通常は, X からコンパクト空間への特異な連続関数を用いて定義する. 例えば Faulkner[2] を参照されたい.

[4] ある距離空間と同相な位相空間を**距離付け可能**な空間と言う.

[5] 可算な稠密部分集合をもつ位相空間を**可分**であると言う.

事実 3.1. チコノフ空間 X に対して, $(\mathcal{K}(X), \leq)$ と $(\mathcal{A}(X), \subset)$ は順序同型である.

実際, 各 $\gamma X \in \mathcal{K}(X)$ に対して, γX に連続関数として拡張可能な X 上の有界関数全体を $S(\gamma X)$ とすれば (すなわち $S(\gamma X) = \{\, f|_X \in C^*(X) \mid f \in C^*(\gamma X) \,\}$), 対応 $S : \mathcal{K}(X) \to \mathcal{A}(X)$ は順序同型となる. ここで $S(\gamma X)$ と $C^*(\gamma X)$ はバナッハ環として同型 ($\simeq$) であることに注意したい. また, 各 $A \in \mathcal{A}(X)$ に対して, X からチコノフ立方体 $\mathbf{I}^A$ への関数 $e_A : X \to \mathbf{I}^A$ を $e_A(x) = (f(x)/\|f\|)_{f \in A}$ と定義すれば e_A は埋蔵写像であり, $\mathbf{I}^A$ における X のコンパクト化を $T(A) = \mathrm{cl}_{\mathbf{I}^A}\, e_A(X)$ とすれば, 対応 $T : \mathcal{A}(X) \to \mathcal{K}(X)$ は順序を保つ S の逆写像となる. なお, $T(A)$ は A の極大イデアル空間に一致する.

以上の証明は初等的にできるが, $S \circ T = \mathrm{id}_{\mathcal{A}(X)}$ を示すにあたり, Stone-Weierstrass の近似定理を用いる. また, 上の事実および今回の議論は複素数値有界連続関数に関してもほぼ同様に成り立つ. ただしその場合は閉部分環を部分 C^* 環に限る必要がある.

事実 3.1 を用いて, Smirnov コンパクト化が定義される.

定義 3.2. 距離付け可能な空間 X および X の許容可能[6]な距離 d に対して, (X, d) から $\mathbb{R}$ への有界な一様連続関数全体を $U_d(X)$ とすれば $U_d(X) \in \mathcal{A}(X)$ である. (X, d) の **Smirnov コンパクト化**とは, $u_d X := T(U_d(X))$ で定義されるコンパクト化のことである. 本稿では, $\gamma X \in \mathcal{K}(X)$ が X のある許容可能な距離 d について (X, d) の Smirnov コンパクト化と同値であるとき, γX を Smirnov コンパクト化と呼ぶことにする.

$C^*(X)$ の部分集合 D に対して, D を含む最小の単位的閉部分環を $\langle D \rangle$ と書こう.[7] 定理 2.5 を示すにあたり, まず次の補題を認めたい.

補題 3.3. 任意の $\gamma X \in \mathcal{K}(X)$ に対して $A = S(\gamma X)$ とする. このとき, 任意の $g \in C^*(X)$ に対して X のコンパクト化 $T(\langle A, g \rangle)$ は積空間 $\mathbf{I} \times \gamma X$ に埋め込める.

$T(\langle A, g \rangle)$ の定義には, 部分環 $\langle A, g \rangle$ の元の個数ぶんの座標を要するチコノフ立方体を用いていた. しかしながら, $\langle A, g \rangle$ 上の全ての関数の情報が必要なわけではなく, A と関数 g のみで十分であることを補題 3.3 は意味している (実際, 補題 3.3 の証明はこれを示すことで得られる).

次の命題の証明は, 今回得られるすべての近似定理の鍵となる.

命題 3.4. $\gamma X \leq \delta X$ を満たす二つの任意のコンパクト化 γX および δX において, δX は $\mathbf{I} \times \gamma X$ に埋め込めるような X のコンパクト化たちで近似することができる.

証明. まず $\langle D \rangle = S(\delta X)$ を満たすような集合 $D \subset S(\delta X)$ を一つ選ぼう ($D = S(\delta X)$ でもよい). 更に $A = S(\gamma X)$ とおこう. $\gamma X \leq \delta X$ より $S(\gamma X) \subset S(\delta X)$, すなわち $A \subset \langle D \rangle$ である. T は順序同型であるから sup 記号を外に出せることに注意して計算すると,

$$\begin{aligned}\delta X &= T(S(\delta X)) = T(\langle D \rangle) = T(\langle D \cup A \rangle) \\ &= T\left(\sup \{\, \langle A, g \rangle \mid g \in D \setminus A \,\}\right) = \sup \{\, T\left(\langle A, g \rangle\right) \mid g \in D \setminus A \,\}.\end{aligned}$$

[6] X の位相と一致する位相を導入する X 上の距離のことを**許容可能な距離**と呼ぶ.

[7] 閉集合に限っている点に注意. $\overline{\langle D \rangle}$ と書くべきかもしれないが, 本稿では閉部分環のみしか考えないのでこのように略記する.

補題3.3によれば各$T(\langle A, g\rangle)$は$\mathbf{I}\times\gamma X$に埋め込めるようなコンパクト化であった. ゆえに命題は示された. $\square$

命題3.4により, ただちに定理2.5が得られる.

定理2.5の証明. $\mathbb{R}$の任意のコンパクト化$\delta\mathbb{R}$に対して, $\gamma\mathbb{R} = \alpha\mathbb{R}$ (1点コンパクト化) とすれば$\gamma\mathbb{R} \le \delta\mathbb{R}$である. 命題3.4より$\delta\mathbb{R}$は$\mathbf{I}\times\gamma\mathbb{R}$に埋め込めるコンパクト化で近似できる. $\mathbf{I}\times\gamma\mathbb{R} \approx \mathbf{I}\times\mathbb{S}^1$は$\mathbb{R}^2$に埋め込むことができるので, 結局$\delta\mathbb{R}$は$\mathbb{R}^2$に埋め込めるコンパクト化で近似できることになる. $\square$

次元を一般化すると次が成り立つ. 証明は定理2.5とほとんど同じである.

系 3.5. n次元ユークリッド空間の任意のコンパクト化は$n+1$次元ユークリッド空間に埋め込めるようなコンパクト化で近似できる. $\square$

4 連続関数環の生成元

さて, 最初の目標である定理2.5は証明されたわけだが, ここで近似に必要なコンパクト化の個数はどれくらいあれば十分なのか考えてみよう. そのためには命題3.4の証明を振り返ってみればよい. κを命題3.4における近似に必要なコンパクト化の数の最小濃度とすれば$\kappa \le \operatorname{card}(D\setminus A) \le \operatorname{card} D$であるから, 大雑把に見積もれば

$$\kappa \le \min\{\, \operatorname{card} D \mid \langle D\rangle = S(\delta X)\,\}$$

である. 上式の右辺を$\operatorname{gen} S(\delta X)$とおこう. 正確には, バナッハ環$A$に対して, Aを生成するために必要な集合の最小濃度

$$\operatorname{gen} A := \min\{\, \operatorname{card} D \mid D \subset A,\ \langle D\rangle = A\,\}$$

と定義する. $S(\delta X)$と$C^*(\delta X)$はバナッハ環として同型であったから$\operatorname{gen} S(\delta X) = \operatorname{gen} C^*(\delta X)$である. 実は, これは$\delta X$を埋め込めるチコノフ立方体の最小次元に一致する. つまり, チコノフ空間Yに対して$\operatorname{emb} Y$を以下で定義される濃度:

$$\operatorname{emb} Y := \min\{\, \operatorname{card} D \mid \exists\, \text{埋蔵写像} : Y \hookrightarrow \mathbf{I}^D\,\}$$

とすれば, 次の命題から$\kappa \le \operatorname{emb}\delta X$が得られる.

命題 4.1. 任意のコンパクト・ハウスドルフ空間Xについて$\operatorname{emb} Y = \operatorname{gen} C^*(Y)$.

証明. ($\ge$) 埋蔵写像$e : Y \to \mathbf{I}^{\operatorname{emb} Y}$を取り, $D = \{\, \mathrm{pr}_\lambda \circ e \in C^*(Y) \mid \lambda \in \operatorname{emb} Y\,\}$とすれば$e$の単射性から$D$は$Y$の各点を分離する.[8] したがってStone-Weierstrassの近似定理により$\langle D\rangle = C^*(Y)$となる. ゆえに$\operatorname{emb} Y \ge \operatorname{card} D \ge \operatorname{gen} C^*(Y)$.

[8] $D \subset C^*(Y)$がYの**各点を分離する**とは, $f(x) \ne f(y)$なる$f \in D$の存在が任意の異なる2点$x, y \in Y$に対して言えることである.

($\leq$) $\mathrm{card}\, D = \mathrm{gen}\, C^*(Y)$ かつ $\langle D \rangle = C^*(Y)$ を満たす $D \subset C^*(Y)$ を一つ固定する. $\langle D \rangle = C^*(Y)$ より D は Y の各点を分離する. したがって,

$$e : L \to \mathbf{I}^D, \quad e(x) = (f(x)/\|f\|)_{f \in D}$$

は連続単射であり, Y はコンパクト空間であるから埋蔵写像となる. ゆえに $\mathrm{emb}\, Y \leq \mathrm{card}\, D = \mathrm{gen}\, C^*(Y)$. □

系 4.2. 命題 3.4 において, 近似に必要なコンパクト化の数の最小濃度を κ とする. このとき $\kappa \leq \mathrm{emb}\, \delta X$. □

ウリゾーンの距離化定理によれば, 任意の第二可算[9]正則空間 X はヒルベルト立方体 $\mathbf{I}^{\mathbb{N}}$ に埋め込める. つまり, X は可分かつ距離づけ可能となり, 第二可算正則空間と可分距離付け可能な空間のクラスは一致する. 上で導入した記号を用いて言えば, チコノフ空間 X がこのクラスに属することは $\mathrm{emb}\, X \leq \aleph_0$ であることと同値である. バナッハ環 A が $\mathrm{gen}\, A < \aleph_0$ を満たすとき**有限生成**, $\mathrm{gen}\, A \leq \aleph_0$ を満たすとき**可算生成**であると呼ぶことにすれば, 命題 4.1 の証明から次が分かる.

系 4.3. 任意のコンパクト・ハウスドルフ空間 Y について, Y が可分距離づけ可能 (かつ有限次元[10]) であるための必要十分条件は $C^*(Y)$ が可算生成 (有限生成) となることである. □

一般のチコノフ空間 X に関しては次が言える. とくに X が局所コンパクトである場合は, γX として 1 点コンパクト化のみを考えればよい.

定理 4.4. 任意のチコノフ空間 X について, X が可分距離づけ可能 (かつ有限次元) であるための必要十分条件はある X のコンパクト化 γX について $C^*(\gamma X)$ が可算生成 (有限生成) となることである.

5　既存の近似定理の一般化

それでは最後に 2 節で述べた近似定理の一般化を与えよう. まずは次を示す.

補題 5.1. 任意の $\gamma X \in \mathcal{K}(X)$ および $g \in C^*(X)$ に対して, $A = S(\gamma X)$ とすれば次が成立する.

(1) γX が距離付け可能ならば $T(\langle A, g \rangle)$ も距離付け可能である.

(2) γX が Smirnov コンパクト化ならば $T(\langle A, g \rangle)$ も Smirnov コンパクト化である.

証明の概略. (1) は補題 3.3 から直ちに導かれる. γX が Smirnov コンパクト化であるとすれば, X のある許容可能な距離 d について $\gamma X \sim u_d X$ となる. $d'(x, y) = d(x, y) + |g(x) - g(y)|$ とすればこれも X の許容可能な距離であり, 更に $T(\langle A, g \rangle) \sim u_{d'} X$ となることが示せる. ゆえに $T(\langle A, g \rangle)$ も Smirnov コンパクト化である. □

[9] 位相空間が可算な開基を持つとき**第二可算**であると言う.
[10] ここでの次元は被覆次元を考えている. 任意の n 次元可分距離空間は $\mathbf{I}^{2n+1}$ に埋め込めることが知られている.

定理 2.2 および事実 3.1 の一般化として次が得られる.

定理 5.2. 距離付け可能な空間 X のコンパクト化 δX に対して次が成立する.

(1) δX が距離付け可能なコンパクト化で近似できるための必要十分条件は $\gamma X \leq \delta X$ なる距離付け可能なコンパクト化 γX が存在することである.

(2) δX が Smirnov コンパクト化で近似できるための必要十分条件は $\gamma X \leq \delta X$ なる Smironov コンパクト化 γX が存在することである.

証明. 必要性は明らか. 十分性は, 補題 5.1 を用いて命題 3.4 の証明と同様に $T(\langle A, g\rangle)$ たちで近似する. □

特異コンパクト化に関して次が成立する. 証明は省略する ([4]).

補題 5.3. 局所コンパクト空間 X の 1 点コンパクト化を αX とし $A = S(\alpha X)$ とする.[11] もし X が 2 点コンパクト化を持たないならば, 任意の $g \in C^*(X)$ に対してコンパクト化 $\alpha_g X = T(\langle A, g\rangle)$ は特異コンパクト化であり, その剰余 $\alpha_g X \setminus X$ は閉区間 $\mathbf{I}$ または 1 点集合と同相である.

局所コンパクト空間 X が無限遠で連結ならば 2 点コンパクト化を持たないという事実から, 次の定理は定理 2.1 および 2.3 の一般化であることがわかる.

定理 5.4. 連結な局所コンパクト空間 X について次は同値.

(i) X は 2 点コンパクト化を持たない.

(ii) X の任意のコンパクト化は剰余が閉区間 $\mathbf{I}$ または 1 点集合と同相なコンパクト化で近似できる.

(iii) X の任意のコンパクト化は特異コンパクト化で近似できる.

証明. (i)⇒(ii) および (i)⇒(iii) は, 補題 5.3 を用いて命題 3.4 の証明と同様の手法で近似する. (ii)⇒(i) については対偶 ¬(i)⇒ ¬(ii) を示すのが容易である. (iii)⇒(i) を背理法で示そう. もし X が 2 点コンパクト化 γX を持つとすれば (iii) より γX は特異コンパクト化で近似できるが, γX より真に小さいコンパクト化は 1 点コンパクト化しかないので γX 自身も特異コンパクト化である. ゆえにレトラクション $r : \gamma X \to \gamma X \setminus X$ が存在し, とくに X への制限 $r|_X$ は 2 点空間 $\gamma X \setminus X$ への全射である. これは X の連結性に矛盾する. □

証明から, 定理 5.4 における (i)⇔(ii) および (i)⇒(iii) は X の連結性がなくても成立することがわかる.

[11] 実は $S(\alpha X) = \{ f \in C^*(X) \mid \exists \lim_{x\to\infty} f(x) \} \simeq C_0(X) \oplus \mathbb{R}$ である.

参考文献

[1] R.E. Chandler and G.D. Faulkner *Singular compactifications: the order structure*, Proc. Amer. Soc. **100** (1987), 377–382.

[2] G.D. Faulkner, *Compactifications whose remainders are retracts*, Proc. Amer. Math. Soc. **103** (1988), 984–988.

[3] G.D. Faulkner *Minimal compactifications and their associated function space*, Proc. Amer. Soc. **108** (1990), 541–546.

[4] K. Mine, *Approximation theorems for compactifications*, preprint.

[5] R.G. Woods, *The minimum uniform compactification of a metric space*, Fund. Math. **147** (1995), 39–59.

対称作用素と自己共役作用素の位相的な関係について

茨城大学工学部　　平澤　剛 (Go Hirasawa)

1　はじめに

Hilbert 空間上の対称作用素と自己共役作用素の位相的関係を考察する.

古典的問題：与えられた対称作用素が自己共役かどうか判定せよ.

この問題を位相的な立場からうまく判定できるようにすることが当面の目標である.

$$s \subseteq s^* \text{ (対称作用素)}, \quad s = s^* \text{ (自己共役作用素)}$$

H : 無限次元複素 Hilbert 空間 とする. 線形作用素 $s : \mathrm{dom}(s)(\subseteq H) \to H$ と線形作用素 $t : \mathrm{dom}(t) \to H$ が $\mathrm{dom}(s) \subseteq \mathrm{dom}(t)$ を満たし, さらに

$$\|tu\| \le a\|u\| + b\|su\|, \quad u \in \mathrm{dom}(s)$$

を満たす定数 $a \ge 0, b \ge 0$ が存在するとき, t は s-有界であるといい, b の下限を t の s-限界という. 以下の Kato-Rellich の定理 (Rellich 先生によって与えられ, Kato 先生が応用した) は本研究の動機付けとなった.

Theorem 1 (F.Rellich, 1939) *s : $\mathrm{dom}(s) \to H$ を自己共役作用素とし, t : $\mathrm{dom}(t) \to H$ を対称作用素 かつ t は s-有界とする. このとき, t の s-限界 < 1 ならば $s+t$ は $\mathrm{dom}(s) = \mathrm{dom}(s+t)$ 上自己共役である.*

2　準備

Hilbert 空間 $(H, (\ ,\ ))$, $T \in \mathcal{B}(H)$ に対して, 値域 TH に新しい内積 $(\ ,\ )_T$ を導入する:

$$(Tu, Tv)_T := (u, v) \quad u, v \in (\ker T)^{\perp}$$

すると,

$$(TH, (\ ,\ )_T) \hookrightarrow H.$$

これを T による de Branges 空間 $\mathcal{M}(T) := (TH, \|\cdot\|_T)$ と言う. 逆に, H の部分空間 M に対して, あるヒルベルトノルム $\|\cdot\|_M$ が存在して

$$(M, \|\cdot\|_M) \hookrightarrow H$$

ならば, ある $T \in \mathcal{B}(H)$ $(T \geq 0)$ が一意に存在して

$$(M, \|\cdot\|_M) \cong \mathcal{M}(T) \quad (\text{等距離同型})$$

を満たす.
Remark. このような部分空間 M を H の半閉部分空間という. 線形作用素 $s : \mathrm{dom}(s) \to H$ が半閉 (resp. 閉) 作用素であるとは, s のグラフ

$$\{(u, su) \in H \times H : u \in \mathrm{dom}(s)\}$$

が直積ヒルベルト空間 $H \times H$ において半閉 (resp. 閉) 部分空間となることで定義する.

$$\{\text{半閉作用素}\} \supset \{\text{閉作用素}\}.$$

Theorem 2 (W.Kaufman, 1979)
線形作用素 $s : \mathrm{dom}(s) \to H$ に対して, 以下は同値である.
(1) s は半閉作用素である.
(2) 定義域 $\mathrm{dom}(s)$ は半閉であり,

$$s : (\mathrm{dom}(s),\ {}^{\exists}\|\cdot\|_{\mathrm{dom}(s)}) \to H \quad (\text{有界作用素})$$

である. $\quad i.e.\ \sup_u \dfrac{\|su\|}{\|u\|_{\mathrm{dom}(s)}} < \infty.$
(3) s は作用素商である. すなわち,
${}^{\exists}A \geq 0, B \in \mathcal{B}(H)$ $s.t.$ $\ker A \subseteq \ker B$, $\mathrm{dom}(s) = AH$, $\mathrm{ran}(s) = BH$,

$$s = B/A : Ax \to Bx, \quad x \in H.$$

Remark. 上の定理の

$$\begin{aligned} &(2) \quad s : (\mathrm{dom}(s), \|\cdot\|_{\mathrm{dom}(s)}) \to H \quad (\text{有界}) \\ &(3) \quad s = B/A : Ax \to Bx, \quad x \in H \end{aligned}$$

に関して, 次の 1 対 1 対応がある.

$$\|\cdot\|_{\mathrm{dom}(s)} \quad \overset{1\,\text{対}\,1}{\longleftrightarrow} \quad A \geq 0$$

具体的には, $(\mathrm{dom}(s), \|\cdot\|_{\mathrm{dom}(s)}) \cong \mathcal{M}(A)$ の関係がある.

3 距離空間 $\mathcal{S}(H)$

$\mathcal{S}(H)$ で半閉作用素全体の集合を表し, すべての半閉部分空間 (定義域のこと) に, あらかじめヒルベルトノルムを 1 つづつ与えておく. その 1 つの与え方を α とおくことにする.
この与え方 α に基づいて, 以下のように作用素商表現する. $s, t \in \mathcal{S}(H)$ に対して,

$$s \overset{\alpha}{=} B/A, \quad t \overset{\alpha}{=} D/C \quad (\text{一意表現})\ (A \geq 0, C \geq 0)$$

このとき, 半閉作用素の集合上に, 以下のような距離 $q_\alpha(s,t)$ が定義できる.

$$q_\alpha(s,t) := \max\{\|A-C\|, \|B-D\|\}.$$

この距離は, 定義域が等しい $\mathrm{dom}(s) = \mathrm{dom}(t)$ ときは, $q_\alpha(s,t) = \|s-t\|_\alpha$ となっている. ここで, $\|\cdot\|_\alpha$ とは, ヒルベルト空間 $\mathrm{dom}(s)(= \mathrm{dom}(t))$ から H への作用素ノルムを表している. α がどこに関係してきているかというと, $\mathrm{dom}(s)$ 上にヒルベルトノルムが α により与えられている. 従って, 特に, 有界作用素のクラス $\mathcal{B}(H)$ に限定すると, H から H への作用素ノルムから入る通常の距離 $q_\alpha(s,t) = \|s-t\|$, $s,t \in \mathcal{B}(H)$ に一致していることが確かめられる. 定義域が異なるケースのときは, 定義域どうしの距離 ($= \|A-C\|$) とそれに伴った値域どうしのある種の距離 ($= \|B-D\|$) のうち最大の方として距離を定義している. 2 つの作用素の定義域に包含関係がある場合, 次の結果も確かめられる: $\mathrm{dom(s)} \subseteq \mathrm{dom(t)}$ ならば $q_\alpha(s, s+t) = \|t|_{\mathrm{dom(s)}}\|_\alpha$.

4 対称作用素と自己共役作用素の位相的関係

以下, α は任意に固定しておく. $(\mathcal{S}(H), q_\alpha)$ を距離空間とする.

$$\mathcal{S}_{sym}(H) := \{s \in \mathcal{S}(H) : \mathrm{dom}(s) \text{ は稠密 かつ } s \subseteq s^*\} \quad \text{(対称作用素)}$$

$$\mathcal{S}_{sa}(H) := \{s \in \mathcal{S}(H) : \mathrm{dom}(s) \text{ は稠密 かつ } s = s^*\} \quad \text{(自己共役作用素)}$$

このとき,

$$\mathcal{S}_{sym}(H) \supset \mathcal{S}_{sa}(H)$$

の位相的関係はどうなっているのか? これを考えたい. 先に結論を申し述べると, 次のようになる.

$$\mathcal{S}_{sa}(H) \text{ は } \mathcal{S}_{sym}(H) \text{ で開集合である.}$$

もう少し厳密に述べると, 距離空間 $(\mathcal{S}(H), q_\alpha)$ において, 部分空間 $\mathcal{S}_{sym}(H)$ の中で $\mathcal{S}_{sa}(H)$ は開集合である. すなわち,

Theorem 3 $\forall s \in \mathcal{S}_{sa}(H), \quad \exists \delta > 0 \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} t \in \mathcal{S}_{sym}(H) \\ q_\alpha(s,t) < \delta \end{cases} \quad \textit{implies} \quad t \in \mathcal{S}_{sa}(H).$

(証明の概略)
s を任意の自己共役作用素とし, t を s に十分近い半閉対称作用素とすると, 稠密に定義された閉作用素の集合 $\mathcal{CD}(H)$ は $\mathcal{S}(H)$ で開集合なので, はじめから t は閉対称作用素と考えてよい. t が自己共役であることを見るには,

$$\mathrm{ran}(t \pm iI) = H$$

を示せばよい. ここで, $\Phi = \{i, -i\}$ とおくと, s の自己共役性から $\Phi \subseteq \rho(s)$ となる. ただし, $\rho(s)$ は s のリゾルベント集合のことである. ここでもし, ある $\delta > 0$ が存在して $t \in \mathcal{S}(H)$ かつ $q_\alpha(s,t) < \delta$ ならば $\Phi \subseteq \rho(t)$ が成り立つと仮定すると, 示したい式 $\mathrm{ran}(t \pm iI) = H$ が得られて証明が終わる. (この仮定を示すために, 次のもう少し一般的な補題 4 を証明しよう.)

実は, 一般に次が成立する.

Lemma 4　Φ を $\mathbb{C}$ でコンパクトな集合とし, $s \in \mathcal{CD}(H)$ とする.
$\Phi \subseteq \rho(s)$ と仮定すると, ある $\delta > 0$ が存在して,

$$\begin{cases} t \in \mathcal{S}(H) \\ q_\alpha(s,t) < \delta \end{cases} \text{ならば} \begin{cases} t \in \mathcal{CD}(H) \\ \Phi \subseteq \rho(t) \end{cases} \text{となる.}$$

(証明の概略) 簡単な計算 (以下の補題 5) により,

$$q_\alpha(s-\zeta I, t-\zeta I) \leqq \sqrt{2(1+|\zeta|^2)}\, q_\alpha(s,t), \quad \zeta \in \mathbb{C}$$

が成立することがわかる. $\zeta \in \Phi$ に対して, $s-\zeta I$ は有界な可逆元が存在することと可逆元の集合は開集合であることに注意する. すると, $s \overset{\alpha}{=} B/A$ とおいて, $s-\zeta I \overset{\alpha}{=} (B-\zeta A)/A$ から, 半径 $\|(B-\zeta A)^{-1}\|^{-1}$ 内の半閉作用素は可逆元となる. 従って,

$$q_\alpha(s-\zeta I, t-\zeta I) \leqq \sqrt{2(1+|\zeta|^2)}\, q_\alpha(s,t) < \|(B-\zeta A)^{-1}\|^{-1}$$

を満たすように t を選べば, $\zeta \in \rho(t)$ となる. Φ のコンパクト性から,

$$\delta := \min_{\zeta \in \Phi} \frac{\|(B-\zeta A)^{-1}\|^{-1}}{\sqrt{2(1+|\zeta|^2)}} > 0$$

とおけばよい.

Lemma 5　$s, t \in \mathcal{S}(H)$ に対して,

$$q_\alpha(s-\zeta, t-\zeta) \leqq \sqrt{2(1+|\zeta|^2)}\, q_\alpha(s,t), \quad \zeta \in \mathbb{C}$$

が成立する.

(証明) $s \overset{\alpha}{=} B/A, t \overset{\alpha}{=} D/C$ より $s-\zeta \overset{\alpha}{=} B/A-\zeta \overset{\alpha}{=} (B-\zeta A)/A$ となる. 同様に, $t-\zeta \overset{\alpha}{=} D/C-\zeta \overset{\alpha}{=} (D-\zeta C)/C$ となる. 従って,

$$q_\alpha(s-\zeta, t-\zeta) = \max\{\|A-C\|, \|(B-\zeta A)-(D-\zeta C)\|\}.$$

ここで,

$$\begin{aligned} \|(B-\zeta A)-(D-\zeta C)\| &\leq \|B-D\| + |\zeta|\|A-C\| \\ &\leq \sqrt{1+|\zeta|^2}\sqrt{\|B-D\|^2+\|A-C\|^2} \\ &\leq \sqrt{1+|\zeta|^2}\sqrt{2}\max\{\|B-D\|, \|A-C\|\} \end{aligned}$$

より,

$$q_\alpha(s-\zeta, t-\zeta) \leq \sqrt{2(1+|\zeta|^2)}\, q_\alpha(s,t).$$

5 おわりに

q_α-距離は, 冒頭の「はじめに」に紹介した Kato-Rellich 定理の中で使われている t の s-限界と何か関係があるのだろうか？今のところわかっているのは, 次のような関連性である.

s を**閉**作用素とし, t を半閉作用素とする. また, s の閉性から $\mathrm{dom}(s)$ には s のグラフノルムを与えてヒルベルト空間と考えることができる. 従って, α として, $\mathrm{dom}(s)$ 上のグラフノルムとそれ以外の定義域には適当なヒルベルトノルムが与えらていると考える.

もし $\mathrm{dom}(s) \subseteq \mathrm{dom}(t)$ ならば（自動的に）t は s-有界となり, 任意の $u \in \mathrm{dom}(s)$ に対して,

$$\|tu\| \leq \|t|_{\mathrm{dom(s)}}\|(\|u\|^2 + \|su\|^2)^{1/2} \leq \|t|_{\mathrm{dom(s)}}\|(\|u\| + \|su\|) = \|t|_{\mathrm{dom(s)}}\| \cdot \|u\| + \|t|_{\mathrm{dom(s)}}\| \cdot \|su\|$$

$$\text{よって,}\quad t \text{ の } s\text{-限界 } \leqq \|t|_{\mathrm{dom(s)}}\| = q_\alpha(s, s+t)$$

を満たす. 上記のことと Kato-Rellich の定理から簡単にわかることだが,

上で定めた α に対して, もし $s = s^*$, $t \subseteq t^*$, $\mathrm{dom}(s) \subseteq \mathrm{dom}(t)$ で $q_\alpha(s, s{+}t) < 1$ ならば $s{+}t$ は自己共役になることがわかる.

関数環の同型性を導く末梢スペクトルに関連した条件について

新潟大学自然科学研究科　D３　新藤　瑠美 (Rumi Shindo)

近年，スペクトル（以下，$\sigma(\cdot)$ を用いて表すこととする）などの条件によって関数環や可換バナッハ環の間の写像を特徴付ける結果が多く発表されている．$C(X)$ をコンパクト Hausdorff 空間 X 上の複素数値連続関数全体からなる Banach 環とする．2001 年，Molnár は次のような結果を示した．

定理 1 (Molnár [7]) X は第一可算公理をみたすものとする．全射 $T: C(X) \to C(X)$ が $C(X)$ の任意の元 f, g に対して $\sigma(T(f)T(g)) = \sigma(fg)$ をみたすとき，同相写像 $\phi: X \to X$ が存在して $T(1)^{-1}T(f) = f \circ \phi$ が $C(X)$ の任意の元 f に対して成り立つ．つまり $T(1)^{-1}T$ は自己同型写像である．

この結果は一般化され，関数環の間の写像や可換バナッハ環の間の写像についても同様な結果が示されている．また，スペクトルの部分集合として末梢スペクトルと呼ばれるものを用いた同型写像の特徴付けがさかんに行われるようになった．

本文では A, B をそれぞれコンパクト Hausdorff 空間 X, Y 上の関数環とする．更に A の極大イデアル空間を M_A，Gelfand 変換を $\hat{}$ で表すことにする．A の任意の元 f について次が成り立つ：

$$\|f\|_\infty = \|\hat{f}\|_{\infty(M_A)} \overset{\text{def.}}{=} \sup_{x \in M_A} |\hat{f}(x)|.$$

定義 1 A の元 f に対して f の末梢スペクトル $\sigma_\pi(f)$ とは以下のような集合である：

$$\sigma_\pi(f) = \{f(x) : x \in X \ \ and \ |f(x)| = \|f\|_\infty\}.$$

ある A の関数 u が $\sigma_\pi(u) = \{1\}$ をみたすとき，u を *peak function* という．部分集合 $J \subset X$ に対して $u^{-1}(\{1\}) = J$ をみたす *peak function* u が存在するとき，J を A の *peak set* という．また，$J \subset X$ が A の *peak set* の共通部分で表されるとき，L を A の *weak peak set* という．X のある要素 x について一点集合 $\{x\}$ が A の *peak set* のとき，x を A の *peak point* という．また，一点集合 $\{x\}$ が A の *weak peak set* のとき，x を A の *weak peak point* という．

Luttman and Tonev [5] と Hatori, Hino, Miura and Oka [2] は Molnár の結果を末梢スペクトルを用いて一般化した．また，Lambert, Luttman and Tonev の示した結果により，次の定理が導かれる．

定理 2 (Lambert, Luttman and Tonev [4]) 全射 $T : A \to B$ が A の任意の元 f,g に対して $\sigma_\pi(T(f)T(g)) \cap \sigma_\pi(fg) \neq \emptyset$ をみたし，さらに A の任意の *peak function* u に対して $T(u)$ が B の *peak function* であるとき，同相写像 $\Phi : M_B \to M_A$ が存在して $\widehat{T(f)} = \hat{f} \circ \Phi$ が A の任意の元 f に対して成り立つ．つまり T は多元環としての同型写像で $\sigma(T(f)T(g)) = \sigma(fg)$ が A の任意の元 f,g に対して成り立つ．

ここで，条件

$$\sigma_\pi(T(f)T(g)) \cap \sigma_\pi(fg) \neq \emptyset$$

だけを仮定した場合，全射 $T : A \to B$ の形を決定できるかは未解決であるが，部分的な解答は既に得られている．特に，以下が成り立つことがわかっている．

定理 3 (S., 2008 関数環研究集会) 全射 $T : A \to B$ が $T(1) = 1$ でかつ A の任意の元 f,g に対して $\sigma_\pi(T(f)T(g)) \cap \sigma_\pi(fg) \neq \emptyset$ をみたすものとする．ある $\mathrm{Ch}(A)$ の部分集合 D において $\mathrm{Ch}(A)$ に稠密でかつ第一可算公理をみたすものが存在するとき，同相写像 $\Phi : M_B \to M_A$ が存在して $\widehat{T(f)} = \hat{f} \circ \Phi$ が A の任意の元 f に対して成り立つ．つまり T は多元環としての同型写像で $\sigma(T(f)T(g)) = \sigma(fg)$ が A の任意の元 f,g に対して成り立つ．

本文では，この結果を更に一般化し，多元環としての同型写像 $\widetilde{T} : A \to B$ が存在する条件について，得られた結果を述べる．

定理 4 (S.) $\rho, \tau : A \to A$ と $S, T : A \to B$ を写像とする．ただし，値域 $\rho(A), \tau(A)$ はそれぞれ積について閉じていて，さらに $\exp A$ を含むものとする．同様に、値域 $S(A), T(A)$ はそれぞれ積について閉じていて，さらに $\exp B$ を含むものとする．関数環 A と写像 $\rho, \tau : A \to A$，$S, T : A \to B$ が以下：

1. ある $\mathrm{Ch}(A)$ の部分集合 D において $\mathrm{Ch}(A)$ に稠密でかつ第一可算公理をみたすものが存在する；
2. $\rho(e_1) = \tau(e_2) = 1$ かつ $S(e_1) = T(e_2) = 1$ となる A の元 e_1, e_2 が存在する；
3. A の任意の元 f,g に対して
$$\sigma_\pi(T(f)T(g)) \cap \sigma_\pi(fg) \neq \emptyset$$

をみたすとき，多元環としての同型写像 $\widetilde{T} : A \to B$ と同相写像 $\Phi : M_B \to M_A$ が存在して

$$\widehat{\widetilde{T}(f)} = \hat{f} \circ \Phi,$$

$$\widetilde{T}(\rho(f)) = S(f),\ \widetilde{T}(\tau(f)) = T(f)$$

が A の任意の元 f に対して成り立つ．特に

$$\sigma(S(f)T(g)) = \sigma(\rho(f)\tau(g))$$

が A の任意の元 f,g に対して成り立つ．

証明の中で，次の補題を用いる．以下，$\mathrm{Ch}(A)$ を A の Choquet 境界とする．$\mathrm{Ch}(A)$ は A の境界でさらに A の weak peak point 全体の集合と一致することが知られている．

補題 5 *x は A の peak point とする．A の元 f に対して $f(x) \neq 0$ のとき，$\exp A$ の元でかつ A の peak function u が存在して*

$$\sigma_\pi(fu) = \{f(x)\}, \quad (fu)^{-1}(\{f(x)\}) = u^{-1}(\{1\}) = \{x\}$$

をみたす.

証明 [2] の Proposition 2.2 より，ある $\exp A$ の元で，$\sigma_\pi(fu_1) = \{f(x)\}$ をみたす A の peak function u_1 が存在する．また，x は A の peak point より，A の peak function で $\sigma_\pi(u_2) = \{1\}$ かつ ${u_2}^{-1}(\{1\}) = \{x\}$ となる u_2 が存在する．ここで，$u_3 = (u_2 + 1)/2$ とすると，u_3 は $\exp A$ に含まれる A の peak function で ${u_3}^{-1}(\{1\}) = \{x\}$ をみたす．すると $u = u_1 u_3$ が条件をみたす A の peak function である． □

定理 4 の証明 $\rho, \tau : A \to A$ と $S, T : A \to B$ を定理 4 の条件をみたす写像とする．条件より，A の任意の元 f, g に対して

$$\|S(f)T(g)\|_\infty = \|\rho(f)\tau(g)\|_\infty$$
$$\|S(f)\|_\infty = \|\rho(f)\|_\infty, \ \|T(f)\|_\infty = \|\tau(f)\|_\infty$$

が成り立つ．[8] の Proposition 2.1 （より一般的な形で [3] の Proposition 2.3 がある）を用い，同相写像 $\phi : \mathrm{Ch}(B) \to \mathrm{Ch}(A)$ が存在して

$$|S(f)(y)| = |\rho(f)(\phi(y))|, \quad |T(f)(y)| = |\tau(f)(\phi(y))| \tag{1}$$

が A の任意の元 f と $\mathrm{Ch}(B)$ の任意の元 y に対して成り立つことがわかる．

f を A の任意の元，y を $\mathrm{Ch}(B)$ の任意の元とする．はじめに

$$S(f)(y) = \rho(f)(\phi(y)) \tag{2}$$

が成り立つことを示す．(1) より，$S(f)(y) \neq 0$ でかつ $\rho(f)(\phi(y)) \neq 0$ のとき，$S(f)(y) = \rho(f)(\phi(y))$ を示せば十分である．D を $\mathrm{Ch}(A)$ の部分集合で，$\mathrm{Ch}(A)$ に稠密でかつ第一可算公理をみたすものとする．$y \in \phi^{-1}(D)$ のとき，可算個の近傍基底を持つ weak peak point は peak point である [1, Lemma 2.3.1] から，$\phi(y)$ は A の peak point である．補題 5 より，$\exp A$ の元で

$$\sigma_\pi(\rho(f)\mathfrak{u}) = \{\rho(f)(\phi(y))\}, \quad \mathfrak{u}^{-1}(\{1\}) = (\rho(f)\mathfrak{u})^{-1}(\{\rho(f)(\phi(y))\}) = \{\phi(y)\}$$

をみたす A の peak function $\mathfrak{u}$ が存在する．$\tau(u) = \mathfrak{u}$ となる A の元 u をひとつ固定する．条件より，

$$\sigma_\pi(T(u)) \cap \sigma_\pi(\tau(u)) = \sigma_\pi(T(u)) \cap \{1\} \neq \emptyset$$

である．さらに (1) より $\mathrm{Ch}(B) \setminus \{y\}$ の任意の元 η に対して $|T(u)(\eta)| = |\tau(u)(\phi(\eta))| < 1$ であるから，$T(u)$ は B の peak function，y は B の peak point で

$$T(u)^{-1}(\{1\}) = \{y\}$$

をみたす．また，$\mathrm{Ch}(B) \setminus \{y\}$ の任意の元 η に対して

$$|S(f)(\eta)T(u)(\eta)| < |S(f)(\eta)| = |\rho(f)(\phi(\eta))|$$

である．ここで，$\sigma_\pi\left(S(f)T(u)\right) \cap \sigma_\pi\left(\rho(f)\tau(u)\right) = \sigma_\pi\left(S(f)T(u)\right) \cap \{\rho(f)(\phi(y))\} \neq \emptyset$ である．以上より，

$$S(f)(y) = S(f)(y)T(u)(y) = \rho(f)(\phi(y))$$

が成り立つ．D は $\mathrm{Ch}(A)$ に稠密であるから，(2) は $y \in \mathrm{Ch}(B) \setminus \phi^{-1}(D)$ のときも成り立つ．同様にして，

$$T(f)(y) = \tau(f)(\phi(y)) \tag{3}$$

がわかる．

A の任意の元 f に対して，0 でない複素数 λ と $\exp A$ の元 f_0 を用いて $f = f_0 + \lambda$ と表せる．$\rho(a) = f_0$，$\rho(b) = \lambda$ となる $a, b \in A$ をとる．ここで，写像を以下のように定義する：

$$\widetilde{T}(f) = S(a) + S(b).$$

すると，(2) より $\mathrm{Ch}(B)$ の任意の元 y に対して

$$\widetilde{T}(f)(y) = (\rho(a) + \rho(b))(\phi(y)) = f(\phi(y))$$

が成り立つ．よって $\widetilde{T}$ は A から B への多元環としての同型写像である（cf. [8, Theorem 3.2]）．また，(2) より A の任意の元 f と $\mathrm{Ch}(B)$ の任意の元 y に対して

$$\widetilde{T}(\rho(f))(y) = \rho(f)(\phi(y)) = S(f)(y)$$

であるから，

$$\widetilde{T}(\rho(f)) = S(f)$$

が A の任意の元 f に対して成り立つ．同様に，

$$\widetilde{T}(\tau(f)) = T(f)$$

である．M_B の任意の元 y に対して A 上の汎関数 $\Phi(y)$ を次のように定義する：A の任意の元 f に対して

$$\Phi(y)(f) = \widetilde{T}(f)(y).$$

すると Φ は M_B から M_A への同相写像である（cf. [6, Theorem 2.1]）． $\square$

最後に，$A = B = C(X)$ としたときの例をいくつか挙げる．

例 1 以下の位相空間は，第一可算公理をみたす稠密な部分集合を持つ．

- $[0,1]$: *Fort space*

  （$[0,1]$ 閉区間に位相 $\mathbb{G} = \{G \subset [0,1] : 1 \in G$ または G の補集合が有限集合 $\}$ を入れたもの).

- $[0,1] \times [0,1]$: *Alexandroff sqare.*

- $\beta\mathbb{N}$: 自然数 $\mathbb{N}$ の *Stone-Čech* のコンパクト化.

例 2 $\exp C(X)$ の元 α をひとつ固定する．すると，以下のような関数 ρ の値域 $\rho(A)$ は積について閉じていて，さらに $\exp A$ を含む.

- m を自然数とする．$C(X)$ の任意の元 f に対して

$$\rho(f) = \alpha f^m.$$

  また，${e_1}^m = \alpha^{-1}$ となる e_1 について，$\rho(e_1) = 1$ である．

- $C(X)$ の任意の元 f に対して

$$\rho(f) = \alpha \exp f.$$

  また，$\exp(e_1) = \alpha^{-1}$ となる e_1 について，$\rho(e_1) = 1$ である．

- $\bar{\cdot}$ を複素共役とする．$C(X)$ の任意の元 f に対して

$$\rho(f) = \alpha \bar{f} \quad (f \in C(X)).$$

  また，$e_1 = \bar{\alpha}^{-1}$ について，$\rho(e_1) = 1$ である．

- （**Hatori, Miura, Shindo and Takagi [3]**）X_1, X_2, X_3 は互いに素な開かつ閉集合で $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$ とする．m, n を自然数ととする．$C(X)$ の任意の元 f に対して

$$\rho(f)(x) = \begin{cases} f^m(x) & x \in X_1 \\ f^n(x) & x \in X_2 \\ \overline{f(x)} & x \in X_3. \end{cases}$$

  α_m, α_n を ${\alpha_m}^m = {\alpha_n}^n = 1$ となる複素数とする．

$$e_1(x) = \begin{cases} \alpha_m & x \in X_1 \\ \alpha_n & x \in X_2 \\ 1 & x \in X_3 \end{cases}$$

  とすると，$\rho(e_1) = 1$ である．

参考文献

[1] A. Browder, *Introduction to function algebras*, W. A. Benjamin, 1969.

[2] O. Hatori, K. Hino, T. Miura and H. Oka, *Peripherally monomial-preserving maps between uniform algebras*, Mediterr. J. Math., **6** (2009), 47–59.

[3] O. Hatori, T. Miura, R. Shindo and H. Takagi, *Generalizations of Spectrally multiplicative surjections between uniform algebras*, (2009), preprint.

[4] S. Lambert, A. Luttman and T. Tonev, *Weakly peripherally-multiplicative mappings between uniform algebras*, Contemp. Math., **435** (2007), 265–281.

[5] A. Luttman and T. Tonev, *Uniform algebra isomorphisms and peripheral multiplicativity*, Proc. Amer. Math. Soc., **135** (2007), no.11, 3589–3598.

[6] A. Luttman and S. Lambert, *Norm conditions for uniform algebra isomorphisms*, Cent. Eur. J. Math., **6(2)** (2008), 272–280.

[7] L. Molnár, *Some characterizations of the automorphisms of $B(H)$ and $C(X)$*, Proc. Amer. Math. Soc., **130** (2001), 111–120.

[8] R. Shindo, *Norm conditions for real-algebra isomorphisms between uniform algebras*, Cent. Eur. J. Math., **8(1)** (2010), 135–147.

A Mazur-Ulam theorem

新潟大学自然科学系　　羽鳥　理 (Osamu Hatori)

1　背景

等距離写像の代数構造の研究の歴史は非常に古くまでさかのぼれるようである。平面間の等距離写像は回転と裏返しと平行移動を組み合わせてできる。このことの証明は 1831 年に Chasles が与えているようであるが，Euler が 1776 年には 3 次元の場合の研究をしているということのようで，実際は 2 次元の場合の結果は非常に古くから知られていたようである。抽象的な空間に対する研究では，Mazur-Ulam の定理が古典的である。この定理はノルム空間の間の等距離写像は「代数的な中点」を保存することを主張し，従って等距離写像で結ばれる二つのノルム空間は実等距離同形であることが分かる。一方代数的な中点の存在しない，あるいは存在しても複数あるような対象も多くある（例えば，整数全体の群では 1 と 2 の「代数的な中点」は存在しない。また 1 次元トーラスの群では「代数的な中点」が 2 つ存在する。)。このような対象に対しても等距離写像は代数構造を保存している。この小論ではある種の距離群の等距離写像の代数構造について考察したい。

次が Mazur-Ulam [2](cf.[3]) の定理である。

Mazur-Ulam の定理 1 X，Y を実ノルム空間とする。このとき，X から Y の上への全射等距離写像は線形写像＋定数である。

「距離についての中点」が 1 点である場合は証明は簡単であるが，一般のノルム空間では「距離についての中点」が多数あるため工夫が必要であり，今までに知られている証明では対象移動に着目する方法がとられる。同様の手法で Molnár [1] は次を得た。

Molnár の定理（2009） 1 ヒルベルト空間 H 上の可逆正作用素全体 $B(H)_+^{-1}$ 上の *Thompson* 距離保存全射は幾何平均を保存する。

証明では 2 点 a, b の距離が a と b の中点と a の距離の 2 倍であることを本質的に用いている点で，Mazur-Ulam の定理の現在知られている証明とアイデアは共通している。Mazur-Ulam の定理についても局所化され，また線形距離空間や距離群への拡張が試みられては入るものの十分な一般化が実現されていないのも実情である。一方，0 以外の複素数に値をとる連続関数の群では等距離性から複素数値関数からなる環としての（実）代数構造を復元できることが異なるアイデアのもとで証明されていて，このことは距離群（やその部分集合）の間の等距離写像の代数構造の研究の可能性を示唆していると思う。

この小論では，Mazur-Ulam の定理の非可換化を考慮し，個別に証明されている Mazur-Ulam 型の定理の統一的な証明を試みる。

2　（m 性）,（r 性）,（局所 $*$ 性）をみたす距離空間

平均，対称移動が定義された距離空間を考える。

定義 2.1 (X,d) を距離空間とする。

・（**m** 性）$\exists m : X \times X \to X$

(1) $m(p,p) = p,\ \forall p \in X$

(2) $m(p,q) = m(q,p),\ \forall p,q \in X$

(3) $d(p, m(p,q)) = d(q, m(p,q)),\ \forall p,q \in X$

・（**r** 性）$\forall x \in X, \forall a \in X\ \exists! y \in X \quad s.t. \quad m(x,y) = a$

この y を $\varphi_a(x)$ で表す。φ_a は等距離写像であると仮定する。

・（局所 $*$ 性）$\forall a \in X,\ \forall B : X$ の有界集合，$\exists K_{a,B} > 1\ s.t.$

$d(x, \varphi_a(x)) \geq K_{a,B} d(x,a),\ \forall x \in B$

3　いくつかの例

例 1（（m 性）,（r 性）,（局所 $*$ 性）をみたす距離空間の例） 3.1 V を群 G の空でない部分集合とし，以下をみたすものとする。

・$1 \in V$（単位元の含有）

・$a,b \in V \Rightarrow ba^{-1}b \in V$　（対称点の存在）

・$a,b \in V \Rightarrow \exists! c \in V \quad s.t. \quad ca^{-1}c = b$　（幾何平均の存在）

このcを $a\#b$ と書き a と b の幾何平均ということにする。実際 $a\#b = a^{\frac{1}{2}}(a^{-\frac{1}{2}}ba^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}$ であり，$a\#b = b\#a$ も分かる。ここで，$a^{\frac{1}{2}} = a\#1$ とする。（G が *uniquely 2-divisible* で $V = G$ ならば，V は上の３条件をみたす。）

V には次の等式の成立する距離（対称移動不変距離）が定義されているとする。

$d(a,b) = d(xa^{-1}x, xb^{-1}x), \quad \forall a,b,x \in V$

$m(a,b) = a\#b$ と定め，$\varphi_a(x) = ax^{-1}a$ とすると，V は m 性と r 性をみたすことが分かる。
さらに，次（２乗転進条件）が成り立つとき局所 $*$ 性もみたす。

$\forall B$（V の有界集合）に対して，$\exists K_B > 1\ s.t.$

$d(1,b) \geq K_B d(1, b^{\frac{1}{2}}),\ \forall b \in B$

例 1 の V の例その１ 1 V をノルム空間として和に関する加群と考える。V には対称点が存在し幾何平均が存在する。実際 a と b の幾何平均は $\frac{a+b}{2}$ である。任意の $b \in V$ に対して，

$d(0,b) = 2d(0, \frac{b}{2})$

が成り立つので，*2* 乗転進条件が成り立つ。

例 1 の V の例その２ 1 単位的 C^*環の *positive element* 全体を V とする。$1 \in V$ であり，*positive element* の逆元や平方根がまた *positive element* であることから対称点の存在と幾何平均の存在も言える。V での距離を *Thompson* 距離 d_T とする（*i.e.* $d_T(A,B) = \|\log A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\|$）*Thompson* 距離は対称移動不変であり，任意の $B \in V$ に対して，

$d_T(1,B) = 2d_T(1, B^{\frac{1}{2}})$

が分かるので，$K_B = 2$ で *2* 乗転進条件がみたされている。

G を単位開円板上の（双曲距離 d_H に関する）等距離自己同形写像で，(その円周への拡張が）円周上のある1点を固定するもの全体の群とする。このとき V は uniquely 2-divisible である。$\phi, \psi \in G$ に対して，

$$d(\phi, \psi) = d_H(\phi(0), \psi(0))$$

と定める。講演の中で，この距離は対象移動不変であると述べたが，これは誤りであるのでここで訂正する。講演では以下の章で述べる主定理により G から G の上への等距離写像は幾何平均を保存すると述べたが，G は定理の条件をみたさないので主定理を適用することはできない。直接的な方法で等距離写像を記述できたので（従って幾何平均を保存することは正しい），ここで述べておく。複素平面の上半平面上の等距離自己同形写像の群についてのほうが記述が簡明になるのでそのようにする。円板と上半平面は正則同値なので実質的内容は同じである。そこで G_0 を上半平面上の（双曲距離に関する）等距離自己同形写像で ∞ を固定するもの全体（つまり $\phi(z) = az + b$, $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ となる ϕ 全体）とする。

定理 3.1 T を G_0 から G_0 の上への全射等距離写像とする。このとき

$$T(\phi) = T(e)\phi, \quad \phi \in G_0$$

または，

$$T(\phi) = T(e)\widetilde{\phi}, \quad \phi \in G_0$$

である。ここで $e(z) = z$ であり，$\phi(z) = az + b$ に対して $\widetilde{\phi}(z) = az - b$ である。

証明では，$\phi(z) = az + b$，$\varphi(z) = cz + d$ のとき $\phi\#\varphi = \sqrt{ac}z + \frac{b\sqrt{c}+d\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}$ を用いる。実際次のようである。

$$\frac{(a-1)^2 + b^2}{(a+1)^2 + b^2} = \frac{(\alpha-1)^2 + \beta^2}{(\alpha+1)^2 + \beta^2}$$

がわかる（ここで $T(e) = e$ として一般性を失わないのでそのようにしている)。また，$\phi(z) = az+b$ とし $T(\phi) = \alpha(z) + \beta$ とすると

$$d(T(e), T(\phi\#e)) = d(T(e), T(\phi)\#T(e))$$

であるから，

$$d(e, \phi\#e) = d(T(e), T(\phi\#e)) = d(e, T(\phi)\#e))$$

である。よって

$$\frac{(\sqrt{a}-1)^2 + (b/(\sqrt{a}+1))^2}{(\sqrt{a}+1)^2 + (b/(\sqrt{a}+1))^2} = \frac{(\sqrt{\alpha}-1)^2 + (\beta/(\sqrt{\alpha}+1))^2}{(\sqrt{\alpha}+1)^2 + (\beta/(\sqrt{\alpha}+1))^2}$$

である。このことから

$$T(\phi) = az + b,\ T(\phi) = az - b,\ T(\phi) = \frac{1}{a}z + \frac{b}{a},\ T(\phi) = \frac{1}{a}z - \frac{b}{a}$$

以外にはないことがわかる。特に $\phi_0 = z + 1$ なら

$$T(\phi_0) = z + 1,\ T(\phi_0)z - 1$$

のどちらかである。$T(\phi_0) = z + 1$ が成り立つ場合には $T(\phi) = az + b$ が任意の $\phi = az + b$ に対して成り立つ。実際にまず $a \neq 1$, $b \neq 0$, $a \neq 1 - 2b$, $a \neq 2b - 1$ であるような $\phi = az + b$ を考えて，$d(\phi_0, \phi) = d(T(\phi_0), T(\phi))$ であることから $T(\phi) = az + b$ が分かる。一般の場合は近似を用いる。同様に $T(\phi_0) = z - 1$ の場合には，任意の $\phi = az + b$ に対して $T(\phi) = az - b$ である。

4 補題と主定理

つぎが Vogt [4] により知られている。

補題 4.1 [1](L,d) を有界距離空間とする。$c\in L$ と $\varphi: L\to L$，全射が存在して，$d(x,\varphi(x))\geq Kd(x,c)$ $\forall x\in X$ をみたす $K>1$ が存在する。このとき，任意の全射等距離写像 $T: L\to L$ に対して，

$$T(c)=c$$

が成り立つ。

Vogt の与えたものと少し異なった証明を与える。
補題の証明. W を L から L への等距離写像全体とする。

$$\lambda=\sup\{d(T(c),c): T\in W\}$$

とする。$\lambda=0$ を示す。まず L が有界で W は空でないから，

$$0\leq\lambda<\infty$$

である。$T\in W$ に対して，$T^*=T^{-1}\circ\varphi\circ T$ とおくと，$T^*\in W$ で，$\lambda\geq d(T^*(c),c)=d(T(c),\varphi(T(c)))\geq Kd(T(c),c)$ が成り立つので，$\lambda\geq K\lambda$ が分かり，$\lambda=0$ が分かる。

定理 4.2 (X,d_X) を m 性，r 性，局所 $*$ 性をみたす距離空間とする。(Y,d_Y) を m 性，r 性をみたす距離空間とする。$T: X\to Y$ を上への等距離写像とする。このとき，$T(m(p,q))=m(T(p),T(q))$ が任意の $p,q\in X$ に対して成立する。(T は *affine* であるということにする)。

定理の証明. $p,q\in X$ とする。

$$L=\{x\in X: d_X(p,x)=d_X(q,x)=d_X(p,m(p,q))\}$$

とする。$m(p,q)\in L$ で L は有界集合で，$\varphi_{m(p,q)}(L)=L$ である。局所 $*$ 性から，$K_{m(p,q)}>1$ が存在して

$$d_X(x,\varphi_{m(p,q)}(x))\geq K_{m(p,q)}d_X(x,m(p,q))$$

が成り立つから，補題により L 上の任意の等距離写像は $m(p,q)$ を不動点とする。与えられた T に対して $T^*=(T|L)^{-1}\circ\varphi_{m(T(p),T(q))}\circ T|L$ と定めると，T^* は L 上の等距離写像となることが分かり，従って $T^*(m(p,q))=m(p,q)$ であり，$\varphi_{m(T(p),T(q))}(T(m(p,q)))=T(m(p,q))$ である。$\varphi_{m(T(p),T(q)}$ の不動点は $m(T(p),T(q))$ のみなので，$T(m(p,q))=m(T(p),T(q))$ である。

系 4.3 V_1，V_2 をそれぞれ群 G_1，G_2 の空でない部分集合で，単位元を含有し，対称点が存在し，幾何平均も存在するものとする。また，対称移動不変な距離が定義されているとする。さらに，V_1 の距離では 2 乗転進条件がみたされているとする。このとき T を，V_1 から V_2 の上への等距離写像とすると，T は *affine* である。また，$T_0(x)=T(1)^{-\frac{1}{2}}T(x)T(1)^{-\frac{1}{2}}$ と定めると，T_0 は *square preserving*（$T_0(a^2)=T_0(a)^2$）で，*Jordan triple preserving*（$T_0(aba)=T_0(a)T_0(b)T_0(a)$）である。

[1]講演では Vogt の結果として紹介しなかったが，実際は Vogt [4] が最初に証明している思われる。

参考文献

[1] L. Molnár, *Thompson isometries of the space of invertible positive operators*, Proc. Amer. Math. Soc., **137**(2009), 3849–3859

[2] S. Mazur and S. Ulam, *Sur les transformationes isométriques d'espaces vectoriels normés*, C. R. Acad. Sci, Paris, **194**(1932), 946–948

[3] J. Väisälä, *A proof of the Mazur-Ulam theorem*, Amer. Math. Monthly, **110**(7)(2003), 633–635

[4] A. Vogt, *Maps which preserve equality of distance*, Studia Math., **45**(1973), 43–48

Parreau-Widom 型の Denjoy 領域について

茨城大学　　荷見　守助 (Morisuke Hasumi)

1　はじめに

1.1　基本定義

$E \subsetneqq \mathbb{R}$ を閉集合とするとき，$\mathcal{D} = \overline{\mathbb{C}} \setminus E$ を **Denjoy 領域**と呼ぶ．等角的には E は有界でも非有界でも違いはないが，E を自己共軛作用素のスペクトルと見なすときは差が出てくる．ここでは作用素までは考えないことにして，E は有界であると仮定する．従って，$-\infty < b_0 < a_0 < +\infty$ として

$$E = [b_0, a_0] \setminus \bigcup_{j \geqq 1} (a_j, b_j) \tag{1}$$

と表すことが出来る．各 (a_j, b_j) をギャップと呼ぶ．以下では，$\mathrm{Cap}E > 0$ を仮定する．従って，$\mathcal{D}$ には Green 函数 $g(a, z)$ が存在する．我々は二つの例に注目する．

例 1.1 (Carleson の等質集合 E) 閉集合 $E \subsetneqq \mathbb{R}$ が等質であるとは，

$$|E \cap (x - r, x + r)| \geqq cr \qquad (\forall x \in E,\, 0 < \forall r < \mathrm{diam}(E))$$

を満たすことを云う．この形の Denjoy 領域が注目される一つの理由は，Carleson [2] が E を等質集合とするときの $\mathcal{D}$ に対してコロナ定理を証明したことによる．

例 1.2 (Sodin-Yuditskii の (RPW) 族) $E \in$ (RPW) であるとは，$\mathcal{D} = \mathbb{C} \setminus E$ がポテンシャル論の意味で正則で且つ Parreau-Widom 型であることを云う．即ち，$g(\infty, z)$ の臨界点を c_j $(a_j < c_j < b_j)$ とするとき，$g(\infty, x) = 0$ $(\forall\, x \in E)$ 且つ PW 条件

$$\sum_{j \geqq 1} g(\infty, c_j) < \infty \tag{PW}$$

を満たすことを云う (Hasumi [5] 参照)．Sodin-Yuditskii [9] は Parreau-Widom 型領域の (Sturm-Lieuville) 微分方程式理論における有効性を示した最初の論文である．

さらに，次がある：

(a) Jones-Marshall [6] : 任意の等質集合は (RPW) である．

(b) Sodin-Yuditskii *loc. cit.* : E が等質集合ならば，Denjoy 領域 $\mathcal{D}$ は (DCT) (Hasumi [5] 参照) を満たす．

1.2　目標

ここでは，$\mathcal{D}$ に関する $a \in \mathcal{D}$ の調和測度 $\omega(a,x) = \omega(a,x,\mathcal{D})$ $(x \in E)$ を考える．即ち，任意の $f \in C_{\mathbb{R}}(E)$ を境界函数とする $\mathcal{D}$ 上の Dirichlet 問題の Wiener 解 (Garnett-Marshall [3] 参照) を $u(z)$ とするとき，次を満たすものとして定義される：

$$u(a) = \int_E f(x)\, d\omega(a,x)\ .$$

このとき，例えば $d\omega(\infty,x)$ は E の平衡分布 $d\mu_E(x)$ に一致する．

定理 1.1 (Sodin-Yuditskii [9]) $E \in$ (RPW) ならば，$d\omega(\infty,x)$ と $dx|E$ は互いに絶対連続である．

この結果は Sodin-Yuditskii [9, Remark 4.6.1] で具体的な証明なしで与えられている．証明については Jones-Marshall [6, §3] を見れば分るかのようにも読めるが，Jones-Marshall は Carleson の等質集合の場合を扱うだけでもかなりな労力を使っているので，$E \in$ (RPW) の場合まで届くのかどうか筆者には分らない．それで他の証明を探していたところ，Gesztesy-Yuditskii [4] の中にある論法がそのまま応用できるようなので，以下に報告したい．

2　証　明

$\mathcal{D} = \overline{\mathbb{C}} \setminus E$ が Denjoy 領域のとき，$\mathcal{D}$ 上の函数 f が **Nevanlinna 函数**であるとは，

(a) $f(z)$ は $\mathcal{D}$ 上で有理型である，

(b) $f(z)$ は上半平面及び下半平面を保存する．即ち，

$$\operatorname{Im} f(z)/\operatorname{Im} z > 0 \qquad (\operatorname{Im} z \neq 0)\ .$$

の二条件を満たすものとする．

補題 2.1 $E \in$ (RPW) とし，調和測度 $\omega(\infty,\cdot)$ の Cauchy 変換を $u(z)$ とする．即ち，

$$u(z) = \int_E \frac{d\omega(\infty,t)}{t-z} \tag{2}$$

とおく．このとき，Green 函数 $g(z) = g(\infty,z)$ の臨界点で (a_j,b_j) に含まれるものを c_j として次が成り立つ：

$$u(z) = -\widetilde{g}'(z) = -\frac{1}{\sqrt{(z-a_0)(z-b_0)}} \prod_{j \geqq 1} \frac{z-c_j}{\sqrt{(z-a_j)(z-b_j)}}\ . \tag{3}$$

従って，$u(z)$ は $\mathcal{D}$ 上の Nevanlinna 函数である．

$\mathcal{D}_N = [b_0,a_0] \setminus \bigcup_{j=1}^N (a_j,b_j)$ に対して先ず証明し，$N \to \infty$ とすればよい．この証明は省略する．

さらに，次を注意しておく．上半平面 $\mathbb{H}_+$ 上の正則函数 F が正の虚部を持つとき，**Herglotz 函数**と呼ぶ．これらの函数は Denjoy 領域を扱う際に重要な役割を演ずるので，参考までに Herglotz 函数の基本性質を若干述べておく．比較的最近の参考書は : Akhiezer-Glazman [1, 第 69 節], Koosis [7, 第 6 章], Rosenblum-Rovnyak [8, 第 5 章] などである．

定理 2.1 $F(z)$ を $\mathbb{H}_+$ 上の Herglotz 函数とする．このとき，次が成り立つ：

(a) F は外函数である．

(b) F はほとんど全ての $x \in \mathbb{R}$ に対し有限な非接極限 $F(x+i0)$ を持つ．

(c) F の非接極限については，$F(x+i0) \neq 0$ a.e. が成り立つ．

(d) $\mathbb{R}$ 上の非負の測度 τ で
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\tau(x)}{1+x^2} < \infty$$
を満たすものが存在して，Nevanlinna (または，Riesz-Herglotz) 表現
$$F(z) = \alpha + \beta \cdot z + \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{t-z} - \frac{t}{1+t^2} \right] d\tau(t) \quad (z \in \mathbb{H}_+) \tag{4}$$
が成り立つ．但し，$\alpha = \mathrm{Re}(F(i)), \beta = \lim_{y\to+\infty} F(iy)/(iy) \geqq 0$ である．逆に，(4) を満たす函数は Herglotz 函数である．これらの定数と測度は一意で，$\alpha = \beta = 0$ ならば，$d\tau(x) \neq 0$ である[1]．

(e) $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ $(x_1 < x_2)$ ならば，測度 $d\tau$ に対する Stieltjes の反転公式
$$\tfrac{1}{2}\tau(\{x_1\}) + \tfrac{1}{2}\tau(\{x_2\}) + \tau((x_1, x_2)) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{Im}\, F(t+i\varepsilon)\, dt$$
が成り立つ．

(f) 測度 $d\tau$ の Lebesgue 測度 dx に関する絶対連続部分 $d\tau_{ac}$ は
$$d\tau_{ac}(x) = \frac{1}{\pi} \mathrm{Im}\, F(x+i)\, dx\ .$$

また，次を注意しておく．

補題 2.2 $F \in N(\mathbb{H}_+)$ は外函数であるとする．このとき，$0 < p < \infty$ に対し $|F(z)|^p$ が $\mathbb{H}_+$ 上で調和優函数を持つための必要十分条件は F の非接境界函数 $F^*(x) = F(x+i0)$ が次を満たすことである：
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|F^*(x)|^p}{1+x^2}\, dx < \infty\ .$$

さらに，単位円板 $\mathbb{D} = \{|\zeta| < 1\}$ から $\mathbb{H}_+ = \{\mathrm{Im}\, z > 0\}$ への等角写像 ϕ を
$$z = \phi(\zeta) = i\,\frac{1-\zeta}{1+\zeta} \quad \text{または} \quad \zeta = \phi^{-1}(z) = \frac{i-z}{i+z}$$
によって定義する．この場合，境界対応を $e^{i\theta} \mapsto t$ とすれば，
$$d\sigma(\theta) = \frac{1}{\pi}\,\frac{dt}{1+t^2}$$

[1]測度 $d\tau$ を F の **Nevanlinna 測度**と呼ぶ．

が成り立つ．さらに，Herglotz 核と Poisson 核は次のように変換される：

$$\frac{e^{i\theta}+\zeta}{e^{i\theta}-\zeta}\,d\sigma(\theta)=\frac{1}{\pi i}\left[\frac{1}{t-z}-\frac{t}{1+t^2}\right]dt\,,$$
$$\mathrm{Re}\left[\frac{e^{i\theta}+\zeta}{e^{i\theta}-\zeta}\right]d\sigma(\theta)=\frac{1}{\pi}\,\frac{y\,dt}{|t-z|^2}\,.$$

これだけ準備すれば，定理 1.1 の証明は Gesztesy-Yuditskii [4] の論法を真似するだけである．

定理 1.1 の証明 (Gesztesy-Yuditskii [4, §4]**).** 我々は調和測度 $d\omega(\infty,x)$ の Cauchy 変換 $u(z)$ ((2) 参照) を考察する．$d\omega(\infty,x)$ は E 上の有限正測度であるから，$u(z)$ は $\mathcal{R}$ 上の Nevanlinna 函数である．従って，上半平面 $\mathbb{H}_+$ 上の Herglotz 函数であるから，定理 2.1(a) により，$u(z)$ は外函数である．

次に，我々は $u(x+i0)/(x+i)\in L^1(\mathbb{R};dx)$ を示そう．このため，$x\in\mathcal{R}\cap\mathbb{R}$ 上では $u(x)=-g'(x)$ であることを利用する．まず，各 (a_j,b_j) 上では，

$$\int_{a_j}^{c_j}|u(x)|\,dx=\int_{c_j}^{b_j}|u(x)|\,dx=g(c_j)$$

であるから，PW 条件により

$$\sum_{j\geqq 1}\int_{a_j}^{b_j}|u(x)|\,dx=2\sum_{j\geqq 1}g(c_j)<\infty$$

が成り立つ．次に，E 上では $u(x+i0)\in i\mathbb{R}$ a.e. であるから，Fatou の定理により $(\pi i)^{-1}u(x+i0)\,dx$ は $d\omega(\infty,x)$ の (Lebesgue 測度 dx に関する) 絶対連続部分に等しい．従って，

$$\frac{1}{\pi i}\int_E u(x+i0)\,dx\leqq\int_E d\omega(\infty,x)=1 \tag{5}$$

となり，$u(x+i0)$ は E 上で可積分である．最後に，$[b_0,a_0]$ の外では，$u(x)\sim -1/x$ $(x\to\pm\infty)$ であるから，$u(x)/(x+i)$ は可積分である．以上を併せて，

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{|u(x+i0)|\,dx}{1+|x|}<\infty \tag{6}$$

が得られた．ところが，u は $\mathbb{H}_+$ 上の外函数であるから，補題 2.2 を参照すれば，$u(z)$ は $\mathbb{H}_+$ 上で調和優函数を持つことが分る．これから，$f(\zeta)=F(\phi(\zeta))$ は $H^1(\mathbb{D})$ に属するから，$u(z)$ はその非接境界函数の Poisson 積分として表される．変数変換で上半平面に戻れば，これから $u(z)$ が非接境界函数 $u(x+i0)$ の Poisson 積分で表されることとが導かれることに注意する．

次に，函数

$$v(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}}\frac{u(t+i0)\,dt}{t-z}\qquad(z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})$$

を導入する．このとき，$v(z)$ は $\mathbb{H}_+\cup\mathbb{H}_-$ 上で正則であり，且つ

$$\begin{aligned}v(z)-v(\overline{z})&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}}\Big(\frac{1}{t-z}-\frac{1}{t-\overline{z}}\Big)u(t+i0)\,dt\\&=\frac{y}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{u(t+i0)\,dt}{(t-x)^2+y^2}=u(z)\quad(z=x+iy\in\mathbb{H}_+)\end{aligned}$$

を得る．ここで，最後の等号では上の注意を使用した．$u(z)$ と $v(z)$ は $\mathbb{H}_+$ で正則であるから，$v(\overline{z})$ も同様である．しかし，

$$\overline{v}(\overline{z}) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{\overline{u(t+i0)}\,dt}{t-z} \qquad (z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R})$$

も $\mathbb{H}_+$ で正則であるから，$v(\overline{z})$ は $z \in \mathbb{H}_+$ において定数である．ところが，$\lim_{y\uparrow\infty} v(-iy) = 0$ であるから，$v(\overline{z}) = 0$ $(z \in \mathbb{H}_+)$ を得る．よって．

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{u(t+i0)\,dt}{t-z} = u(z)\,, \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{u(t+i0)\,dt}{t-\overline{z}} = 0 \qquad (z \in \mathbb{H}_+)\,.$$

$u(z)$ は $\mathbb{R}\setminus E$ 上では実であるから，

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{[u(t+i0) - \overline{u(t+i0)}]\,dt}{t-z} \\ &= \frac{1}{\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{Im}(u(t+i0))\,dt}{t-z} = \int_E \frac{d\omega(\infty,t)}{t-z} \qquad (z \in \mathbb{H}_+)\,. \end{aligned}$$

故に，$d\omega(\infty,x) = \pi^{-1}\,\mathrm{Im}(u(x+i0))\,dx = (\pi i)^{-1}u(x+i0)\,dx$．これで $d\omega(\infty,x) \ll dx|E$ の証明は終った．

一方，逆方向の絶対連続性 $dx|E \ll d\omega(\infty,x)$ は PW 性に関係なくほとんど自明であるが，証明を完結させるため述べておく．この場合は $|E|>0$ を仮定して証明すれば十分である．Borel 集合 $F \subset E$ は $|F|>0$ を満たすとして，上半平面上の調和函数を

$$U(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(t-x)^2+y^2}\ \mathrm{ch}_F(t)\,dt$$

で定義する．但し，ch_F は集合 F の特性函数である．$|F|>0$ であるから，上半平面内の有限な ζ に対して $U(\zeta)>0$ を満たす．境界値を比較すれば，F の調和測度について $0 < U(\zeta) \leqq \omega(\zeta, F, \mathcal{R})$ が分るから，特に $\omega(\infty, F, \mathcal{D}) > 0$ が成り立つ．これが示すべきことであった． □

参考文献

[1] N. I. Akhiezer and I. M. Glazman, *Theory of Operators in Hilbert Space*, Vol. I, Pitman, Boston, 1981.

[2] L. Carleson, *On H^∞ in multiply connected domains*, Conference on Harmonic Analysis in honor of Antoni Zygmund, 1983, pp. 349–372.

[3] J. B. Garnett and D. E. Marshall, *Harmonic Measure*, Cambridge, 2005.

[4] F. Gesztesy and P. Yuditskii, *Spectral properties of a class of reflectionless Schrödinger operators*, J. Funct. Anal. **241** (2006), 486–527.

[5] M. Hasumi, *Hardy Classes on Infinitely Connected Riemann Surfaces*, Lecture Notes in Math., vol. 1027, Springer, 1983.

[6] P. W. Jones and D. E. Marshall, *Critical points of Green's function, harmonic measure, and the corona problem*, Ark. Mat. **23** (1985), no. 2, 281–314.

[7] P. Koosis, *Introduction to H^p Spaces*, London Math. Society Lecture Note Series, vol. 40, cambridge, 1980.

[8] M. Rosenblum and J. Rovnyak, *Topics in Hardy Classes and Univalent Functions*, Birkhäuser, Basel, 1994.

[9] M. Sodin and P. Yuditskii, *Almost periodic Jacobi matrices with homogeneous spectrum, infinite dimensional Jacobi inversion, and Hardy spaces of character-automorphic functions*, J. Geom. Anal. **7** (1997), no. 3, 387–435.

Linear combinations of composition operators on H^∞ and the Bloch spaces

茨城大学工学部　　細川　卓也 (Takuya Hosokawa)

1 Introduction

Let $\mathbb{D}$ be the open unit disk in the complex plane and let $H(\mathbb{D})$ be the space of all analytic functions on $\mathbb{D}$. Denote by $S(\mathbb{D})$ the set of analytic self-maps of $\mathbb{D}$. We define the composition operator C_φ by $C_\varphi f(z) = f \circ \varphi(z)$ for $\varphi \in S(\mathbb{D})$.

Denote the set of all bounded analytic functions on $\mathbb{D}$ by H^∞. Then H^∞ is a Banach algebra with the supremum norm

$$\|f\|_\infty = \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)|.$$

We recall the Bloch space $\mathcal{B}$ consists of all $f \in H(\mathbb{D})$ such that

$$\|\!|f|\!\| = \sup_{z\in\mathbb{D}} (1-|z|^2)|f'(z)| < \infty.$$

Then $\|\!|\cdot|\!\|$ is a complete semi-norm on $\mathcal{B}$ and is Möbius invariant. Let the little Bloch space $\mathcal{B}_o$ denote the subspace of $\mathcal{B}$ consisting of functions f with

$$\lim_{|z|\to 1} (1-|z|^2) f'(z) = 0.$$

It is well known that $\mathcal{B}$ is a Banach space under the norm $\|f\|_\mathcal{B} = |f(0)| + \|\!|f|\!\|$ and that $\mathcal{B}_o$ is a closed subspace of $\mathcal{B}$. In particular, $\mathcal{B}_o$ is the closure in $\mathcal{B}$ of the polynomials. Note that $H^\infty \subset \mathcal{B}$ and $\|\!|f|\!\| \le \|f\|_\infty$ for $f \in H^\infty$.

Using the argument of normal family, we get the following lemma

Lemma 1.1 (Weak Convergence Lemma) *Let X and Y be H^∞ or $\mathcal{B}$. Let $T : X \to Y$ be the linear combination of finite composition operators. Moreover let $\{f_n\}$ be a bounded sequence in X such that f_n converges to 0 uniformly on every compact subset of $\mathbb{D}$. Then $T : X \to Y$ is compact if and only if $\|Tf_n\|_Y \to 0$.*

This lemma gives an observation that the compactness of composition operators can be checked by the boundary behavior of their symbols. Here, it is easy to see that C_φ is compact on H^∞ if and only if the image $\varphi(\mathbb{D})$ does not touch the boundary of $\mathbb{D}$. The study of the composition operators on the Bloch space was started from [10]. In this paper Madigan and Matheson characterized the compact composition operators on the Bloch space using the hyperbolic derivative $\varphi^{\#}$ defined by

$$\varphi^{\#}(z) = \frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}\,\varphi'(z).$$

We have a chain rule for the hyperbolic derivative;

$$(1-|z|^2)(C_\varphi f(z))' = \varphi^{\#}(z)(1-|\varphi(z)|^2)|f'(\varphi(z))|.$$

Since the Pick-Schwarz lemma implies $|\varphi^{\#}(z)| \le 1$ for any $z \in \mathbb{D}$, we have that C_φ is bounded on $\mathcal{B}$ for any $\varphi \in S(\mathbb{D})$.

Theorem 1.2 (Madigan-Matheson [10]) *Let φ be in $S(\mathbb{D})$. Then the followings hold.*

(i) C_φ is compact on $\mathcal{B} \Longleftrightarrow \varphi^{\#}(z) \to 0$ as $|\varphi(z)| \to 1$.

(ii) C_φ is bounded on $\mathcal{B}_o \Longleftrightarrow \varphi \in \mathcal{B}_o$.

(iii) C_φ is compact on $\mathcal{B}_o \Longleftrightarrow \varphi^{\#}(z) \to 0$ as $|z| \to 1$.

Compact differences of composition operators have been considered through the study of topological structure of the space of composition operators. Let X be a Banach space of analytic functions on $\mathbb{D}$ and $\mathcal{C}(X)$ the space of bounded composition operators on X with the operator norm topology. We write $C_\varphi \sim C_\psi$ in $\mathcal{C}(X)$ if C_φ and C_ψ are in the same path component of $\mathcal{C}(X)$. Shapiro and Sundberg [12] raised the following problems, which was originally studied for the case of the Hardy space H^2: characterize the components of $\mathcal{C}(X)$, the isolated points in $\mathcal{C}(X)$, and the compact differences of composition operators on X.

Our goal is to explain the compactness of linear combinations $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i C_{\varphi_i}$ of the composition operators in terms of the function-theoretic properties of their symbols. To do this, we introduce some notations and definitions. For $p \in \mathbb{D}$, let α_p be the automorphism of $\mathbb{D}$ exchanging 0 for p. Then α_p has the following form;

$$\alpha_p(z) = \frac{p-z}{1-\overline{p}z}.$$

For z, w in $\mathbb{D}$, the pseudo-hyperbolic distance $\rho(z,w)$ and the hyperbolic metric $\rho(z,w)$ is given by

$$\rho(z,w) = |\alpha_z(w)| = \left|\frac{z-w}{1-\overline{z}w}\right|, \qquad \beta(z,w) = \frac{1}{2}\log\frac{1+\rho(z,w)}{1-\rho(z,w)}.$$

Let X be a Banach space of analytic functions on $\mathbb{D}$ and z, w be two points in D. The induced distance $d_X(z,w)$ on X defined by

$$d_X(z,w) = \sup\{|f(z)-f(w)| : \|f\|_X \le 1\}$$

It is well known that

$$d_{H^\infty}(z,w) = \frac{2-2\sqrt{1-\rho(z,w)^2}}{\rho(z,w)}$$

and

$$d_{\mathcal{B}}(z,w) = \beta(z,w)$$

(see [9] and [13]). Putting $w = 0$ in the equation above, we get the growth condition for Bloch functions;

$$|f(z)| \le |f(0)| + \|f\|\, \beta(z,0).$$

The following shows the relationship between the action of differences on H^∞ and on $\mathcal{B}$

Theorem 1.3 (MacCluer-Ohno-Zhao [8]) *Let φ and ψ be in $S(\mathbb{D})$. Then the followings hold.*

(i) $C_\varphi \sim C_\psi$ *in* $\mathcal{C}(H^\infty) \Longleftrightarrow C_\varphi - C_\psi : \mathcal{B} \to H^\infty$ *is bounded*

$$\Longleftrightarrow \sup_{z \in D} \rho(\varphi(z), \psi(z)) < 1.$$

(ii) $C_\varphi - C_\psi : H^\infty \to H^\infty$ *is compact* $\Longleftrightarrow C_\varphi - C_\psi : \mathcal{B} \to H^\infty$ *is compact*

$$\Longleftrightarrow \lim_{|\varphi(z)| \to 1} \rho(\varphi(z), \psi(z)) = \lim_{|\psi(z)| \to 1} \rho(\varphi(z), \psi(z)) = 0.$$

For the differences on $\mathcal{B}$, we define the Bloch type induced distance $\flat(z,w)$ by

$$\flat(z,w) = \sup_{\|f\| \le 1} |(1-|z|^2) f(z)' - (1-|w|^2) f'(w)|.$$

Using the triangle inequality, we get

$$(1-|z|^2)|(C_\varphi f - C_\psi f)'(z)| \le \Big(|\varphi^\#(z) - \psi^\#(z)| + |\varphi^\#(z)| \flat(\varphi(z), \psi(z)) \Big) \|f\|.$$

On the other hand, we have the following estimate.

Proposition 1.4 ([5]) *For any $z, w \in \mathbb{D}$,*

$$\rho(z,w)^2 \le \flat(z,w) \le 20 \rho(z,w).$$

We state the results on $C_\varphi - C_\psi$ on $\mathcal{B}$ and $\mathcal{B}_o$.

Theorem 1.5 ([5], Nieminen [11]) *Let φ and ψ be in $S(\mathbb{D})$. Then the followings hold.*

$$\text{(i) } C_\varphi - C_\psi \text{ is compact on } \mathcal{B} \Longleftrightarrow \begin{cases} |\varphi^\#(z)| \rho(\varphi(z), \psi(z)) \to 0 \text{ as } |\varphi(z)| \to 1. \\ |\psi^\#(z)| \rho(\varphi(z), \psi(z)) \to 0 \text{ as } |\psi(z)| \to 1. \end{cases}$$

(ii) $C_\varphi - C_\psi$ *is bounded on* $\mathcal{B}_o \Longleftrightarrow (C_\varphi - C_\psi) z^k \in \mathcal{B}_o$ *for* $k = 1, 2$.

$$\text{(iii) } C_\varphi - C_\psi \text{ is compact on } \mathcal{B}_o \Longleftrightarrow \begin{cases} |\varphi^\#(z)| \rho(\varphi(z), \psi(z)) \to 0 \text{ as } |z| \to 1. \\ |\psi^\#(z)| \rho(\varphi(z), \psi(z)) \to 0 \text{ as } |z| \to 1. \\ |\varphi^\#(z) - \psi^\#(z)| \to 0 \text{ as } |z| \to 1. \end{cases}$$

In the sequel of this report, we consider the generalized problem: which linear combinations of composition operators are compact on H^∞ and $\mathcal{B}$?

2 Linear combinations of composition operators

In this section, we study the compact problem on finite linear combinations of composition operators on H^∞ and $\mathcal{B}$.

We start from the case of 2-linear combinations.

Proposition 2.1 ([4]) *Let φ and ψ be analytic self-maps of $\mathbb{D}$ and $X = H^\infty$ or $\mathcal{B}$. Suppose that neither C_φ nor C_ψ is compact on X and $a, b \neq 0$. Then $aC_\varphi + bC_\psi$ is compact on X if and only if $C_\varphi - C_\psi$ is compact on X and $a + b = 0$.*

For the case of n-linear combinations, consider a partition of the index set $\{1, 2, \cdots, N\}$.

Definition 2.2 *Let $\varphi_1, \cdots, \varphi_N$ be distinct analytic self-maps of $\mathbb{D}$.*

(i) Denote by $\Gamma_i = \Gamma_{1,\varphi_i}$, that is, the set of sequence $\{z_n\} \subset \mathbb{D}$ such that $|\varphi_i(z_n)| \to 1$.

(ii) Put $\Gamma = \bigcup_{i=1}^N \Gamma_i$.

(iii) For $\{z_n\} \in \Gamma$, denote that $I(\{z_n\}) = \{i : \{z_n\} \in \Gamma_i\}$.

(iv) Denote $\rho(\varphi_i(z), \varphi_j(z)) = \rho_{ij}(z)$.

(v) For $\{z_n\} \in \Gamma$ and $i \in I(\{z_n\})$, denote that

$$I_\rho(\{z_n\}, i) = \{j \in I(\{z_n\}) : \rho_{ij}(z_n) \to 0\}.$$

Then there exists a subset $\{j_1, \cdots, j_m\} \subset \{1, 2, \cdots, N\}$ such that

$$I(\{z_n\}) = \bigcup_{\ell=1}^m I_\rho(\{z_n\}, j_\ell) \text{ and } \ I_\rho(\{z_n\}, j_\ell) \cap I_\rho(\{z_n\}, j_{\ell'}) = \emptyset \text{ for } \ \ell \neq \ell'.$$

Theorem 2.3 (Izuchi-Ohno [7]) *Let $\varphi_1, \cdots, \varphi_N$ be distinct analytic self-maps in $S(\mathbb{D})$ with $\|\varphi_i\|_\infty = 1$, and $\lambda_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ for every i. Then $\sum_{i=1}^N \lambda_i C_{\varphi_i}$ is compact on H^∞ if and only if $\displaystyle\sum_{j \in I_\rho(\{z_n\}, i)} \lambda_j = 0$ for every $\{z_n\} \in \Gamma$ and $i \in I(\{z_n\})$.*

We refine on the partition $I_\rho(\{z_n\}, i)$ for the compact linear combinations on $\mathcal{B}$.

Definition 2.4 *Let $\varphi_1, \cdots, \varphi_N$ be distinct analytic self-maps of $\mathbb{D}$.*

(i) For $\{z_n\} \in \Gamma$, put $I^\#(\{z_n\}) = \{i : |\varphi_i^\#(z_n)| \not\to 0\}$.

(ii) For $\{z_n\} \in \Gamma$ and for $i \in I^\#(\{z_n\})$, denote $I_\rho^*(\{z_n\}, i) = I^\#(\{z_n\}) \cap I_\rho(\{z_n\}, i)$.

(iii) For $\{z_n\} \in \Gamma$ and for $i \in I^\#(\{z_n\})$, denote

$$I^\#(\{z_n\}, i) = I_\rho(\{z_n\}, i) \cap \{j : \lim_{n\to\infty} \varphi_i^\#(z_n) = \lim_{n\to\infty} \varphi_j^\#(z_n)\}.$$

Theorem 2.5 **([4])** *Let $\lambda_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ for every i and $\varphi_1, \cdots, \varphi_N$ be distinct analytic self-maps of $\mathbb{D}$. Then the following conditions are equivalent:*

(i) $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i C_{\varphi_i}$ *is compact on* $\mathcal{B}$.

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{j\in I_\rho(\{z_n\},i)} \lambda_j \varphi_j^{\#}(z_n) = 0$ *for every* $\{z_n\} \in \Gamma$ *and for every* $i \in I(\{z_n\})$.

(iii) $\displaystyle\sum_{j\in I_{\rho^*}(\{z_n\},i)} \lambda_j = 0$ *for every* $\{z_n\} \in \Gamma$ *and for every* $i \in I^{\#}(\{z_n\})$.

(iv) $\displaystyle\sum_{j\in I^{\#}(\{z_n\},i)} \lambda_j = 0$ *for every* $\{z_n\} \in \Gamma$ *and for every* $i \in I^{\#}(\{z_n\})$ *with* $\varphi_i^{\#}(z_n) \not\to 0$.

Example 2.6 *Let φ_1 be a lens map in Example 4.4. We put $\tau(z) = z + t(1-z)^2$. Then τ is a self-map of $\mathbb{D}$ for enough small $t > 0$. Here, put $\varphi_2(z) = \tau(\varphi_1(z))$ and $\varphi_3(z) = -\tau(-\varphi_1(z))$. Then $C_{\varphi_1} - C_{\varphi_2} - C_{\varphi_3}$ is compact on $\mathcal{B}$.*

Next we consider the linear combinations on $\mathcal{B}_o$.

Definition 2.7 *Let $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_N$ be distinct analytic self-maps of $\mathbb{D}$ and $\{z_n\}$ be a sequence in $\mathbb{D}$ such that $|z_n| \to 1$. For $i = 1, 2, \cdots, N$, denote that*

$$J(\{z_n\}, i) = \{j : \lim_{n\to\infty} \varphi_j(z_n) = \lim_{n\to\infty} \varphi_i(z_n) \to 0\}.$$

Theorem 2.8 **([4])** *Let $\lambda_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ for every i and $\varphi_1, \cdots, \varphi_N$ be distinct analytic self-maps of $\mathbb{D}$. Then the followings are equivalent:*

(i) $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i C_{\varphi_i}$ *is bounded on* $\mathcal{B}_o$.

(ii) $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i C_{\varphi_i} z^k \in \mathcal{B}_o$ *for any* $k = 1, 2, \cdots, N$.

(iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (1 - |z_n|^2) \left| \sum_{j\in J(\{z_n\},i)} \lambda_j \varphi_j'(z_n) \right| = 0$ *for any* $\{z_n\} \subset \mathbb{D}$ *such that* $|z_n| \to 1$ *and any* $i = 1, \cdots, N$.

Theorem 2.9 **([4])** *Let $\lambda_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ for every i and $\varphi_1, \cdots, \varphi_N$ be distinct analytic self-maps of $\mathbb{D}$. Then the following conditions are equivalent:*

(i) $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i C_{\varphi_i}$ *is compact on* $\mathcal{B}$.

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{j\in I_\rho(\{z_n\},i)} \lambda_j \varphi_j^{\#}(z_n) = 0$ *for every* $\{z_n\} \in \Delta$ *and for every* $i \in \{1, \cdots, N\}$.

(iii) $\displaystyle\sum_{j\in I_{\rho^*}(\{z_n\},i)} \lambda_j = 0$ *for every* $\{z_n\} \in \Delta$ *and for every* $i \in \{1, \cdots, N\}$.

(iv) $\displaystyle\sum_{j\in I^{\#}(\{z_n\},i)} \lambda_j = 0$ *for every* $\{z_n\} \in \Delta$ *and for every* $i \in \{1, \cdots, N\}$ *with* $\varphi_i^{\#}(z_n) \not\to 0$.

参考文献

[1] C. C. Cowen and B. D. MacCluer, *Composition Operators on Spaces of Analytic Functions*, CRC Press, Boca Raton, 1995.

[2] P. Gorkin and R. Mortini, *Norms and essential norms of linear combinations of endomorphisms*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **358** (2006), 553–571.

[3] T. Hosokawa, K. Izuchi and D. Zheng, *Isolated points and essential components of composition operators on* H^∞, *Proc. Amer. Math. Soc.* **130** (2002), 1765–1773.

[4] T. Hosokawa, P.J. Nieminen, S. Ohno, *Linear Combinations of Composition Operators on the Bloch spaces*, to appear in *Canad. J. Math.*

[5] T. Hosokawa and S. Ohno, *Differences of composition operators on the Bloch spaces*, *J. Operator Theory* **57** (2007), 229–242.

[6] T. Hosokawa and S. Ohno, *Topological structures of the sets of composition operators on the Bloch spaces*, *J. Math. Anal. Appl.* **314** (2006), 736–748.

[7] K. Izuchi and S. Ohno, *Linear combinations of composition operators on* H^∞, *J. Math. Anal. Appl.* **338** (2008), 820–839.

[8] B. D. MacCluer, S. Ohno and R. Zhao, *Topological structure of the space of composition operators on* H^∞, *Integral Equations Operator Theory* **40** (2001), 481–494.

[9] K. Madigan, *Composition operators into Lipschitztype spaces.* Thesis, SUNY Albany, 1993.

[10] K. Madigan, A. Matheson, *Compact composition operators on the Bloch space*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **347** (1995), 2679–2687.

[11] P.J. Nieminen, *Compact differences of composition operators on Bloch and Lipschitz spaces*, *Comput. Methods Funct. Theory* **7** (2007), 325–344.

[12] J. Shapiro and C. Sundberg, *Isolation amongst the composition operators*, *Pacific J. Math.* **145** (1990), 117–152.

[13] K. Zhu, *Operator Theory in Function Spaces*, Dekker, New York, 1990; 2nd ed. by Amer. Math. Soc., Providence, 2007.

Conjugate functions on spaces of parabolic Bloch type

岐阜大学教育学部　　山田　雅博 (Masahiro Yamada)

Let $n \geq 1$ and H be the upper half-space of the $(n+1)$-dimensional Euclidean space, that is, $H = \{X = (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \ ; \ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \ t > 0\}$. For $0 < \alpha \leq 1$, the parabolic operator $L^{(\alpha)}$ is defined by

$$L^{(\alpha)} := \partial_t + (-\Delta_x)^\alpha, \tag{1.1}$$

where $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_j = \partial/\partial x_j$, and $\Delta_x = \partial_1^2 + \cdots + \partial_n^2$. A continuous function (real-valued) u on H is said to be $L^{(\alpha)}$-harmonic if $L^{(\alpha)}u = 0$ in the sense of distributions. (For details, see Appendix of this paper.) Put $m(\alpha) = \min\{1, \frac{1}{2\alpha}\}$, and for a real number $\sigma > -m(\alpha)$, let $\mathcal{B}_\alpha(\sigma)$ be the set of all $L^{(\alpha)}$-harmonic functions $u \in C^1(H)$ with the norm

$$\|u\|_{\mathcal{B}_\alpha(\sigma)} := |u(0,1)| + \sup_{(x,t)\in H} t^\sigma \left\{ t^{\frac{1}{2\alpha}} |\nabla_x u(x,t)| + t|\partial_t u(x,t)| \right\} < \infty, \tag{1.2}$$

where $\nabla_x = (\partial_1, \cdots, \partial_n)$. Furthermore, let $\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$ be the set of all functions $u \in \mathcal{B}_\alpha(\sigma)$ with $u(0,1) = 0$. We note that $\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma) \cong \mathcal{B}_\alpha(\sigma)/\mathbb{R}$. We call $\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$ (also $\mathcal{B}_\alpha(\sigma)$) the α-parabolic Bloch type spaces. The α-parabolic Bloch type spaces $\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$ are introduced and study some properties in [5]. In this paper, we continue to investigate further properties of these spaces. In particular, we study properties of conjugate functions on $\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$. In [4], notion of conjugate functions on α-parabolic Bergman spaces were introduced and studied (we call them α-parabolic conjugate functions). The α-parabolic Bergman space is the set of all $L^{(\alpha)}$-harmonic functions on H which belong to $L^p(H, dV)$ ($1 \leq p < \infty$), where dV is the Lebesgue volume measure on H. (For details, see [4].) In this paper, as a limiting case of the α-parabolic Bergman space ($p \to \infty$), we study α-parabolic conjugate functions on $\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$.

We begin with recalling the definition of conjugate functions of usual harmonic functions with $(n+1)$-variables. For a harmonic function u on H, a vector-valued function $V = (v_1, \ldots, v_n)$ on H is called a harmonic conjugate of u if $v_j \in C^1(H)$ and V satisfies the following generalized Cauchy-Riemann equations (see [10]):

$$\partial_t v_j = \partial_j u, \qquad \partial_k v_j = \partial_j v_k, \qquad 1 \leq j, k \leq n, \tag{1.3}$$

and

$$-\partial_t u = \sum_{j=1}^n \partial_j v_j. \tag{1.4}$$

When $\alpha = 1/2$, every function in $\widetilde{\mathcal{B}}_{1/2}(\sigma)$ is harmonic on H by Remark 3.3 of [5]. Thus, the

α-parabolic Bloch type spaces include the Bloch type spaces consisting of harmonic functions. We may take this inclusion as a motivation for our study. In this paper, we study properties of conjugate functions on $\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$ for all $0 < \alpha \le 1$. As in the definition of conjugate functions on α-parabolic Bergman spaces of [4], we introduce conjugate functions on $\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$.

Definition 1. Let $0 < \alpha \le 1$ and $\sigma > -m(\alpha)$. For a function $u \in \widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$, we shall say that a vector-valued function $V = (v_1, \dots, v_n)$ on H is *an α-parabolic conjugate function of u* if $v_j \in C^1(H)$ and V satisfies the following equations:

$$-\mathcal{D}_t v_j = \partial_j u, \qquad \partial_k v_j = \partial_j v_k, \qquad 1 \le j, k \le n, \tag{C.1}$$

and

$$\mathcal{D}_t^{\frac{1}{\alpha}-1} u = \sum_{j=1}^{n} \partial_j v_j, \tag{C.2}$$

where $\mathcal{D}_t = -\partial_t$ and $\mathcal{D}_t^{\frac{1}{\alpha}-1}$ is a fractional differential operator defined in Appendix of this paper.

We remark that when $\alpha = 1/2$, the equations (C.1) and (C.2) coincide with the generalized Cauchy-Riemann equations (1.3) and (1.4). We present the main results of this paper.

Theorem 1. *Let $0 < \alpha < 1$, $\sigma > -m(\alpha)$, and $u \in \widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$. If α and σ satisfy the condition $\eta := \frac{1}{2\alpha} - 1 + \sigma > -\frac{1}{2\alpha}$, then there exists a unique α-parabolic conjugate function $V = (v_1, \dots, v_n)$ of u such that $v_j \in \widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\eta)$. Also, there exists a constant $C = C(n, \alpha, \sigma) > 0$ independent of u such that*

$$C^{-1} \|u\|_{\mathcal{B}_\alpha(\sigma)} \le \sum_{j=1}^{n} \|v_j\|_{\mathcal{B}_\alpha(\eta)} \le C \|u\|_{\mathcal{B}_\alpha(\sigma)}. \tag{1.5}$$

The condition of η in Theorem 1 is equivalent to $\sigma > 1 - \frac{1}{\alpha}$. If $0 < \alpha \le 1/2$, then this condition is always satisfied for all $\sigma > -m(\alpha)$. However, when $1/2 < \alpha < 1$, we do not know whether Theorem 1 can be extended to the full range $\sigma > -m(\alpha)$.

We give an extension of Theorem 1 to the case of $\alpha = 1$. If $\alpha = 1$, then the condition $\eta > -\frac{1}{2\alpha}$ is equivalent to $\sigma > 0$. Thus, when $\alpha = 1$ and $\sigma > 0$, we construct the suitable formulation of the equation (C.2), that is, we have to replace (C.2) by (C.2)' . In Theorem 2 below, we give an extension of Theorem 1 to the case of $\alpha = 1$.

Theorem 2. *Let $\sigma > 0$ and $u \in \widetilde{\mathcal{B}}_1(\sigma)$. Put $\eta := \frac{1}{2\alpha} - 1 + \sigma$ with $\alpha = 1$. Then, there exists a unique (vector-valued) function $V = (v_1, \dots, v_n)$ such that u and $v_j \in \widetilde{\mathcal{B}}_1(\eta)$ satisfy the following* *equations (C.1) and (C.2)':*

$$-\mathcal{D}_t v_j = \partial_j u, \qquad \partial_k v_j = \partial_j v_k, \qquad 1 \le j, k \le n, \tag{C.1}$$

and

$$u - \lim_{r\to\infty} u(0,r) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j v_j. \tag{C.2'}$$

Also, there exists a constant $C = C(n,\sigma) > 0$ independent of u such that

$$C^{-1}\|u\|_{\mathcal{B}_1(\sigma)} \le \sum_{j=1}^{n} \|v_j\|_{\mathcal{B}_1(\eta)} \le C\|u\|_{\mathcal{B}_1(\sigma)}. \tag{1.6}$$

We note that if a function u belongs to the α-parabolic Bergman space for some $0 < \alpha \le 1$, then $\lim_{r\to\infty} u(0,r) = 0$ (see Lemma 3.3 of [11]). Therefore, in the definition of α-parabolic conjugate functions on α-parabolic Bergman spaces of [4], we can adopt the conditions (C,1) and (C,2) for all $0 < \alpha \le 1$. However, for $u \in \widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$, it may happen $\lim_{r\to\infty} u(0,r) \ne 0$, so we have to construct the suitable formulation (C.2)' when $\alpha = 1$. We also note that if $0 < \alpha \le 1$, $\sigma > 0$, $u \in \mathcal{B}_\alpha(\sigma)$, then $\lim_{r\to\infty} u(x,r)$ exists and $\lim_{r\to\infty} u(x,r) = \lim_{r\to\infty} u(0,r)$ for all $x \in \mathbb{R}^n$.

As an application of Theorems 1 and 2, we give estimates of tangential derivative norms on $\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$. For a multi-index $\gamma = (\gamma_1, \cdots, \gamma_n) \in \mathbb{N}_0^n$, let $\partial_x^\gamma := \partial_1^{\gamma_1} \cdots \partial_n^{\gamma_n}$, where $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Furthermore, for a function f on H, let $\|f\|_{L^\infty} = \operatorname{ess\,sup}\{|f(x,t)| : (x,t) \in H\}$.

Theorem 3. *Let $0 < \alpha \le 1$, $\sigma > -m(\alpha)$, and $u \in \widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$. Then, for each $m \in \mathbb{N}$, there exists a constant $C = C(n,\alpha,\sigma,m) > 0$ independent of u such that*

$$C^{-1}\|u\|_{\mathcal{B}_\alpha(\sigma)} \le \sum_{|\gamma|=m} \|t^{\frac{m}{2\alpha}+\sigma} \partial_x^\gamma u\|_{L^\infty} \le C\|u\|_{\mathcal{B}_\alpha(\sigma)}. \tag{1.7}$$

We give an inversion theorem, that is, for a vector-valued function $V = (v_1, \dots, v_n)$ on H we construct a function $u \in \widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$ such that V is an α-parabolic conjugate function of u. First, we give an inversion theorem when $0 < \alpha < 1$.

Theorem 4. *Let $0 < \alpha < 1$. Suppose that a vector-valued function $V = (v_1, \dots, v_n)$ on H satisfies $v_j \in \widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\eta)$ and $\partial_k v_j = \partial_j v_k$ for all $1 \le j, k \le n$. If α and η satisfy the condition $\sigma := 1 - \frac{1}{2\alpha} + \eta > 0$ (thus, η also satisfies the condition $\eta > -m(\alpha)$), then there exists a unique function u on H such that $u \in \widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$ and V is an α-parabolic conjugate function of u. Also, there exists a constant $C = C(n,\alpha,\eta) > 0$ independent of V such that*

$$C^{-1}\sum_{j=1}^{n} \|v_j\|_{\mathcal{B}_\alpha(\eta)} \le \|u\|_{\mathcal{B}_\alpha(\sigma)} \le C\sum_{j=1}^{n} \|v_j\|_{\mathcal{B}_\alpha(\eta)}. \tag{1.8}$$

Next, we also give an inversion theorem when $\alpha = 1$. We remark that if $\alpha = 1$, then $m(1) = \min\{1, \frac{1}{2}\} = \frac{1}{2}$. Thus, the condition $\eta > -m(1)$ is equivalent to $\frac{1}{2} + \eta > 0$.

THEOREM 5. *Suppose that a vector-valued function $V = (v_1, \ldots, v_n)$ on H satisfies $v_j \in \widetilde{\mathcal{B}}_1(\eta)$ and $\partial_k v_j = \partial_j v_k$ for all $1 \le j, k \le n$. If η satisfies the condition $\sigma := \frac{1}{2} + \eta > 0$, then there exists a unique function u on H such that $u \in \widetilde{\mathcal{B}}_1(\sigma)$ and u satisfies the equations (C.1) and (C.2)'. Also, there exists a constant $C = C(n, \eta) > 0$ independent of V such that*

$$C^{-1} \sum_{j=1}^{n} \|v_j\|_{\mathcal{B}_1(\eta)} \le \|u\|_{\mathcal{B}_1(\sigma)} \le C \sum_{j=1}^{n} \|v_j\|_{\mathcal{B}_1(\eta)}. \tag{1.9}$$

Appendix

We describe definitions of $L^{(\alpha)}$-harmonic functions and fractional differential operators.

Let $C_c^\infty(H) \subset C(H)$ be the set of all infinitely differentiable functions on H with compact support. Then, for $0 < \alpha < 1$, the convolution operator $(-\Delta_x)^\alpha$ is defined by

$$(-\Delta_x)^\alpha \psi(x,t) := -C_{n,\alpha} \lim_{\delta \downarrow 0} \int_{|y|>\delta} \big(\psi(x+y,t) - \psi(x,t)\big)|y|^{-n-2\alpha} dy \tag{2.1}$$

for all $\psi \in C_c^\infty(H)$ and $(x,t) \in H$, where $C_{n,\alpha} = -4^\alpha \pi^{-n/2} \Gamma\big((n+2\alpha)/2\big)/\Gamma(\alpha) > 0$. Let $\widetilde{L}^{(\alpha)} := -\partial t + (-\Delta_x)^\alpha$ be the adjoint operator of $L^{(\alpha)}$. Then, a function $u \in C(H)$ is said to be $L^{(\alpha)}$-harmonic if u satisfies $L^{(\alpha)} u = 0$ in the sense of distributions, that is, $\int_H |u \cdot \widetilde{L}^{(\alpha)} \psi| dV < \infty$ and $\int_H u \cdot \widetilde{L}^{(\alpha)} \psi dV = 0$ for all $\psi \in C_c^\infty(H)$. By (2.1) and the compactness of $\mathrm{supp}(\psi)$ (the support of ψ), there exist $0 < t_1 < t_2 < \infty$ and a constant $C > 0$ such that

$$\mathrm{supp}(\widetilde{L}^{(\alpha)} \psi) \subset S = \mathbb{R}^n \times [t_1, t_2] \tag{2.2}$$

and

$$|\widetilde{L}^{(\alpha)} \psi(x,t)| \le C(1+|x|)^{-n-2\alpha} \text{ for } (x,t) \in S. \tag{2.3}$$

Hence, the condition $\int_H |u \cdot \widetilde{L}^{(\alpha)} \psi| dV < \infty$ for all $\psi \in C_c^\infty(H)$ is equivalent to the following: for any $0 < t_1 < t_2 < \infty$,

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|(1+|x|)^{-n-2\alpha} dx dt < \infty. \tag{2.4}$$

When $\alpha = 1$, $L^{(1)} = \partial t - \Delta_x$ is the usual heat operator. For more details of $L^{(\alpha)}$-harmonic functions, see [7].

We describe the fractional differential operators. Let $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$. For a real number $\kappa > 0$, let

$$\mathcal{FC}^{-\kappa} := \big\{\varphi \in C(\mathbb{R}_+) \ ; \ \exists \kappa' > \kappa \text{ s.t. } \varphi(t) = O(t^{-\kappa'}) \ (t \to \infty) \ \big\}. \tag{2.5}$$

For a function $\varphi \in \mathcal{FC}^{-\kappa}$, we can define the fractional integral $\mathcal{D}_t^{-\kappa}\varphi$ of φ by

$$\mathcal{D}_t^{-\kappa}\varphi(t) := \frac{1}{\Gamma(\kappa)} \int_0^\infty \tau^{\kappa-1}\varphi(\tau + t)d\tau, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{2.6}$$

In particular, put $\mathcal{FC}^0 := C(\mathbb{R}_+)$ and $\mathcal{D}_t^0\varphi := \varphi$. Moreover, let

$$\mathcal{FC}^\kappa := \{\varphi \; ; \; \partial_t^{\lceil\kappa\rceil}\varphi \in \mathcal{FC}^{-(\lceil\kappa\rceil-\kappa)}\}, \tag{2.7}$$

where $\lceil\kappa\rceil$ is the smallest integer greater than or equal to κ. Then, we can also define the fractional derivative $\mathcal{D}_t^\kappa\varphi$ of $\varphi \in \mathcal{FC}^\kappa$ by

$$\mathcal{D}_t^\kappa\varphi(t) := \mathcal{D}_t^{-(\lceil\kappa\rceil-\kappa)} \left(-\partial_t\right)^{\lceil\kappa\rceil} \varphi(t), \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{2.8}$$

Clearly, when $\kappa \in \mathbb{N}_0$, the operator $\mathcal{D}_t^\kappa$ coincides with the ordinary differential operator $(-\partial_t)^\kappa$. For a real number κ, we may call both (2.6) and (2.8) the fractional derivatives of φ with order κ. And, we call $\mathcal{D}_t^\kappa$ the fractional differential operator with order κ.

参考文献

[1] S. Axler, P. Bourdon and W. Ramey, Harmonic Function Theory, Springer-Verlag, New York, 1992.

[2] Y. Hishikawa, Fractional calculus on parabolic Bergman spaces, Hiroshima Math. J. **38**(2008), 471–488.

[3] Y. Hishikawa, The reproducing formula with fractional orders on the parabolic Bloch space, preprint.

[4] Y. Hishikawa, M. Nishio, and M. Yamada, A conjugate system and tangential derivative norms on parabolic Bergman spaces, to appear in Hokkaido Mathematical Journal.

[5] Y. Hishikawa and M. Yamada, Function spaces of parabolic Bloch type, preprint.

[6] H. Koo, K. Nam, and H. Yi, Weighted harmonic Bergman functions on half-spaces, J. Korean Math. Soc. **42**(2005), 975–1002.

[7] M. Nishio, K. Shimomura and N. Suzuki, α-parabolic Bergman spaces, Osaka J. Math. **42**(2005), 133–162.

[8] M. Nishio, N. Suzuki and M. Yamada, Toeplitz operators and Carleson measures on parabolic Bergman spaces, Hokkaido Math. J. **36**(2007), 563–583.

[9] W. Ramey and H. Yi, Harmonic Bergman functions on half-spaces, Trans. Amer. Math. Soc. **348**(1996), 633–660.

[10] E. M. Stein and G. Weiss, On the theory of harmonic functions of several variables I. The theory of H^p-spaces, Acta Math. **103**(1960), 25–62.

[11] M. Yamada, Harmonic conjugates of parabolic Bergman functions, Advanced Studies in Pure Mathematics **44**, 391–402, Math. Soc. of Japan, Tokyo, 2006.

Masahiro Yamada
Department of Mathematics
Faculty of Education
Gifu University
Yanagido 1–1, Gifu 501–1193, Japan
yamada33@gifu-u.ac.jp

Standard operator algebra 上の peripheral spectrum 保存写像 2

山形大学大学院理工学研究科　　三浦　毅 (Takeshi Miura)

1　導 入

昨年度の関数環研究集会において「Standard operator algebra 上の peripheral spectrum 保存写像」と題して講演をさせていただいた．発表した当時は我々独自の定理であると思っていたが，ほとんど同じ結果が Tonev and Luttman [5] によってすでに発表されていたことを後日知った．本研究の歴史的背景等は昨年度の関数環研究集会報告集をご覧頂くこととし，Tonev and Luttman の結果を述べるための準備をする．

以下では Banach 空間 X, Y に対して，$B(X, Y)$ により X から Y への有界線型作用素全体のなす Banach 空間を表すことにする．特に $B(X, X)$ を $B(X)$ と表すことにする．このとき $B(X)$ は通常の和，スカラー倍及び合成を積とする演算と作用素ノルムに関して Banach 環となる．$T \in B(X)$ に対して $\sigma(T)$ を T のスペクトルとする．つまり

$$\sigma(T) = \{z \in \mathbb{C} : T - zI \notin B(X)^{-1}\}$$

である．

Definition 1 $T \in B(X)$ に対して

$$\sigma_\pi(T) = \{z \in \sigma(T) : |z| = \max_{w \in \sigma(T)} |w|\}$$

によって定められる集合 $\sigma_\pi(T)$ を T の *peripheral* スペクトルという．

Definition 2 $\mathcal{A}$ が *Banach* 空間 X 上の *standard operator algebra* であるとは，$\mathcal{A}$ が $B(X)$ の（ノルムに関して閉とは限らないし，また単位元をもつとも限らない）部分多元環であり，さらに有限階作用素全体を含むことである．

“Standard operator algebra” の名称に関して，富山 淳先生よりご指摘を頂いた．筆者の調べた限りでは文献 [4] において “standard operator algebra” の用語が用いられていることが確認され，その後もいくつかの文献で用いられている．“Standard operator algebra” の名称が standard であるのか筆者には確信はないが，本稿においてはこの名称を用いることをお許しいただきたい．

以上の準備のもと，Tonev and Luttman の結果を述べることが出来る．彼らの定理の主張とは若干異なるが，証明の中で次の結果を示している．

Theorem 1 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ をそれぞれ *Banach* 空間 X, Y 上の *standard operator algebra* とする.（線型とは限らない）全射 $\phi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ が条件

$$\sigma_\pi(\phi(S)\phi(T)) = \sigma_\pi(ST) \qquad (\forall S, T \in \mathcal{A})$$

をみたせば，可逆な $A \in B(X, Y)$ が存在して

$$\phi(T) = ATA^{-1} \qquad (\forall T \in \mathcal{A})$$

あるいは

$$\phi(T) = -ATA^{-1} \qquad (\forall T \in \mathcal{A})$$

となるか，または可逆な $B \in B(X^*, Y)$ が存在して

$$\phi(T) = BT^*B^{-1} \qquad (\forall T \in \mathcal{A})$$

あるいは

$$\phi(T) = -BT^*B^{-1} \qquad (\forall T \in \mathcal{A})$$

となるかのいずれかである.

一方で，昨年度報告した我々の結果では Hilbert 空間上の standard operator algebra に対して，さらに $*$ 構造を考慮した形の peripheral スペクトル保存写像についても考察し，次の結果を得ている（Tonev and Luttman [5] では，この結果は得られていない）.

Theorem 2 H を *Hilbert* 空間とし，$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ を H 上の *standard operator algebra* で単位元 I をもち，さらに *Hilbert space adjoint* $'$ に関して閉じているとする．もし（線型とは限らない）全射 $\phi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ が

$$\sigma_\pi(\phi(S)\phi(T)') = \sigma_\pi(ST') \qquad (\forall S, T \in \mathcal{A})$$

をみたせば，ユニタリー作用素 $U \in B(H)$ が存在して

$$\phi(I)'\phi(T) = UTU^{-1} \qquad (\forall T \in \mathcal{A})$$

となるか，または

$$\phi(I)'\phi(T) = -UT^{tr}U^{-1} \qquad (\forall T \in \mathcal{A})$$

となるかのいずれかである．ここに T^{tr} は T の（任意に固定した）正規直交基底に関する転置である.

定理 1 及び定理 2 は非常に問題設定が似ているにも関わらず，証明では異なる手法を用いている．これらの結果を統一的に述べる方法はないか，と考えるのはごく自然な発想ではないだろうか．ここで定理 2 の条件 $\sigma_\pi(\phi(S)\phi(T)') = \sigma_\pi(ST')$ を次のように書き換えられることに注意する.

$$\sigma_\pi(\phi(S)\phi(T')') = \sigma_\pi(ST) \qquad (\forall S, T \in \mathcal{A})$$

ここで $\varphi(T) = \phi(T')'$ とおけば

$$\sigma_\pi(\phi(S)\varphi(T)) = \sigma_\pi(ST) \qquad (\forall S, T \in \mathcal{A}) \qquad (*)$$

となる．逆に $\varphi(T) = \phi(T')'$ とは限らないが，$(*)$ をみたす写像の組 ϕ, φ を解析できれば定理 1 及び定理 2 は統一されることが分かる．実際，定理 1 は $\varphi = \phi$ の場合であり，定理 2 は $\varphi(T) = \phi(T')'$ の場合である．

しかも，$(*)$ をみたす写像の組 ϕ, φ に対しても，Tonev and Luttman の手法（これは昨年度報告した我々の結果の証明とまったくと言っていいほど同じであった）を若干修正すればよいことにも気づく．我々は次の結果を得た．

Theorem 3 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ をそれぞれ *Banach* 空間 X, Y 上の *standard operator algebra* とする．(線型とは限らない) 全射 $\phi, \varphi \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ が条件

$$\sigma_\pi(\phi(S)\varphi(T)) = \sigma_\pi(ST) \qquad (\forall S, T \in \mathcal{A})$$

をみたせば，可逆な $A_1, A_2 \in B(X, Y)$ が存在して

$$\phi(T) = A_1 T {A_2}^{-1} \qquad \textit{and} \qquad \varphi(T) = A_2 T {A_1}^{-1} \qquad (\forall T \in \mathcal{A})$$

となるか，あるいは可逆な $B_1, B_2 \in B(X^*, Y)$ が存在して

$$\phi(T) = B_1 T^* {B_2}^{-1} \qquad \textit{and} \qquad \varphi(T) = B_2 T^* {B_1}^{-1} \qquad (\forall T \in \mathcal{A})$$

となるかのいずれかである．特に後者の場合，X, Y ともに *reflexive* でなければならない．

Hilbert space adjoint に関わらず，任意の全単射に対しても定理 2 と類似の結果が成り立つことが定理 3 の特別な場合として分かる．

Corollary 4 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ をそれぞれ *Banach* 空間 X, Y 上の *standard operator algebra* とし，$\rho \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 及び $\tau \colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ を全単射とする．(線型とは限らない) 全射 $\phi \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ が条件

$$\sigma_\pi(\phi(S)\tau(\phi(T))) = \sigma_\pi(S\rho(T)) \qquad (\forall S, T \in \mathcal{A})$$

をみたせば，可逆な $A_1, A_2 \in B(X, Y)$ が存在して

$$\phi(T) = A_1 T {A_2}^{-1} \qquad \textit{and} \qquad \tau(\phi(T)) = A_2 \rho(T) {A_1}^{-1} \qquad (\forall T \in \mathcal{A})$$

となるか，あるいは可逆な $B_1, B_2 \in B(X^*, Y)$ が存在して

$$\phi(T) = B_1 T^* {B_2}^{-1} \qquad \textit{and} \qquad \tau(\phi(T)) = B_2 \rho(T)^* {B_1}^{-1} \qquad (\forall T \in \mathcal{A})$$

となるかのいずれかである．特に後者の場合，X, Y ともに *reflexive* でなければならない．

参考文献

[1] T. Miura and D. Honma, *A generalization of peripherally-multiplicative surjections between standard operator algebras*, Cent. Eur. J. Math., **7** (2009), 479–486.

[2] L. Molnár, *Some characterizations of the automorphisms of $B(H)$ and $C(X)$*, Proc. Amer. Math. Soc., **130** (2001), 111–120.

[3] L. Molnár, *Selected preserver problems on algebraic structures of linear operators and on function spaces*, Lecture Notes in Math. **vol 1895**, Springer (2006).

[4] P. Šemrl, *Ring derivations on standard operator algebras*, J. Funct. Anal. **112** (1993), 318–324.

[5] T. Tonev and A. Luttman, *Algebra isomorphisms between standard operator algebras*, Studia Math., **191** (2009), 163–170.

上半平面での関数空間 $\mathfrak{M}^p$ について

岩手医科大学共通教育センター　　飯田　安保 (IIDA, Yasuo)

【アブストラクト】　$p > 0$ とする。上半平面 $D := \{z \in \mathbf{C} \,|\, \mathrm{Im}z > 0\}$ 上の正則関数 f が $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} \left(\log^+ Mf(x)\right)^p dx < +\infty$ をみたすとき、$f \in \mathfrak{M}^p$ とする。ただし $Mf(x) = \sup\limits_{y>0} |f(x+iy)|$ $(x \in \mathbf{R})$ とする。このクラスは H.O.Kim 先生や B.R.Choe 先生によって導入された単位円板上のクラス M^p $(p \geqq 1)$ を上半平面において定義したものである。この小文ではこの $\mathfrak{M}^p$ に関する結果を紹介し、また D 上の類似のクラスである $M^p(D)$ についても言及する。

1.　単位円板での関数空間 M^p について

$p \geqq 1$ とする。$U = \{z \in \mathbf{C} \,|\, |z| < 1\}$ 上の正則関数 f が $\displaystyle\int_0^{2\pi} \left(\log^+ Mf(\theta)\right)^p d\theta < +\infty$ をみたすとき、$f \in M^p$ とする。ただし $Mf(\theta) = \sup\limits_{0 \leqq r<1} |f(re^{i\theta})|$ とする。

この関数空間については、まず M^1 が Kim によって導入された [6]。M^1 はプリヴァロフ空間 N^p $(p > 1)$ とスミルノフクラス N_* の間に属する。もっと詳しく述べると $\displaystyle\bigcup_{0<q\leqq\infty} H^q \subset N^p \subset M^1 \subset N_* \subset N$　$(p > 1)$ が成り立つ。ここで N はネヴァンリンナクラス、 H^q はハーディ空間である（N とその部分空間を総称して「ネヴァンリンナ型空間」と呼ぶことがある）。その後、$M^p\,(p > 1)$ については Choe と Kim によって考察されている [1]。

2.　上半平面での関数空間 $\mathfrak{M}^p$ について

ここでは、上記のクラスを上半平面 $D = \{z \in \mathbf{C} \,|\, \mathrm{Im}z > 0\}$ 上で定義した場合について考察する。

定義 2-1（[5]）　$p > 0$ とする。D 上の正則関数 f が $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} \left(\log^+ Mf(x)\right)^p dx < +\infty$ をみたすとき、$f \in \mathfrak{M}^p$ とする。ただし $Mf(x) = \sup\limits_{y>0} |f(x+iy)|$　$(x \in \mathbf{R})$ とする。

この $\mathfrak{M}^p$ と D 上の他のネヴァンリンナ型空間の間に成り立つ包含関係を考えよう。D 上のネヴァンリンナ型空間にはいろいろなものが知られているが、ここでは以下のように Krylov の流儀に従ってネヴァンリンナクラス、スミルノフクラス、ハーディ空間を順に定義する：

定義 2-2（[4,7]）　f を D 上の正則関数とする。

①$f \in \mathfrak{N} \Longleftrightarrow \sup_{y>0} \int_{\mathbf{R}} \log^+ |f(x+iy)|\, dx < +\infty$ が成り立つ。

②$f \in \mathfrak{N}_* \Longleftrightarrow$ ある $\phi \in L^1(\mathbf{R})$, $\phi \geqq 0$ に対し $\log^+ |f(z)| \leqq P[\phi](z)$ $(z \in D)$ が成り立つ。
ただし右辺は D 上の Poisson 積分を表す。

③$f \in H^q(D)$ $(q > 0) \Longleftrightarrow \sup_{y>0} \int_{\mathbf{R}} |f(x+iy)|^q\, dx < +\infty$ が成り立つ。

命題 2-3（[5]）　次の包含関係が成り立つ。

(1)　$\bigcup_{0<q\leqq 1} H^q(D) \subset \mathfrak{M}^1 \subset \mathfrak{N}_* \subset \mathfrak{N}$　　(2)　$\bigcup_{0<q<\infty} H^q(D) \subset \mathfrak{M}^p$

定理 2-4（[5]）　$p > 0$ とする。D の正則関数 f に対し以下が成り立つ：

$$\left(\log^+ |f(x+iy)|\right)^p \leqq \frac{A_p}{y} \int_{x-y}^{x+y} \left(\log^+ Mf(\xi)\right)^p d\xi, \quad y > 0,$$

ここで A_p は f に依存しない定数である。

系 2-5（[5]）　$f \in \mathfrak{M}^p\, (p > 0)$ に対して、以下が成り立つ。

(1)　$\log^+ |f(z)| \leqq \dfrac{B_p \|f\|_p}{y^{\frac{1}{p}}}$　$(z = x + iy \in D)$　（B_p は f に依存しない定数）.

(2)　$\log^+ |f(x+iy)| = o(y^{-\frac{1}{p}})$　$(y \to 0^+)$.

3.　$\mathfrak{M}^1$ についての考察

この章では、$p = 1$ の場合のクラス $\mathfrak{M}^1$ に関する結果を紹介する。

定理 3-1（[5]）　$H^1(D)$ に属する関数の実部の全体を $Re\, H^1(D)$ とする。また $h \in L^1(\mathbf{R})$ を実数値関数とし、$f(z) = \exp\left(\dfrac{1}{\pi i} \displaystyle\int_{\mathbf{R}} \frac{1+tz}{t-z} \frac{1}{1+t^2} h(t)\, dt\right)$ とする。このとき $h \in Re\, H^1(D)$ ならば $f \in \mathfrak{M}^1$ である。

定理 3-2（[5]）　f を D 上の正則関数とする。以下は互いに同値である：

(1)　f が $\mathfrak{M}^1$ で可逆である。
(2)　f が外関数で、$\log |f^*(x)| \in Re\, H^1(D)$ を満たす。

【注意 1】次のような関数を上半平面 D での外関数（outer function on D）とよぶ：

$d(z) = \exp\left(\dfrac{1}{\pi i} \displaystyle\int_{\mathbf{R}} \frac{1+tz}{t-z} \frac{1}{1+t^2} \log h(t)\, dt\right)$, ただし $h(t) \geqq 0$, $\log h \in L^1(\mathbf{R}, (1+t^2)^{-1} dt)$.

【注意２】$f \in \mathfrak{N}$ のとき、$f^*(x) := \lim_{y \to 0} f(x+iy)$ が a.e. $x \in \mathbf{R}$ で存在することが知られている（[7]）。

4. 上半平面での関数空間 $M^p(D)$ について

Ganzhula[3], Efimov-Subbotin[2] は上半平面 $D = \{z \in \mathbf{C} \mid \mathtt{Im} z > 0\}$ 上での関数空間 $M^p(D)$ を以下のように導入した：

定義 4-1 $p > 0$ とする。D 上の正則関数 f が $\int_{\mathbf{R}} (\log(1 + Mf(x)))^p \, dx < +\infty$ をみたすとき、 $f \in M^p(D)$ とする。

この関数空間については、まず $M^1(D)$ が Ganzhula によって導入され、その後 Efimov-Subbotin によって一般の p について考察された。

【注意】 f が単位円板 U 上の正則関数であるとき

(A) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \left(\log^+ Mf(\theta)\right)^p \, d\theta < +\infty$ と (B) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \{\log(1 + Mf(\theta))\}^p \, d\theta < +\infty$

は互いに同値な条件になる。しかし f が D 上の正則関数であるとき

(A)' $\displaystyle\int_R \left(\log^+ Mf(x)\right)^p \, dx < +\infty$ と (B)' $\displaystyle\int_R \{\log(1 + Mf(x))\}^p \, dx < +\infty$

は互いに同値な条件にはならない。

さて、$M^p(D)$ 上の距離を次のように定義しよう：

$$\rho_p(f\,,\,g) := \left\{ \int_R (\log(1 + M(f-g)(x)))^p \, dx \right\}^{1/p} \quad (f\,,\,g \in M^p(D))$$

このとき、以下の結果が成り立つ：

定理 4-2（[2,3]） $p > 0$ とする。空間 $(M^p(D)\,,\,\rho_p)$ は F-algebra、つまり積に関して連続である完備な線形距離空間である。

一方、望月望先生は以下のように D 上のネヴァンリンナクラスとスミルノフクラスを導入されている [8]：

$f \in N(D) \Longleftrightarrow \sup_{y>0} \int_{\mathbf{R}} \log(1 + |f(x+iy)|) \, dx < +\infty$ が成り立つ。

$f \in N_*(D) \Longleftrightarrow$ ある $\phi \in L^1(\mathbf{R})\,,\,\phi \geqq 0$ に対し $\log^+ |f(z)| \leqq P[\phi](z)$ $(z \in D)$ が成り立つ。

これらのクラスについて、包含関係 $N(D) \subset \mathfrak{N}\,,\,N_*(D) \subset N(D)\,,\,N_*(D) \subset \mathfrak{N}^*$ が成立する。

また $M^p(D)$ との包含関係として、以下が成り立つ：

命題 4-3（[2,3]）　以下の包含関係が成り立つ：

(1) $\displaystyle\bigcup_{0<q\leqq 1} H^q(D) \subset M^1(D) \subset N_*(D) \subset N(D)$　　(2) $\displaystyle\bigcup_{0<q\leqq p} H^q(D) \subset M^p(D)$

【注意】 $H^q(D) \not\subseteq N(D)$ $(1 < q \leqq \infty)$ となることが知られている（[8]）。

望月先生も [8] において、 $N_*(D)$ に距離位相を導入して F-algebra の問題や等長写像を考察されているので、位相に関する問題を考えるのであれば $\mathfrak{M}^p$ よりも $M^p(D)$ を研究の対象にしたほうが良いかと思われる。

参考文献

[1] B. R. Choe and H. O. Kim, *On the boundary behavior of functions holomorphic on the ball*, Complex Variables **20** (1992), 53-61.

[2] D. A. Efimov and A. V. Subbotin, *Some F-algebras of holomorphic functions in the half plane*, Math. Montisnigri **16** (2003), 69–81. (Russian)

[3] L. M. Ganzhula, *On an F-algebra of holomorphic functions in the upper half-plane,* Math. Montisnigri **12** (2000), 33-45. (Russian)

[4] Y. Iida, *Nevanlinna-type spaces on the upper half plane*, Nihonkai Math. J. **12** (2001), 113-121.

[5] Y. Iida, *A class of holomorphic functions on the upper half plane*, Annual Report of Iwate Medical University, Center for Liberal Arts and Sciences, **44** (2009), 25-31. (http://eagle-mcr.iwate-med.ac.jp/iida/IIDA-2009IMU.pdf)

[6] H. O. Kim, *On an F-algebra of holomorphic functions*, Can. J. Math. **40** (1988), 718-741.

[7] V. I. Krylov, *On functions regular in a half-plane*, Mat. Sb. **6** (48) (1939); Amer. Math. Soc. Transl. **32** (2) (1963), 37-81.

[8] N. Mochizuki, *Nevanlinna and Smirnov classes on the upper half plane*, Hokkaido Math. J. **20** (1991), 609-620.

Yasuo Iida
Department of Mathematics
Iwate Medical University
Yahaba, Iwate 028-3694
Japan
E-mail: yiida@iwate-med.ac.jp