2015年度 関数環研究集会

報　告　集

2016年 4月

2015年度の関数環研究集会は新潟大学駅南キャンパス「ときめいと」を会場に，2015年12月19日（土），20日（日）に開催されました．寒い季節にも関わらず大勢の方々にご参加頂きました。また今回の研究集会は多くのご講演をお申込み頂き13の発表が行われました。2日間，有意義な情報交換や活発な討論が行われ，今年も充実した研究集会となりました。ご講演くださった皆様をはじめ，ご参加くださった皆様，そして関数環集会にご協力くださいました皆様に心よりお礼申し上げます。

講演者の方々に報告集原稿をご執筆頂きましたので，ここに取りまとめ報告集といたします。

世話人：三浦　毅　　　　　（新潟大学）

2015年度 関数環研究集会

12月19日（土）

12月20日（日）

ジャイロ構造を持つノルム空間の一般化について

新潟大学工学部　　阿部　敏一 (Toshikazu Abe)

ジャイロ群は結合法則を弱めた群の一般化であり，さらに可換性に対応した概念を考慮したものをジャイロ可換ジャイロ群という．ジャイロ可換ジャイロ群は可換群の一般化である．

Definition 1 ((Gyrocommutative) gyrogroup (A. A. Ungar)) 集合 G とその上の二項演算 $\oplus$ の組 $(G, \oplus)$ が次の (G1) から (G5) が成立するとき，ジャイロ群であるという．

(G1) 単位元 e を持つ．

(G2) 任意の $a \in G$ は逆元 $\ominus a$ を持つ．

(G3) 任意の $a, b, c \in G$ に対して，$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus \mathrm{gyr}[a, b]c$ を満たす G の元 $\mathrm{gyr}[a, b]c$ が唯一つ存在する．

(G4) 任意の $a, b \in G$ に対して，写像 $\mathrm{gyr}[a, b] : c \mapsto \mathrm{gyr}[a, b]c$ は $(G, \oplus)$ の自己同型写像である．

(G5) 任意の $a, b \in G$ に対して，$\mathrm{gyr}[a \oplus b, b] = \mathrm{gyr}[a, b]$ が成立する．

ジャイロ群 $(G, \oplus)$ が次の (G6) を満たすとき，ジャイロ可換であるという．

(G6) 任意の $a, b \in G$ に対して，$a \oplus b = \mathrm{gyr}[a, b](b \oplus a)$ が成立する．

ジャイロ可換ジャイロ群に基きノルム空間を一般化する．次に定義する gyrolinear space は線形空間の一般化であり，normed gyrolinear space はノルム空間の一般化である．Normed gyrolinear space は Abe，Hatori によって定義された GGV の一般化になっている．

Definition 2 $(X, \oplus)$ をジャイロ可換ジャイロ群とする．写像 $\otimes : \mathbb{R} \times X$, $(r, \boldsymbol{x}) \mapsto r \otimes \boldsymbol{x}$ が，任意の $r, r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ と $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in X$ に対して以下の (GL1) から (GL5) を満たすとき $(X, \oplus, \otimes)$ は gyrolinear space であるという．

(GL1) $1 \otimes \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$.

(GL2) $(r_1 + r_2) \otimes \boldsymbol{x} = (r_1 \otimes \boldsymbol{x}) \oplus (r_2 \otimes \boldsymbol{x})$.

(GL3) $(r_1 r_2) \otimes \boldsymbol{x} = r_1 \otimes (r_2 \otimes \boldsymbol{x})$.

(GL4) $\mathrm{gyr}[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}](r \otimes \boldsymbol{x}) = r \otimes \mathrm{gyr}[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]\boldsymbol{x}$.

(GL5) $\mathrm{gyr}[r_1 \otimes \boldsymbol{v}, r_2 \otimes \boldsymbol{v}] = \mathrm{id}_X$.

Definition 3 $(X,\oplus,\otimes)$ を *gyrolinear space* とする．$\|\cdot\|$ を X 上の非不実数値関数 $\boldsymbol{x}\mapsto\|\boldsymbol{x}\|$ とする．$\|X\|=\{\|\boldsymbol{x}\|\in\mathbb{R}_{\geq 0};\boldsymbol{x}\in X\}$ 上の狭義単調増加関数 f が存在して，任意の $r\in\mathbb{R}$ と $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in X$ に対して以下の (NG1) から (NG4) を満たすとき $(X,\oplus,\otimes,\|\cdot\|,f)$ は normed gyrolinear space であるという．

(NG1) $\|\boldsymbol{x}\|=0 \iff \boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}$;

(NG2) $f(\|\boldsymbol{x}\oplus\boldsymbol{y}\|)\leq f(\|\boldsymbol{x}\|)+f(\|\boldsymbol{y}\|)$;

(NG3) $f(\|r\otimes\boldsymbol{x}\|)=|r|f(\|\boldsymbol{x}\|)$;

(NG4) $\|\operatorname{gyr}[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}](\boldsymbol{x})\|=\|\boldsymbol{x}\|$;

Normed gyrolinear space は GGV の一般化になっていることから以下の例がすぐわかる．

Example 4 (相対論の速度) c を光の速さ，$\mathbb{R}^3_c$ を 3 次元ユークリッド空間内の半径 c の開球とする．

$$\boldsymbol{u}\oplus_E\boldsymbol{v}=\frac{1}{1+\frac{\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle}{c^2}}\left\{\boldsymbol{u}+\frac{1}{\gamma_u}\boldsymbol{v}+\frac{1}{c^2}\frac{\gamma_u}{1+\gamma_u}\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle\boldsymbol{u}\right\},\quad \forall\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3_c.$$

によって，$(\mathbb{R}^3_c,\oplus_E)$ はジャイロ可換ジャイロ群である．ただし $\langle\cdot,\cdot\rangle$ はユークリッド内積，$\gamma_u=(1-\|\boldsymbol{u}\|^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$ は $\boldsymbol{u}$ のローレンツ因子．また任意の実数 r に対して

$$r\otimes_E\boldsymbol{u}=\begin{cases}c\tanh(r\tanh^{-1}\frac{\|\boldsymbol{u}\|}{c})\frac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|} & (\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^3_c\setminus\{\boldsymbol{0}\})\\ 0 & (\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0})\end{cases}$$

とする．$(\mathbb{R}^3_c,\oplus_E,\otimes_E,\|\cdot\|,\tanh^{-1}\frac{\cdot}{c})$ は *normed gyrolinear space* である．ここで $\|\cdot\|$ は $\mathbb{R}^3$ のユークリッドノルムである．

Example 5 (ポアンカレ円板) $\mathbb{D}$ を複素平面上の単位開円板とする．

$$a\oplus_M b=\frac{a+b}{1+\bar{a}b},\qquad \forall a,b\in\mathbb{D}$$

によって，$(\mathbb{D},\oplus_M)$ はジャイロ可換ジャイロ群である．また任意の実数 r に対して

$$r\otimes_M a=\begin{cases}\tanh(r\tanh^{-1}|a|)\frac{a}{|a|} & (a\in\mathbb{D}\setminus\{0\})\\ 0 & (a=0)\end{cases}$$

とすると $(\mathbb{D},\oplus_M,\otimes_M,|\cdot|,\tanh^{-1})$ は *normed gyrolinear space* である．

Example 6 (正凸錘) 単位的 C^*- 環 $\mathscr{A}$ の正値可逆元全体を $\mathscr{A}_+^{-1}$，$\mathscr{A}$ のノルムを $\|\cdot\|$ で表す．

$$a\oplus_A b=a^{\frac{1}{2}}ba^{\frac{1}{2}},\quad a,b\in\mathscr{A}_+^{-1}.$$

によって $(\mathscr{A},\oplus_A)$ はジャイロ可換ジャイロ群である．また

$$r\otimes_A a=a^r,\quad r\in\mathbb{R},a\in\mathscr{A}_+^{-1}$$

によって $(\mathscr{A}_+^{-1},\oplus_A,\otimes_A,\|\cdot\|',\mathrm{id})$ は *normed gyrolinear space* である．ただし $\|\cdot\|'=\|\log\cdot\|$ とし，id は恒等写像とする．

Normed gyrolinear space 上では距離に対応する概念である gyrometric，測地線に対応する概念である gyroline (gyrosegment)，２点の（代数的）中点に対応する gyromidpoint などが自然に定義できる．Normed gyrolinear space ではノルム空間と同様の議論が行えることが期待される．一方でノルム空間との違いがどのようなところで現れるかも興味深い．以下では与えられた normed gyrolinear space から新たな normed gyrolinear space を構成する方法について述べる．

次の命題は normed gyrolinear space の直積がまた normed gyrolinear space になるというものである．ただし単調関数 f が共通である場合のものである．

Proposition 7 $(X_1, \oplus_1, \otimes_1, \|\cdot\|_1, f)$，$(X_2, \oplus_2, \otimes_2, \|\cdot\|_2, f)$ をそれぞれ *normed gyrolinear spaces* とする．任意の $x_1, y_1 \in X_1$, $x_2, y_2 \in X_2$, $r \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) &= (x_1 \oplus_1 y_1, x_2 \oplus_2 y_2) \\ r \otimes (x_1, x_2) &= (r \otimes_1 x_1, r \otimes_2 x_2) \\ \|(x_1, x_2)\| &= f^{-1}(f(\|x_1\|_1) + f(\|x_2\|_2)) \end{aligned}$$

とすると $(X_1 \times X_2, \oplus, \otimes, \|\cdot\|, f)$ は *normed gyrolinear space* である．

次の命題は代数構造をそのままにノルムを変更するものである．単調関数 f が変化する．

Proposition 8 $(X, \oplus, \otimes, \|\cdot\|, f)$ を *normed gyrolinear space* とする．h を $h(0) = 0$ であるような狭義単調増加関数とし，$\|\cdot\|' = h(\|\cdot\|)$ とする．このとき $(X, \oplus, \otimes, \|\cdot\|', fh^{-1})$ もまた *normed gyrolinear space* となる．

上記二つの命題を組み合わせることで次の命題がわかる．任意の２つの normed gyrolinear space の直積は normed gyrolinear space になる．

Proposition 9 $(X_1, \oplus_1, \otimes_1, \|\cdot\|_1, f)$, $(X_2, \oplus_2, \otimes_2, \|\cdot\|_2, g)$ をそれぞれ *normed gyrolinear spaces* とする．k を $k(0) = 0$ を満たす狭義単調増加関数とする．任意の $x_1, y_1 \in X_1$, $x_2, y_2 \in X_2$, $r \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) &= (x_1 \oplus_1 y_1, x_2 \oplus_2 y_2) \\ r \otimes (x_1, x_2) &= (r \otimes_1 x_1, r \otimes_2 x_2) \\ \|(a, b)\|_k &= k(f(\|a\|_1) + g(\|b\|_2)) \end{aligned}$$

とすると $(X_1 \times X_2, \oplus, \otimes, \|\cdot\|_k, k^{-1})$ は *normed gyrolinear space* となる．

次の命題はノルムはそのままに代数構造を変化させる方法である．通常のノルム空間では元の代数構造と一致してしまうが，一般の normed gyrolinear space の場合は（ベクトルの和についての）分配法則を仮定していないため元の空間と違いが現れる．

Proposition 10 $(X, \oplus, \otimes, \|\cdot\|, f)$ を *normed gyrolinear space* とし，α を 0 でない実数とする．X 上の新たな演算 $\oplus_\alpha$ を

$$a \oplus_\alpha b = \frac{1}{\alpha} \otimes (\alpha \otimes a \oplus \alpha \otimes b)$$

によって定めると $(X, \oplus_\alpha, \otimes, \|\cdot\|, f)$ は *normed gyrolinear space* となる．

参考文献

[1] T. Abe, *Normed Gyrolinear Spaces: a Generalization of Normed Spaces Based on Gyrocommutative Gyrogroups*, Mathematics Interdisciplinary Research, **1** (2016), 143-172

[2] T. Abe and O. Hatori, *Generalized gyrovector spaces and a Mazur-Ulam theorem*, Publ. Math. Debrecen, **87** (2015), 393–413

[3] A. A. Ungar, *Analytic Hyperbolic Geometry and Albert Einstein's Special Theory of Relativity*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2008

関数環に値をとるLipschitz環上の準同型写像について

新潟大学大学院自然科学研究科　　大井　志穂 (Shiho Oi)

Sherbert が複素数値 Lipschitz 環上の準同形写像を決定し，その後多くの研究者により，ベクトル値 Lipschitz 環上の準同形写像の研究が進められてきている。可換の場合は，Botelho and Jamison [1] により収束列全体，有界列全体に値をとる Lipschitz 環上の準同形写像の形が与えられた。ここでは [3] に基づき，[1] の拡張にあたる一般の単位的可換 C*環に値をとる Lipschitz 環上の準同形写像の特徴づけについて得られた結果を報告する。

1　はじめに

次で定義する Banach 環上の準同型写像を研究することは，Banach 環上に定義される代数構造を考察すると，極めて基本的で本質的な研究であることが分かる。

定義 1 *Banach* 環を B_1, B_2 とおく。また写像 $\psi : B_1 \to B_2$ に対して ψ が任意の $a, b \in B_1,\ s \in \mathbb{C}$ に対して

$$\psi(a+b) = \psi(a) + \psi(b)$$

$$\psi(sa) = s\psi(a)$$

$$\psi(ab) = \psi(a)\psi(b)$$

をみたすとき ψ は準同形写像であるという。

Banach 環に対する代数構造の研究は準同型写像を研究することが対応する。また Lipschitz 環 $\mathrm{Lip}(X, A)$ を次のように定義する。

定義 2 コンパクト距離空間を X とする。また $(A, \|\cdot\|_A)$ を *Banach* 環とする。このとき写像 $F : X \to A$ に対して

$$L(F) = \sup_{x \neq y \in X} \frac{\|F(x) - F(y)\|_A}{d(x,y)}$$

が有界であるとき，F は *Lipschitz* 写像であるという。また

$$\mathrm{Lip}(X, A) = \{f : X \to A \mid L(f) < \infty\}$$

として *Lipschitz* 写像全体を $\mathrm{Lip}(X, A)$ で表す。このとき

$$\|F\|_L := \|F\|_\infty + L(F)$$

と定めると，この *Lipschitz* ノルム $\|\cdot\|_L$ で $\mathrm{Lip}(X, A)$ は *Banach* 環となる。また $\mathrm{Lip}(X) := \mathrm{Lip}(X, \mathbb{C})$ と定める。

ここで，この Lipschitz 環に対する準同形写像の先行研究について述べる。単位的可換 C^* 環に値をとる Lipschitz 環上の準同形写像の研究は，[1] によって次の結果が与えられている。空間 c は収束列全体とする。さらに $\widehat{\mathbb{N}}$ は自然数全体の一点コンパクト化を表す。

定理 1 [1, Theorem 4.3] コンパクト距離空間 X_j $(j=1,2)$ に対して， X_2 は連結であると仮定する。このとき $\psi : \mathrm{Lip}(X_1, c) \to \mathrm{Lip}(X_2, c)$ が $\psi(1_{X_1}) = 1_{X_2}$ となる準同形写像であるとする。このとき連続写像 $\tau : \widehat{\mathbb{N}} \to \widehat{\mathbb{N}}$ と任意の $n \in \mathbb{N}$ に依存して定まる Lipschitz 写像の点列 $\varphi_n : X_2 \to X_1$ が存在して任意の $n \in \mathbb{N}$ と $y \in X_2$ に対して

$$\psi(F)(y)(n) = F(\varphi_n(y))(\tau(n)),\ F \in \mathrm{Lip}(X_1, c)$$

が成立する。

複素数値有界列の全体集合を l_∞ とする。また $\beta\mathbb{N}$ は $\mathbb{N}$ の Stone-Čech のコンパクト化を表す。

定理 2 [1, Theorem 5.7] コンパクト距離空間 X_j $(j=1,2)$ は連結であるとする。写像 $\psi : \mathrm{Lip}(X_1, l_\infty) \to \mathrm{Lip}(X_2, l_\infty)$ が定関数値写像 [1] を保存する準同形写像であるとする。このとき連続写像 $\tau : \beta\mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}$ と任意の $n \in \mathbb{N}$ に依存して定まる Lipschitz 写像の点列 $\varphi_n : X_2 \to X_1$ が存在して任意の $n \in \mathbb{N}$ と $y \in X_2$ に対して

$$\psi(F)(y)(n) = F^\beta(\varphi_n(y))(\tau(n)),\ F \in \mathrm{Lip}(X_1, l_\infty)$$

が成立する。ただし F^β は F の $\beta\mathbb{N}$ への一意に拡張された連続関数を表す。

これより，以下の問題が自然に生じる。一般の単位的可換 C^* 環に値をとる Lipschitz 環上の準同形写像の決定をすることはできるか？これを言い換えると次のようである。

写像 $\psi : \mathrm{Lip}(X_1, C(M_1)) \to \mathrm{Lip}(X_2, C(M_2))$ が $\psi(1_{X_1}) = 1_{X_2}$ をみたす 準同形写像であるとする。このとき ψ はどのように決定されるか？

さらにここで準同型写像 ψ について，Gelfand 変換 $\widehat{\psi}$ を考えると写像 $h : X_2 \times M_2 \to X_1 \times M_1$ が存在して，

$$\widehat{\psi(F)} = \widehat{F} \circ h \quad F \in \mathrm{Lip}(X_1, C(M_1)) \tag{1}$$

が成立する。これより，Lipschitz 環上の準同型写像 ψ が合成作用素として書けることが分かるが，一般に十分条件を与えない。以上より Botelho and Jamison の定理 1, 2 は十分条件を予想させる結果として観ることができる。したがって写像の決定を含む問題として，準同形写像の特徴づけを与えることはできるだろうか？この問題に対して得られた結果を次で与える。

2 主定理

定理 3 コンパクト距離空間 X_j *$(j=1,2)$* に対して， X_2 は連結であると仮定する。また，$j=1,2$ に対して M_j をコンパクト *Hausdorff* 空間とする。ここで， $\tau : M_2 \to M_1$ が連続写像で， $\{\varphi_\phi\}_{\phi \in M_2}$ が X_2 から X_1 への *Lipschitz* 写像の集合であり，かつその *Lipschitz number* が有界であると仮定

[1] 下記の定義 3 を参照

する。さらに，任意の $y \in X_2$ に対して，写像 $\phi \mapsto \varphi_\phi(y)$ は M_2 から X_1 への連続写像であると仮定する。このとき，任意の $F \in \mathrm{Lip}(X_1, C(M_1))$, $\phi \in M_2$, $y \in X_2$ に対して

$$\psi(F)(y)(\phi) = F(\varphi_\phi(y))(\tau(\phi)),$$

と定めた写像 $\psi : \mathrm{Lip}(X_1, C(M_1)) \to \mathrm{Lip}(X_2, C(M_2))$ は $\psi(1_{X_1}) = 1_{X_2}$ をみたす $\mathrm{Lip}(X_1, C(M_1))$ から $\mathrm{Lip}(X_2, C(M_2))$ への準同形写像となる。

また，ここで逆を仮定する。すなわち写像 $\psi : \mathrm{Lip}(X_1, C(M_1)) \to \mathrm{Lip}(X_2, C(M_2))$ が $\psi(1_{X_1}) = 1_{X_2}$ をみたす 準同形写像であるとする。すると，連続写像 $\tau : M_2 \to M_1$ と それぞれの $\phi \in M_2$ に依存して定まる *Lipschitz* 写像 $\varphi_\phi : X_2 \to X_1$ が存在する。さらにその *Lipschitz* 写像 φ_ϕ は次の条件をみたす。*Lipschitz number* $\{L(\varphi_\phi)\}_{\phi \in M_2}$ が有界であり， $y \in X_2$ に対して，写像 $\phi \mapsto \varphi_\phi(y)$ は M_2 から X_1 への連続写像である。これらの条件をみたす写像 $\tau : M_2 \to M_1$ と $\varphi_\phi : X_2 \to X_1$ を用いて，任意の $F \in \mathrm{Lip}(X_1, C(M_1))$, $\phi \in M_2$, $y \in X_2$ に対して

$$\psi(F)(y)(\phi) = F(\varphi_\phi(y))(\tau(\phi)),$$

が成立する。

以下では，定理 3 の必要性の証明における写像の決定を行う。まず，定関数値写像の定義を与える。

定義 3 任意の $f \in C(M)$ に対して，定関数値写像 $\Phi(f) \in \mathrm{Lip}(X, C(M))$ を

$$\Phi(f)(x) = f, \quad x \in X$$

と定める。

このとき任意の $\phi \in M$ に対して， 写像 $P_\phi : \mathrm{Lip}(X, C(M)) \to \mathrm{Lip}(X)$ を

$$(P_\phi F)(x) = F(x)(\phi), \quad F \in \mathrm{Lip}(X, C(M)), \qquad x \in X$$

として定義し，写像 $T : C(M_1) \to \mathrm{Lip}(X_2, C(M_2))$ を

$$T = \psi \circ \Phi$$

と定義する。ここで定理 3 の証明で次の補題 2.1（cf. [2, 4]）を利用する。

補題 2.1 異なる M_1 の元 $\zeta_1 \neq \zeta_2$ について，

$$\|\chi_{\zeta_1} - \chi_{\zeta_2}\|^* = 2$$

が成立し，$y \neq z \in X_2$ ならば，

$$\|\chi_y - \chi_z\|^* \leq d(y, z)$$

がいえる。ただし，$\| \cdot \|^*$ はそれぞれ通常の意味での $C(M_1)$,$\mathrm{Lip}(X_2)$ の *dual* 空間上の汎関数ノルムを意味する。

今，写像 $P_\phi^{X_2}\circ T$ の adjoint map $(P_\phi^{X_2}\circ T)^*$ を考えると，この adoint map は乗法的線形汎関数を保存する。さらに集合 $(P_\phi^{X_2}\circ T)^*(\{\chi_y : y\in X_2\})$ は $\{\chi_\zeta:\zeta\in M_1\}$ の部分集合であり，かつ一点集合である。これを背理法で示す。そこで $y_1,y_2\in X_2$ が存在して次をみたす。

$$(P_\phi^{X_2}\circ T)^*(\chi_{y_1})=\chi_{\zeta_1},(P_\phi^{X_2}\circ T)^*(\chi_{y_2})=\chi_{\zeta_2}.$$

次に集合 A を

$$A=\{y\in X_2:(P_\phi^{X_2}\circ T)^*(\chi_y)=\chi_{\zeta_1}\}$$

と定める。集合 A が閉集合であることは明らかである。ここで集合 A の補集合 A^c も閉集合であることを以下で示す。そのため $z_n\to z_0\in X_2$ $(n\to\infty)$ となる収束列 $\{z_n\}\subseteq A^c$ をとる。任意の $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ に対して，$\xi_n\in M_1$ を

$$(P_\phi^{X_2}\circ T)^*(\chi_{z_n})=\chi_{\xi_n}$$

として定める。また $\{z_n\}$ は収束列であったから，

$$n\geq n_0\Longrightarrow d(z_n,z_0)<\frac{1}{3\|P_\phi^{X_2}\circ T\|}$$

をみたす $n_0\in\mathbb{N}$ が存在する。ゆえに，$n\geq n_0$ に対して

$$\begin{aligned}\|\chi_{\xi_n}-\chi_{\xi_0}\|^* &= \|(P_\phi^{X_2}\circ T)^*(\chi_{z_n})-(P_\phi^{X_2}\circ T)^*(\chi_{z_0})\|^*\\ &\leq \|P_\phi^{X_2}\circ T\|d(z_n,z_0)\\ &< \frac{1}{3}\end{aligned}$$

を得る。すると $\chi_{\xi_0}=\chi_{\xi_n}\neq\chi_{\zeta_1}$ であるから，$\chi_{\xi_0}\neq\chi_{\zeta_1}$ であるといえる。以上より集合 A^c が閉集合である。一方，これは X_2 の連結性に矛盾する。よって $(P_\phi^{X_2}\circ T)^*(\{\chi_y:y\in X_2\})$ が一点集合であることが分かり，次の補題 2.2 を得る。

補題 2.2 任意の $\phi\in M_2$ をとる。このとき

$$(P_\phi\circ T)^*(\{\chi_y:y\in X_2\})=\{\chi_{\tilde\phi}\}$$

をみたす $\tilde\phi\in M_1$ がただ一つに定まる。

これより写像 $\tau:M_2\to M_1$ を

$$((Tf)(y))(\phi)=f(\tau(\phi))\quad f\in C(M_1)$$

と定める。さらに任意の Lipschitz 関数 $u\in\mathrm{Lip}(X_1)$ に対して，$u_{X_1}\colon X_1\to C(M_1)$ を

$$u_{X_1}(x)=u(x),\quad x\in X_1$$

と定義する。このとき任意に $\phi\in M_2$ をとって固定すると，Sherbert [4] より Lipschitz 写像 $\varphi_\phi: X_2\to X_1$ が存在して，

$$\psi(u_{X_1})(y)(\phi)=u(\varphi_\phi(y))\quad u\in\mathrm{Lip}(X_1),y\in X_2$$

をみたす。準同型写像 ψ は積を保存するので任意の $\phi \in M_2$, $y \in X_2$ に対して

$$\begin{aligned}(\psi(u_{X_1}\Phi(f))(y))(\phi) &= u(\varphi_\phi(y)) \cdot f(\tau(\phi)) \\ &= ((u_{X_1}\Phi(f))(\varphi_\phi(y)))(\tau(\phi)), \quad u \in \mathrm{Lip}(X_1), f \in C(M_1) \quad (2)\end{aligned}$$

をみたす連続関数 $\tau : M_2 \to M_1$ と Lipschitz 写像 $\varphi_\phi : X_2 \to X_1$ の集合が存在することがわかる。

定理 3 における写像の決定の証明.
任意の $F \in \mathrm{Lip}(X_1, C(M_1))$ をとる。以下は [1] と同様の方法で証明する。代数的テンソル積 $C(X_1) \otimes C(M_1)$ を考える。代数的テンソル積 $C(X_1) \otimes C(M_1)$ は the least crossnorm のもとで，$C(X_1, C(M_1))$ で稠密である。ここで Stone-Weierstrass の定理より，つぎをみたす点列 $\{F_n\} \subset \mathrm{Lip}(X_1) \otimes C(M_1)$ が存在する。任意の $\epsilon > 0$ に対して，

$$n \geq n_0 \Longrightarrow \|F - F_n\|_\infty < \epsilon$$

をみたす $n_0 \in \mathbb{N}$ をとることができる。テンソル積 $\mathrm{Lip}(X_1) \otimes C(M_1)$ を用いると， 写像 F_n は次のように表現される：

$$F_n = \sum_{i=1}^{k_n} (u_i^{(n)})_{X_1} \Phi_{X_1}(f_i^{(n)})$$

ただし，$u_i^{(n)} \in \mathrm{Lip}(X_1)$ かつ $f_i^{(n)} \in C(M_1)$ である。 式（2）より

$$\psi(F_n)(y)(\phi) = F_n(\varphi_\phi(y))(\tau(\phi))$$

を得る。式（1）より，写像 $h : X_2 \times M_2 \to X_1 \times M_1$ が存在し，$n \geq n_0$ であるならば，

$$\begin{aligned}&|\psi(F)(y)(\phi) - F(\varphi_\phi(y))(\tau(\phi))| \\ &\leq |\psi(F)(y)(\phi) - \psi(F_n)(y)(\phi)| + |F_n(\varphi_\phi(y))(\tau(\phi)) - F(\varphi_\phi(y))(\tau(\phi))| \\ &\leq \|\widehat{F} \circ h - \widehat{F_n} \circ h\|_\infty + \|F_n - F\|_\infty \\ &\leq \|\widehat{F} - \widehat{F_n}\|_\infty + \|F_n - F\|_\infty \leq 2\epsilon\end{aligned}$$

をみたす。さらに $\epsilon > 0$ は任意であったから， 任意の $y \in X_2$ と $\phi \in M_2$ に対して

$$\psi(F)(y)(\phi) = F(\varphi_\phi(y))(\tau(\phi)), \quad F \in \mathrm{Lip}(X_1, C(M_1))$$

を得る。□

参考文献

[1] F. Botelho and J. Jamison, *Homomorphisms on a class of commutative Banach algebras,* Rocky Mountain J. Math. **43** (2013), no. 2, 395–416.

[2] A. Browder, *Introduction to Function Algebras* , W. A. Benjamin, Inc., 1969.

[3] S. Oi, *Homomorphisms between algebras of Lipschitz functions with the values in function algebras.* submitted

[4] D. Sherbert, *Banach algebras of Lipschitz functions,* Pacific J. Math. **13** (1963), 1387–1399.

Bergman 空間における Fejér-Riesz 型不等式に関する考察

日本大学薬学部　丹羽 典朗 (Norio NIWA)
春日 一浩 (Kazuhiro KASUGA)

2014 年の米沢数学セミナーにおいて，春日一浩氏が Bergman 空間における Fejér-Riesz 型不等式に関する講演を行なった．その後のやり取りから，この共同研究が始まった．

講演タイトルに Fejér-Riesz inequality とあるが，そのオリジナルは Hardy space H^p に対して成り立つ不等式であるので，まずそれを述べる．

複素平面の単位開円板を D，単位円周を ∂D とする．また，D 上の正則関数全体の集合を $H(D)$ とする：

$$D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

$$\partial D := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

$$H(D) := \{f : f \text{ is analytic in } D\}$$

$0 < p < \infty$ とする．

$$H^p := \left\{ f \in H(D) : \|f\|_{H^p} := \sup_{r<1} \left(\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

H^p は Hardy space と呼ばれる．$0 < p < 1$ のとき，$d(f, g) := \|f - g\|_{H^p}^p$ は H^p において距離を定め，H^p は complete metric space となる．$1 \leq p < \infty$ のとき，$\|\cdot\|_{H^p}$ は H^p においてノルムを定め，H^p は Banach space となる．

Theorem 1 (Fejér-Riesz inequality for H^p, [2]) $0 < p < \infty$ とする．$f \in H^p$ ならば，

$$\int_{-1}^{1} |f(x)|^p dx \leq \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p d\theta \quad \left(= \pi \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi} = \pi \|f\|_{H^p}^p \right)$$

が成り立つ．上の定数 $\frac{1}{2}$ は *best possible* である．

上を，analytic function $f \in H^p$ に対する『$|f(x)|^p$ のある線分上の積分』と『f の H^p-ノルム』の間に成り立つ不等式と見る．($0 < p < 1$ の場合，正確にはノルムではないが．)

$0 < p < \infty$ とし，$-1 < \alpha < \infty$ とする．

$$A^p_\alpha := \left\{ f \in H(D) \,:\, \|f\|_{A^p_\alpha} := \left(\int_D |f(z)|^p (1+\alpha)(1-|z|^2)^\alpha dA(z) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

ここで，$dA(z) = \dfrac{1}{\pi} dxdy = \dfrac{1}{\pi} r dr d\theta$ である．

A^p_α は weighted Bergman space と呼ばれる．$0 < p < 1$ のとき，$d(f, g) := \|f-g\|^p_{A^p_\alpha}$ は A^p_α において距離を定め，A^p_α は complete metric space となる．$1 \le p < \infty$ のとき，$\|\cdot\|_{A^p_\alpha}$ は A^p_α においてノルムを定め，A^p_α は Banach space となる．

2012 年，Andreev は A^2_α に対して Fejér-Riesz 型の不等式が成り立つ事を示した．

Theorem 2 (Fejér-Riesz type inequality for A^2_α, [1]) $-1 < \alpha < \infty$ とする．$f \in A^2_\alpha$ ならば，

$$\int_0^1 |f(\zeta x)|^2 (1-x)^{1+\alpha} dx \le \lambda_\alpha \int_D |f(z)|^2 (1+\alpha)(1-|z|^2)^\alpha dA(z) \ \left(= \lambda_\alpha \|f\|^2_{A^2_\alpha} \right)$$

が成り立つ．ここで，$\zeta \in \partial D$ であり，$\lambda_\alpha \le \dfrac{1}{\pi^\alpha}$ $(-1 < \alpha < 0$ のとき$)$，$\lambda_\alpha \le \dfrac{1}{1+\alpha}$ $(0 \le \alpha$ のとき$)$ である．

2014 年の米沢数学セミナーにおいて，春日氏は p が 2 以外の時にも，つまり一般の A^p_α に対して同様の不等式が成り立つのではないかと予想した．

Conjecture $0 < p < \infty,\ -1 < \alpha < \infty$ とする．$f \in A^p_\alpha$ に対して

$$\int_0^1 |f(\zeta x)|^p (1-x)^{1+\alpha} dx \le \lambda_\alpha \int_D |f(z)|^p (1+\alpha)(1-|z|^2)^\alpha dA(z) \ \left(= \lambda_\alpha \|f\|^p_{A^p_\alpha} \right)$$

は成り立つであろうか？ここで，ζ と λ_α は Theorem 2 に同じ．

ここでは H^p に対する Fejér-Riesz inequality の証明を真似ると，A^p_α に対する Fejér-Riesz inequality をどこまで同様に議論できるのか，どこで引っかかるのかを明らかにしたい．そのため，H^p に対する Fejér-Riesz inequality の証明のスケッチを以下に記す．

Fejér-Riesz inequality for H^p の証明のスケッチ．
(第 1 段階) $p = 2$ とする．実軸上で real valued である $f \in H^2$ に対して，

$$\int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx \le \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta$$

が成り立つ事を示す．

(第 2 段階) 任意の $f \in H^2$ (実軸上で complex valued) に対して，

$$\int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx \le \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta$$

が成り立つ事を示す．

(第3段階) $f \in H^p$ とし，かつ，$f(z)$ は D で零点を持たないとする．そのとき，$\{f(z)\}^{\frac{p}{2}}$ が定義できて，$\{f(z)\}^{\frac{p}{2}}$ は H^2 に属する．$\{f(z)\}^{\frac{p}{2}} \in H^2$ に (第2段階) を適用すると．次が証明できる．

D で零点を持たない $f \in H^p$ に対して，

$$\int_{-1}^{1} |f(x)|^p dx \le \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p d\theta$$

が成り立つ．

(第4段階) $\forall f \in H^p$ とする．$f(z)$ は D で零点を持つとする．

$f(z)$ の Blaschke product を $B(z)$ とする．$g(z) := \dfrac{f(z)}{B(z)}$ は D で零点を持たず，H^p に属する．

$|B(z)| \le 1$ $(\forall z \in D)$ であり，$|B(e^{i\theta})| = 1$ a.e. である．$|f(z)| = |B(z) \cdot g(z)| = |B(z)| \cdot |g(z)| \le |g(z)|$ $(\forall z \in D)$ である．

$$\int_{-1}^{1} |f(x)|^p dx \le \int_{-1}^{1} |g(x)|^p dx \le \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} |g(e^{i\theta})|^p d\theta = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p d\theta.$$

1番目の不等号は，$|f(z)| \le |g(z)|$ $(\forall z \in D)$ から得られる．
2番目の不等号は，D で零点を持たない $g \in H^p$ に (第3段階) を適用して得られる．
3番目の等号は，$|B(e^{i\theta})| = 1$ a.e. より $|f(e^{i\theta})| = |g(e^{i\theta})|$ a.e. から得られる．
(Fejér-Riesz inequality for H^p の証明のスケッチ　終わり)

予想に話を戻す．α と ζ が付いていると分かりにくいので，$\alpha = 0,\ \zeta = 1$ の場合を考える．そのとき，Andreev の結果 (Theorem 2) は次のようになる．

任意の $f \in A_0^2 := \left\{ f \in H(D) \,:\, \int_D |f(z)|^2 \dfrac{dxdy}{\pi} < \infty \right\}$ に対して，

$$\int_{0}^{1} |f(x)|^2 (1-x) dx \le \int_D |f(z)|^2 \frac{dxdy}{\pi} = \|f\|_{A_0^2}^2$$

が成り立つ．

$f \in A_0^p$ とし，f は D で零点を持たないとする．そのとき，$\{f(z)\}^{\frac{p}{2}}$ を定義する事ができて，$\{f(z)\}^{\frac{p}{2}}$ は A_0^2 に属する．$\{f(z)\}^{\frac{p}{2}}$ に Andreev の結果を適用すると，D で零点を持たない $f \in A_0^p$ に対して，

$$\int_{0}^{1} |f(x)|^p (1-x) dx \le \int_D |f(z)|^p \frac{dxdy}{\pi} \tag{1}$$

が成り立つ事を証明できる．

$z_k \in D \setminus \{0\}$ に対して，$b_{z_k}(z) := \dfrac{|z_k|}{z_k} \dfrac{z_k - z}{1 - \bar{z_k} z}$ とおく．$z_k = 0$ の場合は，$b_0(z) = z$ とする．

Theorem 3 ([3]) D の点列 $A=\{z_k\}_k$ が $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|^2)^2<\infty$ を満たすならば，

$$H_A(z):=\prod_{k=1}^{\infty}b_{z_k}(z)\{2-b_{z_k}(z)\}$$

は D の任意のコンパクト集合上で一様に収束する．$H_A(z)$ の *zero set* は $A=\{z_k\}_k$ である．

$H_A(z)$ は Horowitz product と呼ばれる．

Theorem 4 ([3]) $0<p<\infty,\ -1<\alpha<\infty$ とする．そのとき，定数 $C(p,\alpha)>0$ が存在して，$A=\{z_k\}_k$ を *zero set* とする任意の $f\in A^p_\alpha$ に対して，$\left\|\dfrac{f}{H_A}\right\|_{A^p_\alpha}\leq C(p,\alpha)\|f\|_{A^p_\alpha}$ が成り立つ．

$f\in A^p_0$ とする．f は zero set として $A=\{z_k\}_k$ を持つとし，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|^2)^2<\infty$ を満たすとする．$g(z):=\dfrac{f(z)}{H_A(z)}$ とおくと，$g(z)$ は D において零点を持たない．そのとき，

$$\begin{aligned}\int_0^1|f(x)|^p(1-x)dx \quad ? \quad \int_0^1|g(x)|^p(1-x)dx &\leq \int_D|g(z)|^p\frac{dxdy}{\pi}\\ &= \|g\|^p_{A^p_0}\\ &\leq C(p,0)^p\|f\|^p_{A^p_0}\end{aligned}$$

1 番目の不等号は，$g\in A^p_0$ は D で零点を持たないので (1) より分かる．3 番目の不等号は，Theorem 4 より分かる．ただし，Horowitz product は，Blaschke product $B(z)$ のように $|B(z)|\leq 1\ (z\in D)$ という性質を持っていないので，第 1 項と第 2 項の間の関係を示す事ができなかった．

Horowitz product の性質や Bergman spaces に属する関数の zero set の性質について情報をお持ちの方は是非教えてください．

参考文献

[1] V. V. Andreev, *Fejér-Riesz type inequalities for Bergman spaces*, Rend. Circ. Mat. Palermo, **61** (2012), no.3, 385–392.

[2] P. Duren, *Theory of H^p spaces*, Academic Press, 1970.

[3] H. Hedenmalm, B. Korenblum and K. Zhu, *Theory of Bergman spaces*, Springer, 2000.

Complete Pick kernel に関するノート

防衛大学校総合教育学群　　瀬戸　道生 (Michio Seto)

0　はじめに

単位円板上の Hardy 空間の理論において，境界で

$$|\varphi|^2 = 1 \tag{0.1}$$

をみたす正則関数が至るところに登場します．多変数という設定でその対応物を考えようとすると，それは

$$|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 - |\varphi_3|^2 = 1 \tag{0.2}$$

といった式をみたす関数の組 $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ になるのではないかということを今回の関数環研究集会で提案し，実際に (0.2) の式が現れることを解説しました．(0.1) を円の方程式とみれば，(0.2) は双曲面の方程式になります．(0.2) に関する研究は双曲的な（不定値な）数学の難しさのためなかなか進まないので，一般の楕円的な場合は何になるかと考えますと，それは complete Pick kernel の理論になります．ここでは complete Pick kernel の理論について最近調べたことをまとめます．

1　Complete Pick Property

$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ を $\mathbb{D}$ 内の互いに異なる点とする．このとき，任意の $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{D}$ に対し，

$$\varphi(\lambda_j) = w_j \quad \text{and} \quad \|\varphi\|_\infty \leq 1$$

をみたす $\varphi \in H^\infty(\mathbb{D})$ はいつ存在するか？この問題は Pick の補間問題とよばれる．

定理 1.1 (Pick) Pick の補間問題の可解性は次の行列の半正定値性と同値．

$$\left(\frac{1 - w_i \overline{w_j}}{1 - \lambda_i \overline{\lambda_j}} \right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

このような行列（Pick 行列とよぶ）が現れる理由は以下の計算からわかる．Pick の補間問題に解があったとして，それを φ とする．このとき，$I - T_\varphi T_\varphi^* \geq 0$ であるから，

$$\begin{aligned}\langle (I - T_\varphi T_\varphi^*) \sum c_j k_{\lambda_j}, \sum c_i k_{\lambda_i} \rangle &= \langle \sum c_j k_{\lambda_j}, \sum c_i k_{\lambda_i} \rangle - \langle T_\varphi^* \sum c_j k_{\lambda_j}, T_\varphi^* \sum c_i k_{\lambda_i} \rangle \\ &= \langle \sum c_j k_{\lambda_j}, \sum c_i k_{\lambda_i} \rangle - \langle \sum c_j \overline{\varphi(\lambda_j)} k_{\lambda_j}, \sum c_i \overline{\varphi(\lambda_i)} k_{\lambda_i} \rangle \\ &= \langle \sum c_j k_{\lambda_j}, \sum c_i k_{\lambda_i} \rangle - \langle \sum c_j \overline{w_j} k_{\lambda_j}, \sum c_i \overline{w_i} k_{\lambda_i} \rangle \\ &= \sum_{i,j} \overline{c_i} c_j \frac{1 - w_i \overline{w_j}}{1 - \lambda_i \overline{\lambda_j}} \geq 0.\end{aligned}$$

Pick 行列の半正定値性から Pick の問題の可解性を導く方法はいろいろ知られている．しかし，どれもこのような簡単なものではない．

さて，ここで w_j を行列 W_j, φ を行列値正則関数に変更しても，Pick の問題は意味をもつ．このとき，次のことが知られている．

定理 1.2 Pick の補間問題の行列版の可解性は次の行列の正定値性と同値．

$$\left(\frac{I - W_i W_j^*}{1 - \lambda_i \overline{\lambda_j}} \right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

ここで行列のサイズは任意である．このことを「Szegö 核は complete Pick property をもつ」又は「$H^2(\mathbb{D})$ は complete Pick property をもつ」という．この「complete」の意味は「completely positive」や「completely bounded」といった用語と同様な意味である．注目すべきことに，complete Pick property をもつ再生核はたくさん存在する．次にその例を紹介する．

2 Sobolev 空間

$$\begin{aligned}W_1^2 &= \{ f \in AC[0,1] : \int_0^1 |f'(x)|^2 \, dx < \infty \text{ and } f(0) = 0 \} \\ &= \{ f(y) = \int_0^y h(x) \, dx : \int_0^1 |h(x)|^2 \, dx < \infty \}\end{aligned}$$

と定める．ここでの微分は通常の微分である．この W_1^2 は再生核ヒルベルト空間である．実際，

$$f(y) = \int_0^y h(x) \, dx = \langle h, \chi_{[0,y]} \rangle_{L^2} = \langle f, \min\{x, y\} \rangle_{W_1^2}$$

と $\min\{0, y\} = 0$ から，W_1^2 で y 代入に対応する再生核が $\min\{x, y\}$ であることがわかる．ここまでは自明なことであるが，

定理 2.1 (Agler-Quiggin) W_1^2 は complete Pick property をもつ．

注意 2.1 W_1^2 に対してはいろいろな見方ができる．作用素論から見れば，W_1^2 は de Branges-Rovnyak 空間の一つである．実際，T を $\chi_{[0,y]}$ から定まる積分作用素とし，$\mathcal{M}(T) = (\operatorname{ran} T, \| \cdot \|_T)$ と定めれば，$\mathcal{M}(T) = W_1^2$ である．さらに，確率論では W_1^2 は Cameron-Martin 部分空間とよばれ，ブラウン運動を構成する際にも用いられる重要な空間のようである．

3　Drury-Arveson 空間

$$\mathbb{B}_m = \{\lambda \in \mathbb{C}^m : \|\lambda\|_{\ell^2_m} < 1\}$$

と定める．$m = \infty$ でもよい．$\mathbb{B}_m \times \mathbb{B}_m$ 上の関数

$$a_m(\zeta, \lambda) = \frac{1}{1 - \langle \zeta, \lambda \rangle_{\ell^2_m}}$$

を再生核とする再生核ヒルベルト空間を H^2_m と表し，Drury-Arveson 空間とよぶ．$H^2_1 = H^2(\mathbb{D})$ に注意する．この H^2_m は $\mathbb{B}_m$ 上の正則関数からなる空間であり，H^2_m の上では $H^2(\mathbb{D})$ の関連する有名な定理を自然に多変数化できることが知られている．例えば，H^2_m の不変部分空間を考えると (0.2) の楕円型に相当した式が現れる（H^2_m の方が先であるが）．次の事実は多くの研究者によって独立に示されたようである．

定理 3.1 H^2_m は complete Pick property をもつ．

さらに，H^2_m は次の意味での普遍性を備えている．

定理 3.2 (Agler-McCarthy) k を X 上の既約な再生核とする[1]．このとき，k が complete Pick property をもつならば，

$$k_\lambda \mapsto \delta(\lambda) a_m(\cdot, b(\lambda))$$

が $\mathcal{H}_k$ から δH^2_m への等距離な埋め込みを与えるような $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}, b : X \to \mathbb{B}_m, \delta : X \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ が存在する．さらに，k が $X \times X$ 上連続ならば，b も連続である．

W^2_1 が complete Pick property をもつことから，W^2_1 は正則性から一見かけ離れた空間にも関わらず，まったく不思議なことに，W^2_1 を無限個の変数をもった正則関数からなるヒルベルト空間 H^2_∞ に埋め込めることになる（詳しいことは Agler-McCarthy の本を参照）．ここで，W^2_1 が確率論では Cameron-Martin 部分空間とよばれていたことを思い出すと，次のようなことが連想される．

(i) H^2_m は symmetric Fock space のフーリエ変換としても定義できる（Arveson の定義）．

(ii) Fock 空間とブラウン運動は深い関連がある（よく知られている）．

(iii) W^2_1 もブラウン運動を構成する際に用いられる（熊谷 隆「確率論」の 2 章を参照）．

(iv) ハーディ空間の理論もブラウン運動と相性がよい（例えば，Petersen の本）．

以上のことから，complete Pick kernel の理論と確率論の間に何らかの関連があることが期待できる．確率論専攻の同僚に教わっている最中であるが，Cameron-Martin 部分空間を考えることで確率論にある種の解析性を導入できるとのこと（これは H^2_m への埋め込みのことでは？）．

この方向の研究で進展があった際には，関数環研究集会で報告したいと思います．

[1]既約性についてここでは説明しないが，たいていの再生核が満たしている自然な条件である．

Composition operators with product symbols

茨城大学 工学部 細川 卓也 (Takuya Hosokawa)

Let $H(\mathbb{D})$ be the space of all analytic functions on the open unit disk $\mathbb{D}$ and $S(\mathbb{D})$ be the set of all analytic self-maps of $\mathbb{D}$. For $\varphi \in S(\mathbb{D})$ we define the composition operator by $C_\varphi : f \mapsto f \circ \varphi$ on $H(\mathbb{D})$. Let L^2_a be the Hilbert-Bergman space on $\mathbb{D}$. We have that C_φ is bounded on L^2_a for any analytic self-map φ and that C_φ is compact on L^2_a if and only if $\varphi(z)$ has no finite angular derivative on $\partial\mathbb{D}$. In other words, this is equivalent to the following condition:

$$\lim_{|z|\to 1} \frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2} = 0.$$

Definition 1 *Let φ be an analytic self-map on $\mathbb{D}$. We define the set A_φ of the points of $\partial\mathbb{D}$ at which φ has a finite angular derivative.*

We remark that C_φ is compact on L^2_a if and only if $A_\varphi = \emptyset$.

Lemma 2 (Proposition 4.7 of [3], p.79) *The analytic function f has a finite angular derivative $f'(\zeta)$ at $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ if and only if f' has the finite angular limit $f'(\zeta)$ at ζ.*

Theorem 3 *Let φ and ψ be analytic self-maps on $\mathbb{D}$. Suppose that C_φ and C_ψ are not compact on L^2_a and $\|\varphi \cdot \psi\|_\infty = 1$. Then $C_{\varphi\cdot\psi}$ is compact on L^2_a if and only if $A_\varphi \cap A_\psi = \emptyset$.*

Example 4 *Let $\varphi(z) = 1 - \sqrt{2(1-z)}$ and $\psi(z) = -\varphi(-z)$. Since $A_\varphi = \{1\}$ and $A_\psi = \{-1\}$, C_φ and C_ψ are not compact on L^2_a. Then $\|\varphi \cdot \psi\|_\infty = 1$ and $A_\varphi \cap A_\psi = \emptyset$. Hence $C_{\varphi\cdot\psi}$ is compact on L^2_a.*

Taking $\psi = \varphi$, we can get the following.

Corollary 5 *Let φ be an analytic self-map on $\mathbb{D}$. Then the following conditions are equivalent:*

(i) C_φ is compact on L^2_a.

(ii) C_{φ^n} is compact on L^2_a for some positive integer n.

(iii) C_{φ^n} is compact on L^2_a for any positive integer n.

Next we consider the compactness of C_{φ^n} on the Hardy space H^2. Recall that the nevanlinna counting function N_φ of $\varphi \in S(\mathbb{D})$ is defined by

$$N_\varphi(z) = \sum \left\{ \log \frac{1}{|w|} : \varphi(w) = z \right\}$$

for $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$. Shapiro proved that C_φ is compact on H^2 if and only if

$$\lim_{|z| \to 1-} \frac{N_\varphi(z)}{\log \frac{1}{|z|}} = 0.$$

We can prove te following result.

Theorem 6 *Let φ be an analytic self-map on $\mathbb{D}$. Then the following conditions are equivalent:*

(i) C_φ is compact on H^2.

(ii) C_{φ^n} is compact on H^2 for some positive integer n.

(iii) C_{φ^n} is compact on H^2 for any positive integer n.

参考文献

[1] C. Cowen and B. MacCluer, *Composition operators on spaces of analytic functions*. CRC Press, Boca Raton, 1995.

[2] T. Hosokawas and S. Ohno, *Composition operators with product symbols on the weighted Bergman spaces*, preprint.

[3] Ch. Pommerenke, *Boundary Behavior of Conformal Maps*. Springer-Verlag, New York, 1991.

関数空間 $M^p\,(0<p<\infty)$ における乗法的等長写像について

金沢医科大学一般教育機構　　飯田安保 (Yasuo IIDA)
春日一浩 (Kazuhiro KASUGA)

Abstract. [4] において、講演者は p を自然数に限定した場合で関数空間 $M^p(X)$ における（必ずしも線形性を仮定しない）乗法的全射等長写像の構造を決定した。さらに [5] においては、この結果を $p\geq 1$ に拡張した。この小文ではこの問題を一般の $0<p<\infty$ に拡張した結果について報告する。それは [2, 3, 4, 5] で得られている Smirnov class、Privalov class、 $M^p(X)\ \ (p\in\mathbb{N})$、$M^p(X)\ \ (p\geq 1)$ における結果とまったく同じである。

1. 準備

$n\geq 1$ とする。$\mathbf{C}^n$ を複素 n 次元 Euclid 空間とし、その点を表す座標を $z=(z_1,\ldots,z_n)$ と書くことにする。unit polydisk を $U^n=\{z\in\mathbf{C}^n:|z_j|<1,\ \ 1\leq j\leq n\}$、unit ball を $B_n=\{z\in\mathbf{C}^n:\sum_{j=1}^n|z_j|^2<1\}$ とし、$\mathbb{T}^n=\{z\in\mathbf{C}^n:|z_j|=1,\ \ 1\leq j\leq n\}$、$S_n=\{z\in\mathbf{C}^n:\sum_{j=1}^n|z_j|^2=1\}$ とする。以下、X は U^n か B_n を表し、∂X は $\mathbb{T}^n$ か S_n を表すものとする。また ∂X 上の normalized Lebesgue measure を $d\sigma$ で表す。

X 上の正則関数 f が $\displaystyle\sup_{0\leq r<1}\int_{\partial X}\log(1+|f(rz)|)\,d\sigma(z)<\infty$ を満たすとき f は Nevanlinna class $N(X)$ に属するという。$f\in N(X)$ には有限な nontangential limit が a.e. $z\in\partial X$ で存在することが知られており、これを改めて $f(z)$ で表すものとする。また $f\in N(X)$ が以下の条件を満たすとき f は Smirnov class $N_*(X)$ に属するという：

$$\sup_{0\leq r<1}\int_{\partial X}\log(1+|f(rz)|)\,d\sigma(z)=\int_{\partial X}\log(1+|f(z)|)\,d\sigma(z).$$

$1<p<\infty$ とする。X 上の正則関数 f が $\displaystyle\sup_{0\leq r<1}\int_{\partial X}(\log(1+|f(rz)|))^p\,d\sigma(z)<\infty$ を満たすとき f は Privalov class $N^p(X)$ に属するという。以下、簡便のために $N^1(X)=N_*(X)$ と表すことにする。$N^p(X)\ \ (p\geq 1)$ 上の距離を

$$d_{N^p(X)}(f,g)=\left(\int_{\partial X}(\log(1+|f(z)-g(z)|))^p\,d\sigma(z)\right)^{\frac{1}{p}}\quad (f,g\in N^p(X))$$

で定義すると、$N^p(X)$ はこの距離に関して F-algebra（積に関して連続である、線形完備距離空間）であることが知られている。

次に関数空間 $M^p(X)$ を定義しよう。$0 < p < \infty$ に対し、以下を満たす X 上の正則関数 f の全体を $M^p(X)$ で表すことにする：

$$\int_{\partial X} \left(\log \left(1 + \sup_{0 \le r < 1} |f(rz)| \right) \right)^p d\sigma(z) < \infty.$$

$M^p(X)$ 上の距離を

$$d_{M^p(X)}(f, g) = \left\{ \int_{\partial X} \left(\log \left(1 + \sup_{0 \le r < 1} |f(rz) - g(rz)| \right) \right)^p d\sigma(z) \right\}^{\frac{\alpha_p}{p}} \quad (f, g \in M^p(X))$$

とする（ただし $\alpha_p = \min(1, p)$ とおく）と、$M^p(X)$ はこの距離に関して F-algebra であることがわかっている ([11])。

これらのクラスに対し、以下の包含関係が成り立つことが知られている：

$$H^q(X) \subsetneq N^p(X) = M^p(X) \subsetneq M^1(X) \subsetneq N_*(X) \quad (0 < q \le +\infty\, ,\, p > 1).$$

ここで Hardy space を $H^q(X)$ で表し、そのノルムは $\|\cdot\|_q$ と表記することにする。また $N(X) \subsetneq M^p(X)\,(0 < p < 1)$ であることが知られている。特に Hardy algebra $H^\infty(X)$ は $N_*(X)$ や $N^p(X)$, $M^p(X)$ において稠密である。

2. $N_*(X)$, $N^p(X)$ における等長写像のこれまでの結果について

Smirnov class $N_*(X)$ における線形等長写像の結果は Stephenson [9] によって得られており、また Privalov class $N^p(X)$ における線形等長写像については、1 変数の場合は Iida-Mochizuki [7] による結果があり、多変数の場合は Subbotin [10,11] の結果が知られている。全射の場合について以上の結果をまとめたものが次の定理である：

定理 2-1

Let $p \ge 1$. $T : N^p(X) \to N^p(X)$ is a surjective linear isometry. Then there exists a holomorphic automorphism Φ on X with $\Phi(0) = 0$ such that $T(f) = \alpha f \circ \Phi$ for all $f \in N^p(X)$ where $\alpha \in \mathbb{C}, |\alpha| = 1$.

さて、$p \ge 1$ に対し $T : N^p(X) \to N^p(X)$ が $T(fg) = T(f)T(g) \quad (f\, ,\, g \in N^p(X))$ を満たすとき、T は**乗法的（multiplicative）**であると呼ぶ。Smirnov class $N_*(X)$ における（必ずしも線形ではない）乗法的全射等長写像の結果は Hatori-Iida [2] によって得られており、また Privalov class $N^p(X)$ における（必ずしも線形ではない）乗法的全射等長写像については Hatori-Iida-Stević-Ueki [3] によって得られている。以下がその内容である：

命題 2-2

Let n be a positive integer and let X be either B_n or U^n. Let $p \geq 1$ and suppose that $T : N^p(X) \to N^p(X)$ is a surjective isometry. If T is 2-homogeneous in the sense that $T(2f) = 2T(f)$ holds for every $f \in N^p(X)$, then either

$$T(f) = \alpha f \circ \Phi \text{ for every } f \in N^p(X) \quad \text{or} \quad T(f) = \alpha \overline{f \circ \overline{\Phi}} \text{ for every } f \in N^p(X),$$

where α is a complex number with the unit modulus and for $X = B_n$, Φ is a unitary transformation; for $X = U^n$, $\Phi(z_1, \dots, z_n) = (\lambda_1 z_{i_1}, \dots, \lambda_n z_{i_n})$, where $|\lambda_j| = 1$, $1 \leq j \leq n$ and $(i_1, \dots, i_n)$ is some permutation of the integers from 1 through n.

定理 2-3

Let n be a positive integer and let X be either B_n or U^n. Let T be a multiplicative (not necessarily linear) isometry from $N^p(X)$ $(p \geq 1)$ onto itself. Then there exists a holomorphic automorphism Φ on X such that either of the following holds:

$$T(f) = f \circ \Phi \text{ for every } f \in N^p(X) \quad \text{or} \quad T(f) = \overline{f \circ \overline{\Phi}} \text{ for every } f \in N^p(X),$$

where Φ is a unitary transformation for $X = B_n$; $\Phi(z_1, \dots, z_n) = (\lambda_1 z_{i_1}, \dots, \lambda_n z_{i_n})$ for $X = U^n$, where $|\lambda_j| = 1$ for every $1 \leq j \leq n$ and $(i_1, \dots, i_n)$ is some permutation of the integers from 1 through n.

以上の命題 2-2 と定理 2-3 の証明において大きな役割を果たしているのが、次の「Mazur-Ulam の定理」と呼ばれるものである（[8]）。

補題 2-4

Let X and Y be normed vector spaces and $U : X \to Y$ be surjective isometry which satisfies $U(0) = 0$. Then U is real-linear.

3. $M^p(X)$ における（乗法的）全射等長写像について

関数空間 $M^p(X)$ $(p > 0)$ における線形全射等長写像の結果は Subbotin [10, 11, 12] によって得られている。その内容は $N^p(X)$ $(p \geq 1)$ のケースとまったく同じである。

定理 3-1

Let $p > 0$. $T : M^p(X) \to M^p(X)$ is a surjective linear isometry. Then there exists a holomorphic automorphism Φ on X with $\Phi(0) = 0$ such that $T(f) = \alpha f \circ \Phi$ for all $f \in M^p(X)$ where $\alpha \in \mathbb{C}, |\alpha| = 1$.

また $M^p(X)$ における（必ずしも線形ではない）乗法的全射等長写像の結果は、$p \in \mathbb{N}$ の場合は [4] で、さらに $p \geq 1$ の場合は [5] で示されている。これらの内容も $N^p(X)$ $(p \geq 1)$ のケースとまったく同じである。

命題 3-2

Let n be a positive integer and let X be either B_n or U^n. Let $p \geq 1$ and suppose that $T : M^p(X) \to M^p(X)$ is a surjective isometry. If T is 2-homogeneous in the sense that $T(2f) = 2T(f)$ holds for every $f \in M^p(X)$, then either

$$T(f) = \alpha f \circ \Phi \text{ for every } f \in M^p(X) \quad \text{or} \quad T(f) = \alpha \overline{f \circ \overline{\Phi}} \text{ for every } f \in M^p(X),$$

where α is a complex number with the unit modulus and for $X = B_n$, Φ is a unitary transformation; for $X = U^n$, $\Phi(z_1, \ldots, z_n) = (\lambda_1 z_{i_1}, \ldots, \lambda_n z_{i_n})$, where $|\lambda_j| = 1$, $1 \leq j \leq n$ and $(i_1, \ldots, i_n)$ is some permutation of the integers from 1 through n.

定理 3-3

Let n be a positive integer and let X be either B_n or U^n. Let T be a multiplicative (not necessarily linear) isometry from $M^p(X)$ $(p \geq 1)$ onto itself. Then there exists a holomorphic automorphism Φ on X such that either of the following holds:

$$T(f) = f \circ \Phi \text{ for every } f \in M^p(X) \quad \text{or} \quad T(f) = \overline{f \circ \overline{\Phi}} \text{ for every } f \in M^p(X),$$

where Φ is a unitary transformation for $X = B_n$; $\Phi(z_1, \ldots, z_n) = (\lambda_1 z_{i_1}, \ldots, \lambda_n z_{i_n})$ for $X = U^n$, where $|\lambda_j| = 1$ for every $1 \leq j \leq n$ and $(i_1, \ldots, i_n)$ is some permutation of the integers from 1 through n.

この小文では、これらの内容を一般の $0 < p < \infty$ に拡張した結果を報告する ([6])。それは上述の $N^p(X)$ $(p \geq 1)$, $M^p(X)$ $(p \in \mathbb{N})$, $M^p(X)$ $(p \geq 1)$ での内容とまったく同じである。

命題 3-4([6])

Let n be a positive integer and let X be either B_n or U^n. Let $0 < p < \infty$ and suppose that $T : M^p(X) \to M^p(X)$ is a surjective isometry. If T is 2-homogeneous in the sense that $T(2f) = 2T(f)$ holds for every $f \in M^p(X)$, then either

$$T(f) = \alpha f \circ \Phi \text{ for every } f \in M^p(X) \quad \text{or} \quad T(f) = \alpha \overline{f \circ \overline{\Phi}} \text{ for every } f \in M^p(X),$$

where α is a complex number with the unit modulus and for $X = B_n$, Φ is a unitary transformation; for $X = U^n$, $\Phi(z_1, \ldots, z_n) = (\lambda_1 z_{i_1}, \ldots, \lambda_n z_{i_n})$, where $|\lambda_j| = 1$, $1 \leq j \leq n$ and $(i_1, \ldots, i_n)$ is some permutation of the integers from 1 through n.

この命題の証明において、以下の補題を利用する：

補題 3-5([10])

Let $f \in H^p(X)$, $p \geq 1$. Then the norm $||f||_{H^p_m} := \left\{ \int_{\partial X} \sup_{0 \leq r < 1} |f(rz)|^p \, d\sigma(z) \right\}^{\frac{1}{p}}$ is equivalent to the standard norm in $H^p(X)$.

補題 3-6([10])

Let $0 < p < \infty$. Then

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon^{p+1}} \{(\varepsilon t)^p - (\log(1 + \varepsilon t))^p\} = \frac{p}{2} t^{p+1}, \quad t \geq 0.$$

【命題 3-4 の証明の概略】

$1 \leq p < \infty$ の場合の概略については [5] を参照されたい。ここでは $0 < p < 1$ の場合の証明について概説する。

次を満たす X 上の正則関数の全体を $H^p_m(X)\,(0 < p < 1)$ と表すことにする：

$$d_{H^p_m}(f, 0) := \int_{\partial X} \sup_{0 \leq r < 1} |f(rz)|^p \, d\sigma(z) < \infty.$$

そして $f, g \in H^p_m(X)$ に関して距離を $d_{H^p_m}(f, g) = d_{H^p_m}(f - g, 0)$ のように定める。 もし $T : M^p(X) \to M^p(X)$ が全射等長写像で　任意の $f \in M^p(X)$ に関して $T(2f) = 2T(f)$ を満たすならば、[4, Proposition 1] の方法と同様に、$T : H^p_m(X) \to H^p_m(X)$ は、また全射等長写像である。$f, g \in H^p(X)$ とする。$T(2f) = 2T(f)$ だから、$\frac{T(f)}{2^m} = T(\frac{f}{2^m})$ $(m \in \mathbb{N})$ を得る。この時、次の等式が成り立つ。

$$\int_{\partial X} \sup_{0 \leq r < 1} \left| \frac{f(rz)}{2^m} \right|^p d\sigma(z) - \int_{\partial X} \left(\log \left(1 + \sup_{0 \leq r < 1} \left| \frac{f(rz)}{2^m} \right| \right) \right)^p d\sigma(z)$$
$$= \int_{\partial X} \sup_{0 \leq r < 1} \left| \frac{(Tf)(rz)}{2^m} \right|^p d\sigma(z) - \int_{\partial X} \left(\log \left(1 + \sup_{0 \leq r < 1} \left| \frac{(Tf)(rz)}{2^m} \right| \right) \right)^p d\sigma(z).$$

したがって

$$\int_{\partial X} \frac{1}{(\frac{1}{2^m})^{p+1}} \left\{ \left(\frac{1}{2^m} \sup_{0 \leq r < 1} |f(rz)| \right)^p - \left(\log \left(1 + \frac{1}{2^m} \sup_{0 \leq r < 1} |f(rz)| \right) \right)^p \right\} d\sigma(z) \tag{1}$$
$$= \int_{\partial X} \frac{1}{(\frac{1}{2^m})^{p+1}} \left\{ \left(\frac{1}{2^m} \sup_{0 \leq r < 1} |(Tf)(rz)| \right)^p - \left(\log \left(1 + \frac{1}{2^m} \sup_{0 \leq r < 1} |(Tf)(rz)| \right) \right)^p \right\} d\sigma(z)$$

を得る。不等式 $\log(1 + xy) \leq \log(1 + x) + \log(1 + y)$ $(x \geq 0\,,\, y \geq 0)$ と $(a + b)^p \leq 2^p(a^p + b^p)$ $(a \geq 0\,,\, b \geq 0\,,\, p > 0)$ より、(1) の左辺の被積分関数が $L^1(\partial X)$-関数でおさえられることが確かめられる。同様に (1) の右辺の被積分関数も $L^1(\partial X)$-関数でおさえられることが確かめられる。Lebesgue の収束定理と補題 3-6 を (1) の両辺に用いて次の等式を得る。

$$\int_{\partial X} \frac{p}{2} \left(\sup_{0 \leq r < 1} |f(rz)| \right)^{p+1} d\sigma(z) = \int_{\partial X} \frac{p}{2} \left(\sup_{0 \leq r < 1} |(Tf)(rz)| \right)^{p+1} d\sigma(z).$$

したがって次を得る。

$$\int_{\partial X} \sup_{0\le r<1} |f(rz)|^{p+1}\, d\sigma(z) = \int_{\partial X} \sup_{0\le r<1} |(Tf)(rz)|^{p+1}\, d\sigma(z).$$

補題 3-5 よりノルム $||\cdot||_{p+1}$ とノルム $||\cdot||_{H_m^{p+1}}$ の同値性から、$T : H^{p+1}(X) \to H^{p+1}(X)$ が全射等長写像であることが分かる。 $H^{p+1}(X)$ がノルム線形空間であることと $A(0) = 0$ から Mazur-Ulam theorem を用いて $A|_{H^{p+1}(X)}$ が実線形等長写像であることが導かれる。後は [5] における $1 \le p < \infty$ の場合の証明と同様に示される。

（証明終）

最後に $M^p(X)\,(0 < p < \infty)$ における（必ずしも線形ではない）乗法的全射等長写像の結果は以下のように表される。この結果も $N^p(X)\ \ (p \ge 1)$, $M^p(X)\ \ (p \in \mathbb{N})$, $M^p(X)\ \ (p \ge 1)$ のケースとまったく同じである。

これは [4, Theorem 2] と同様に示されるので、ここでは証明を行わない。

定理 3-7([6])

Let n be a positive integer and let X be either B_n or U^n. Let T be a multiplicative (not necessarily linear) isometry from $M^p(X)\ \ (0 < p < \infty)$ onto itself. Then there exists a holomorphic automorphism Φ on X such that either of the following holds:

$$T(f) = f \circ \Phi \text{ for every } f \in M^p(X) \quad \text{ or } \quad T(f) = \overline{f \circ \overline{\Phi}} \text{ for every } f \in M^p(X),$$

where Φ is a unitary transformation for $X = B_n$; $\Phi(z_1, \dots, z_n) = (\lambda_1 z_{i_1}, \dots, \lambda_n z_{i_n})$ for $X = U^n$, where $|\lambda_j| = 1$ for every $1 \le j \le n$ and $(i_1, \dots, i_n)$ is some permutation of the integers from 1 through n.

参考文献

[1] A. J. Ellis, *Real characterizations of function algebras amongst function spaces,* Bull. London Math. Soc. **22(4)** (1990), 381–385.

[2] O. Hatori and Y. Iida, *Multiplicative isometries on the Smirnov class*, Cent. Eur. J. Math. **9(5)** (2011), 1051–1056.

[3] O. Hatori, Y. Iida, S. Stević and S.-I. Ueki, *Multiplicative isometries on F-algebras of holomorphic functions*, Abstract and Applied Analysis **2012** (2012), 16 pages, doi:10.1155 /2012 /125987.

[4] Y. Iida and K. Kasuga, *Multiplicative isometries on some F-algebras of holomorphic functions*, J. Funct. Sp. Appl. **2013**(2013), 3 pages, Article ID: 681637.

[5] 飯田安保・春日一浩、「関数空間 $M^p(p \ge 1)$ における乗法的等長写像について」2014 年度関数環研究集会報告集、36-43.

[6] Y. Iida and K. Kasuga, *Multiplicative isometries on classes $M^p(X)$ of holomorphic functions,*

J. Funct. Sp. **2015**(2015), 5 pages, Article ID: 598538.
[7] Y. Iida and N. Mochizuki, *Isometries of some F-algebras of holomorphic functions*, Arch. Math. **71(4)** (1998), 297–300.
[8] S. Mazur and S. Ulam, *Sur les transformationes isométriques d'espaces vectoriels normés,* C. R. Acad. Sci., Paris, **194** (1932), 946–948.
[9] K. Stephenson, *Isometries of the Nevanlinna class*, Indiana Univ. Math. J. **26(2)** (1977), 307–324.
[10] A. V. Subbotin, *Linear isometry groups of Privalov's spaces of holomorphic functions of several variables,* Doklady. Math. **60(1)** (1999), 77–79.
[11] A. V. Subbotin, *Isometriers of Privalov spaces of holomorphic functions of several variables*, J. Math. Sci. **135(1)** (2006), 2794–2802.
[12] A. V. Subbotin, *Groups of linear isometries of spaces M^q of holomorphic functions of several complex variables*, Math. Notes **83(3)** (2008), 437–440.

Yasuo IIDA
Department of Mathematics, Kanazawa Medical University, Uchinada, Ishikawa 920-0293, Japan
E-mail: yiida@kanazawa-med.ac.jp

Kazuhiro KASUGA
E-mail: kazuhiro.kasuga@gmail.com

The Toeplitzness of composition operators

日本工業大学工学部 大野　修一（Shûichi Ohno)

1 Introduction

Let H^2 be the Hardy-Hilbert space of all analytic functions on the open unit disk $\mathbb{D}$ with square-summable Taylor coefficients. For $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ and $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ in H^2, the standard inner product is defined as

$$\begin{aligned}\langle f, g\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b_n} \\ &= \int_{\partial\mathbb{D}} f(\zeta)\overline{g(\zeta)}dm(\zeta),\end{aligned}$$

where m is the normalized Lebesgue measure on the boundary $\partial\mathbb{D}$ of $\mathbb{D}$. Refer to [12, 19] for the basic properties of the classical Hardy spaces.

Let T be a bounded linear operators on H^2. Then T is a Toeplitz operator if and only if $S^*TS = T$, where S is the forward shift defined by $Sf(z) = zf(z)$ for $z \in \mathbb{D}$ and $f \in H^2$ and S^* is the backward shift on H^2. In [2], Barría and Halmos called an operator T on H^2 asymptotically Toeplitz if the sequence of operators $\{S^{*^n}TS^n\}$ converges strongly on H^2. Then Feintuch [13] pointed out that one need not rule out either weak or norm operator convergence. So there are actually three different kinds of asymptotic toeplitzness.

Definition. Let T be a bounded linear operator on H^2.

(i) T is said to be *uniformly asymptotically Toeplitz* if there is a bounded linear operator A on H^2 such that $\|S^{*^n}TS^n - A\| \to 0$ as $n \to \infty$.

(ii) T is said to be *strongly asymptotically Toeplitz* if there is an operator A on H^2 such that $\|(S^{*^n}TS^n - A)f\| \to 0$ as $n \to \infty$ for $f \in H^2$.

(iii) T is said to be *weakly asymptotically Toeplitz* if there is an operator A on H^2 such that $\langle (S^{*^n}TS^n - A)f, g\rangle \to 0$ as $n \to \infty$ for $f, g \in H^2$.

Feintuch [13] showed the following result.

Theorem of Feintuch. A bounded linear operator on H^2 is uniformly asymptotically Toeplitz if and only if it is the sum of a Toeplitz operator and a compact operator.

In the natural way, for a bounded measurable function $u \in L^\infty(\partial\mathbb{D})$, a Toeplitz operator T_u on H^2 is defined as $T_u f = P(uf)$ for $f \in H^2$, where P is the orthogonal projection from $L^2(\partial\mathbb{D})$ to H^2. Recall that the only compact Toeplitz operator on H^2 is the zero operator. See [10, 15] for operator theory on H^2.

We here consider the asymptotic toeplitzness associated with composition operators. For an analytic self-map φ of $\mathbb{D}$, the composition operator C_φ is defined by $C_\varphi f = f \circ \varphi$. It has been known for a long time that such operators are bounded linear operators on H^2. See [4, 20, 25] for the study of composition operators. Also, refer to [22] for a survey of early results on the toeplitzness of composition operators.

2 Torplitzness of C_φ

Clearly, only an analytic self-map φ of $\mathbb{D}$ which make C_φ a Toeplitz operator is the identy. Nazarov and Shapiro [17] investigated properties of the asymptotic toeplitzness of composition operators and adjoints. The following are obtained in [17].

Theorem 2.1 *A composition operator is uniformly asymptotically Toeplitz if and only if it is either compact or the identity.*

Theorem 2.2 *Let φ be an analytic self-map of $\mathbb{D}$. If $|\varphi| < 1$ a.e. on $\partial\mathbb{D}$, then C_φ is strongly asymptotically Toeplitz with asymptotic symbol zero.*

Theorem 2.3 *Suppose that φ is not the identity map and fixes the origin. If C_φ is strongly asymptotically Toeplitz, then $|\varphi| < 1$ a.e. on $\partial\mathbb{D}$.*

Theorem 2.4 *Suppose that φ is not the identity map and fixes the origin. Then C_φ is weakly asymptotically Toeplitz with asymptotic symbol zero.*

See [23] for the converse.

3 Toeplitzness of products of composition operators and their adjoints

Recently the toeplitzness of products of composition operators and their adjoints is independently investigated in [6, 11, 18].

Theorem 3.1 *Let φ, ψ be analytic self-maps of $\mathbb{D}$. Then $C_\varphi^* C_\psi$ is Toeplitz if and only if $\varphi = \psi$ and φ is inner. And then $C_\varphi^* C_\varphi = T_u$, where*

$$u(\zeta) = \frac{1 - |\varphi(0)|^2}{|1 - \overline{\varphi(0)}\zeta|^2} \quad \text{for} \quad \zeta \in \partial\mathbb{D}.$$

Proof. At first, we note that $C_\varphi^* C_\psi$ is Toeplitz if and only if

$$C_\varphi^* T_{1-\overline{\varphi}\psi} C_\psi = 0.$$

Suppose that $\varphi = \psi$ and φ is inner. Then $1 - \overline{\varphi}\psi = 0$. Clearly $C_\varphi^* C_\psi$ is Toeplitz.

Conversely assume that $C_\varphi^* C_\psi$ is Toeplitz. Then $C_\varphi^* T_{1-\overline{\varphi}\psi} C_\psi = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= \langle C_\varphi^* T_{1-\overline{\varphi}\psi} C_\psi 1, 1\rangle \\ &= \langle P(1-\overline{\varphi}\psi), 1\rangle \\ &= \langle 1-\overline{\varphi}\psi, 1\rangle. \end{aligned}$$

So $\displaystyle\int (1-\overline{\varphi}\psi)dm = 0$ and thus $\displaystyle\int \overline{\varphi}\psi dm = 1$. As $|\overline{\varphi}\psi| \le 1$, φ and ψ are inner.

Moreover

$$\int |\overline{\varphi}\psi| dm = \Big| \int \overline{\varphi}\psi dm \Big| = 1.$$

So $\overline{\varphi}\psi$ is constant and we can easily check $\overline{\varphi}\psi = 1$. Consequently $\varphi = \psi$.

Next, we note that $S^{*^n} C_\varphi^* C_\psi S^* = C_\varphi^* T_{(\overline{\varphi}\psi)^n} C_\psi$.

Theorem 3.2 ([11]) Let φ, ψ be analytic self-maps of $\mathbb{D}$.

(i) When $\varphi = \psi$, $C_\varphi^* C_\varphi$ is uniformly asymptotically Toeplitz if and only if $T_{1-\chi(E)} C_\varphi$ is compact, where $E = \{\zeta \in \partial\mathbb{D} : |\varphi(\zeta)| = 1\}$.

(ii) When $\varphi \neq \psi$, $C_\varphi^* C_\psi$ is uniformly asymptotically Toeplitz if and only if $C_\varphi^* C_\psi$ is compact.

It is unknown to characterize any analytic self-map φ of $\mathbb{D}$ for which $T_{1-\chi(E)} C_\varphi$ is compact.

The compactness of $C_\varphi^* C_\psi$ was characterized in [3]: $C_\varphi^* C_\psi$ is compact on H^2 if and only if

$$\lim_{|z|\to 1} \frac{N_\varphi(\varphi(z)) N_\psi(\psi(z))}{\log \frac{1}{|\varphi(z)|} \log \frac{1}{|\psi(z)|}} = 0.$$

If φ and ψ are univalent, the compactness is equivalent to

$$\lim_{|z|\to 1} \frac{(1-|z|^2)^2}{(1-|\varphi(z)|^2)(1-|\psi(z)|^2)} = 0.$$

Lemma 3.3 *Let $\{u_n\}$ be a bounded sequence in $L^\infty(\partial\mathbb{D})$ such that $u_n \to 0$ pointwise a.e. on $\partial\mathbb{D}$. Then $T_{u_n} \to 0$ strongly as $n \to \infty$.*

As $S^{*^n} C_\varphi^* C_\varphi S^* = C_\varphi^* T_{|\varphi|^{2n}} C_\varphi$ and $|\varphi|^{2n} \to \chi(E)$ pointwise a.e. on $\partial\mathbb{D}$, we can show the following using Lemma 3.3 in the case $\varphi = \psi$.

Theorem 3.4 *Let φ, ψ be analytic self-maps of $\mathbb{D}$.*

(i) ([11]) When $\varphi = \psi$, $C_\varphi^* C_\varphi$ is automatically strongly asymptotically Toeplitz .

(ii) Suppose $\varphi \neq \psi$. If $|\varphi\psi| < 1$ a.e. on $\partial\mathbb{D}$, then $C_\varphi^* C_\psi$ is strongly asymptotically Toeplitz with asymptotic symbol zero.

Asymptotic toeplitzness of $C_\varphi C_\psi^*$ has not completely been investigated.

4 S-toeplitzness of composition operators

Matache [16] considered the usual generalization of Toeplitz operators. A bounded linear operator S on a Hilbert space is called a unilateral (forward) shift if it is an isometry such that $\{S^{*n}\}$ is convergent to 0 in the strong operator topology. For example, if w is a non-consatnt inner function, then M_w is unilateral on H^2.

Matache then introduced the corresponding asymptotic generalizations.

Definition. Let T be a bounded linear operator on H^2 and S a unilateral shift.

(i) An operator T is called S-toeplitz if $S^*TS = T$.

(ii) An operator T is called S-analytic if $TS = ST$.

Theorem 4.1 ([16]) Let w be a non-constant inner function and φ a non-constant analytic self-map of $\mathbb{D}$.

(i) If C_φ is M_w-Toeplitz, then φ is inner.

(ii) If φ is inner, then C_φ is M_w-Toeplitz if and only if $C_\varphi w = w$.

Moreover Jung and Ko recently study the case of weighted composition operators.

Theorem 4.2 ([14]) Let u be a non-zero bounded analytic function on $\mathbb{D}$ and φ a non-constant analytic self-map of $\mathbb{D}$. If w be a non-constant inner function, then the following are equivalent.

(i) C_φ is M_w-Toeplitz.

(ii) $M_u C_\varphi$ is M_w-Toeplitz.

(iii) φ is inner and $C_\varphi w = w$.

All in the following References is not cited in the text.

参考文献

[1] J. Barría, On asymptotic Toeplitz operators, Acta Sci. Math. (Szeged) 51 (1987), no. 3-4, 435–440.

[2] J. Barría and P. R. Halmos, Asymptotic Toeplitz operators, Trans. Amer. Math. Soc. 273 (1982), no. 2, 621–630.

[3] J.H. Clifford and D. Zheng, Composition operators on the Hardy space, Indiana Univ. Math. J. 48 (1999), no. 4, 1585–1616.

[4] C. C. Cowen and B. D. MacCluer, Composition Operators on Spaces of Analytic Functions, CRC Press, Boca Raton, 1995.

[5] Ž. Čučković and T. Le, Toeplitzness of composition operators in several variables, Complex Var. Elliptic Equ. 59 (2014), no. 10, 1351–1362.

[6] Ž. Čučković and M. Nikpour, On the Toeplitzness of the adjoint of composition operators, J. Math. Anal. Appl. 408 (2013), no. 2, 541–546.

[7] N. Das, Asymptotic Toeplitz and Hankel operators on the Bergman space, Indian J. Pure Appl. Math. 41 (2010), no. 2, 379–400.

[8] N. Das and P.K. Jena, Asymptotic properties of composition operators on the Bergman space, New Zealand J. Math. 39 (2009), 215–239.

[9] N. Das and M. Sahoo, On asymptotic properties of Toeplitz operators, Vietnam J. Math. 38 (2010), no. 4, 381–393.

[10] R.G. Douglas, Banach Algebra Techniques in Operator Theory, Pure and Applied Mathematics, Vol. 49. Academic Press, New York-London, 1972: Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 179. Springer-Verlag, New York, 1998.

[11] C. Duna, M. Gagne, C. Gu and J. Shapiro, Toeplitzness of composition operators and their adjoints, J. Math. Anal. Appl. **410** (2014), 577–584.

[12] P. L. Duren, Theory of H^p Spaces, Academic Press, New York, 1970; Dover, New York, 2000.

[13] A. Feintuch, On asymptotic Toeplitz and Hankel operators, The Gohberg anniversary collection, Vol. II (Calgary, AB, 1988), 241–254, Oper. Theory Adv. Appl., 41, Birkhauser, Basel, 1989.

[14] S. Jung and E. Ko, On T_u-Toeplitzness of weighted composition operators on H^2, Complex Var. Elliptic Equ. 60 (2015), no. 11, 1522–1538.

[15] R.A. Martinez-Avendano and P. Rosenthal, An Introduction to Operators on the Hardy-Hilbert Space, Graduate Texts in Mathematics, 237. Springer, New York, 2007.

[16] V. Matache, S-Toeplitz composition operators, Complex and harmonic analysis, 189–204, DEStech Publ., Inc., Lancaster, PA, 2007.

[17] F. Nazarov and J. H. Shapiro, On the Toeplitzness of composition operators, Complex Var. Elliptic Equ. 52 (2007), no. 2-3, 193–210.

[18] M. Nikpour, Toeplitzness of Composition Operators and Parametric Toeplitzness, Thesis (Ph.D.). The University of Toledo. 2012.

[19] W. Rudin, Real and Complex Analysis, Third edition, McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.

[20] J. H. Shapiro, Composition Operators and Classical Function Theory, Springer-Verlag, New York, 1993.

[21] J. H. Shapiro, Every composition operator is (mean) asymptotically Toeplitz, J. Math. Anal. Appl. 333 (2007), no. 1, 523–529.

[22] J. H. Shapiro, Composition operators ♡ Toeplitz operators, Five lectures in complex analysis, 117–139, Contemp. Math., 525, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010.

[23] B. Shayya, The WAT conjecture on the torus, Proc. Amer. Math. Soc. 139 (2011), no. 10, 3633–3643.

[24] M. Yamada, Distance formulas of asymptotic Toeplitz and Hankel operators, Math. Japon. 39 (1994), no. 3, 429–435.

[25] K. Zhu, Operator Theory on Function Spaces, Marcel Dekker, New York, 1990 ; Second Edition, Amer. Math. Soc., Providence, 2007.

Weighted composition operators whose ranges contain the disk algebra II

新潟大学・自然科学系　　泉池　敬司 (Keiji Izuchi)

1 Introduction

Let $\mathbb{D}$ be the open unit disk. We denote by $H(\mathbb{D})$ the space of all analytic functions on $\mathbb{D}$. We denote by $\mathcal{S}$ the set of analytic self-maps of $\mathbb{D}$. For each $\varphi \in \mathcal{S}$ and $u \in H(\mathbb{D})$, we may defined the weighted composition operator $M_u C_\varphi$ on $H(\mathbb{D})$ by $(M_u C_\varphi)f = u(f \circ \varphi)$ for $f \in H(\mathbb{D})$. For a subset E of $H(\mathbb{D})$, write $(M_u C_\varphi)(E) = \{(M_u C_\varphi)f : f \in E\}$. There are a lot of studies of (weighted) composition operators on various space of analytic functions, see [1, 5].

We denote by $A(\overline{\mathbb{D}})$ the disk algebra, i.e., the space of functions in $H(\mathbb{D})$ which can be extended continuously on $\overline{\mathbb{D}}$ (see [3]). We denote by H^∞ the space of bounded analytic functions on $\mathbb{D}$. Let $\mathrm{Aut}\,(\mathbb{D})$ be the set of automorphisms of $\mathbb{D}$. For finitely many $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_\ell$ in $\mathcal{S}$ and $u_1, u_2, \cdots, u_\ell$ in $H(\mathbb{D})$, in the previous paper [4, Theorem 2.1] the authors proved that if $A(\overline{\mathbb{D}}) \subset \bigcup_{n=1}^{\ell}(M_{u_n} C_{\varphi_n})(H(\mathbb{D}))$, then $\varphi_k \in \mathrm{Aut}\,(\mathbb{D})$ and $Z(u_k) = \emptyset$ for some $1 \le k \le \ell$, where $Z(u_k)$ denotes the zero set of u_k in $\mathbb{D}$. Moreover, for sequences $\{\varphi_n\}_{n\ge1}$ in $\mathcal{S}$ and $\{u_n\}_{n\ge1}$ in $H(\mathbb{D})$, if $H^\infty \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(M_{u_n} C_{\varphi_n})(H(\mathbb{D}))$, then $\varphi_k \in \mathrm{Aut}\,(\mathbb{D})$ and $Z(u_k) = \emptyset$ for some $k \ge 1$. We have a conjecture that for sequences $\{\varphi_n\}_{n\ge1}$ in $\mathcal{S}$ and $\{u_n\}_{n\ge1}$ in $H(\mathbb{D})$, if $A(\overline{\mathbb{D}}) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(M_{u_n} C_{\varphi_n})(H(\mathbb{D}))$, then $\varphi_k \in \mathrm{Aut}\,(\mathbb{D})$ and $Z(u_k) = \emptyset$ for some $k \ge 1$. At this moment, we can not prove this.

For $0 < p < \infty$, let A^p, the Bergman space, be the space of functions f in $H(\mathbb{D})$ satisfying that

$$\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \, dA(z) < \infty,$$

where dA is the normalized area measure on $\mathbb{D}$. It is well known that $C_\varphi(A^p) \subset A^p$. Applying the Baire category theorem we shall prove that if

$$A(\overline{\mathbb{D}}) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} C_{\varphi_n}\Big(\bigcup_{0<p<\infty} A^p \Big),$$

Then $\varphi_k \in \mathrm{Aut}\,(\mathbb{D})$ for some $k \ge 1$.

2 Weighted Bergman spaces

We study under more general setting. Let ω be a positive continuous function on $\mathbb{D}$ satisfying that

$$(\alpha) \qquad \omega(z) \to 0 \text{ as } |z| \to 1.$$

For $f \in H(\mathbb{D})$, let denote

$$\|f\|_\omega = \sup_{z \in \mathbb{D}} \omega(z)|f(z)|.$$

Write

$$H(\omega) = \{f \in H(\mathbb{D}) : \|f\|_\omega < \infty\}.$$

Then $H(\omega)$ is a Banach space with the norm $\|\cdot\|_\omega$ and $A(\overline{\mathbb{D}}) \subset H(\omega)$. For each positive integer m, let

$$H_m(\omega) = \{f \in H(\omega) : \|f\|_\omega \le m\}.$$

We have $H(\omega) = \bigcup_{m=1}^\infty H_m(\omega)$.

Lemma 2.1. *$C_\varphi(H_m(\omega)) \cap A(\overline{\mathbb{D}})$ is closed in $A(\overline{\mathbb{D}})$.*

Proof. Let $\{f_j\}_{j \ge 1}$ be a sequence in $C_\varphi(H_m(\omega)) \cap A(\overline{\mathbb{D}})$ such that $f_j \to f_0$ in $A(\overline{\mathbb{D}})$ as $j \to \infty$. For each $j \ge 1$, there is $g_j \in H_m(\omega)$ such that $f_j = g_j \circ \varphi$. Since $\omega(z)|g_j(z)| \le m$ on $\mathbb{D}$ for every $j \ge 1$, by the normal family argument we may assume that $g_j \to g_0 \in H(\mathbb{D})$ uniformly on any compact subset of $\mathbb{D}$ as $j \to \infty$. Then we have $g_0 \in H_m(\omega)$ and $f_0 = g_0 \circ \varphi$, so $f_0 \in C_\varphi(H_m(\omega)) \cap A(\overline{\mathbb{D}})$. Thus we get the assertion. $\square$

Since $C_\varphi(H(\omega)) \cap A(\overline{\mathbb{D}})$ is a subspace of $A(\overline{\mathbb{D}})$ and $H(\omega) = \bigcup_{m \ge 1}^\infty H_m(\omega)$, we have the following.

Lemma 2.2. *If $C_\varphi(H_m(\omega)) \cap A(\overline{\mathbb{D}})$ contains a non-void open subset of $A(\overline{\mathbb{D}})$, then $A(\overline{\mathbb{D}}) \subset C_\varphi(H(\omega))$.*

Proof. Take a non-void open subset U of $A(\overline{\mathbb{D}})$ satisfying

$$U \subset C_\varphi(H_m(\omega)) \cap A(\overline{\mathbb{D}}).$$

Fix $f_0 \in U$. There is $g_0 \in H_m(\omega)$ such that $f_0 = g_0 \circ \varphi$. Take $f \in A(\overline{\mathbb{D}})$ arbitrary. We have

$$f_0 + \varepsilon f \in U \subset C_\varphi(H_m(\omega)) \cap A(\overline{\mathbb{D}})$$

for some $\varepsilon > 0$. Then there is $h \in H_m(\omega)$ such that $f_0 + \varepsilon f = h \circ \varphi$. Since $(h - g_0)/\varepsilon \in H(\omega)$, we have

$$f = \frac{(h - g_0) \circ \varphi}{\varepsilon} \in C_\varphi(H(\omega)).$$

Thus we get the assertion. $\square$

By [4, Theorem 1.1], we have the following.

Lemma 2.3. *If $A(\overline{\mathbb{D}}) \subset C_\varphi(H(\omega))$, then $\varphi \in \mathrm{Aut}\,(\mathbb{D})$.*

Theorem 2.4. *Let $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ be a sequence in $\mathcal{S}$ and $\{\omega_\ell\}_{\ell\geq 1}$ be a sequence of positive continuous functions on $\mathbb{D}$ satisfying condition (α). If*

$$A(\overline{\mathbb{D}}) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} C_{\varphi_n}\Big(\bigcup_{\ell=1}^{\infty} H(\omega_\ell)\Big),$$

then $\varphi_k \in \mathrm{Aut}\,(\mathbb{D})$ for some $k \geq 1$.

Proof. We may assume that φ_n is non-constant for every $n \geq 1$. We have

$$\bigcup_{\ell=1}^{\infty} H(\omega_\ell) = \bigcup_{\ell,m=1}^{\infty} H_m(\omega_\ell).$$

By the assumption,

$$A(\overline{\mathbb{D}}) = \bigcup_{n,\ell,m=1}^{\infty} C_{\varphi_n}(H_m(\omega_\ell)) \cap A(\overline{\mathbb{D}}).$$

By Lemma 2.1, $C_{\varphi_n}(H_m(\omega_\ell)) \cap A(\overline{\mathbb{D}})$ is closed in $A(\overline{\mathbb{D}})$ for every $n, \ell, m \geq 1$. By the Baire category theorem, $C_{\varphi_n}(H_m(\omega_\ell)) \cap A(\overline{\mathbb{D}})$ contains a non-void open subset of $A(\overline{\mathbb{D}})$ for some n, ℓ and m. By Lemma 2.2, $A(\overline{\mathbb{D}}) \subset C_{\varphi_n}(H(\omega_\ell))$. By Lemma 2.3, we have $\varphi \in \mathrm{Aut}\,(\mathbb{D})$. □

For $0 < p < \infty$ and $-1 < \alpha < \infty$, the weighted Bergman space A^p_α is the space of $f \in H(\mathbb{D})$ satisfying that

$$\|f\|_{p,\alpha} := \Big(\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \, dA_\alpha(z)\Big)^{1/p},$$

where

$$dA_\alpha(z) = (\alpha + 1)(1 - |z|^2)^\alpha \, dA(z)$$

(see [2, p. 2]). We have $A^p_0 = A^p$,

$$A^p_{\alpha_1} \subset A^p_{\alpha_2} \quad \text{if } -1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \infty$$

and

$$A^{p_1}_\alpha \supset A^{p_2}_\alpha \quad \text{if } 0 < p_1 < p_2 < \infty.$$

Then

$$\bigcup_{0<p<\infty} A^p_\alpha = \bigcup_{\ell=1}^{\infty} A^{1/\ell}_\alpha \quad \text{and} \quad \bigcup_{-1<\alpha<\infty} A^p_\alpha = \bigcup_{k=1}^{\infty} A^p_k.$$

Hence

$$\bigcup_{0<p<\infty, -1<\alpha<\infty} A^p_\alpha = \bigcup_{\ell,k=1}^{\infty} A^{1/\ell}_k.$$

For $f \in A^p_\alpha$, we have

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} (1 - |z|^2)^{\frac{2+\alpha}{p}} |f(z)| \leq \|f\|_{p,\alpha} < \infty$$

(see [2, p. 53]). Set $\omega_{p,\alpha}(z) = (1-|z|^2)^{(2+\alpha)/p}$. Then $A^p_\alpha \subset H(\omega_{p,\alpha})$ and

$$\bigcup_{0<p<\infty, -1<\alpha<\infty} A^p_\alpha \subset \bigcup_{\ell,k}^{\infty} H(\omega_{1/\ell,k}).$$

So by Theorem 2.4, we have the following.

Corollary 2.5. *Let* $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ *be a sequence in* $\mathcal{S}$. *If*

$$A(\overline{\mathbb{D}}) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} C_{\varphi_n}\Big(\bigcup_{0<p<\infty, -1<\alpha<\infty} A^p_\alpha\Big),$$

then $\varphi_k \in \mathrm{Aut}\,(\mathbb{D})$ *for some* $k \geq 1$.

For $0 < p < \infty$, let H^p be the space of functions f in $H(\mathbb{D})$ satisfying that

$$\sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi} < \infty.$$

The space H^p is call the Hardy space. Since $H^p \subset A^p$, we have the following.

Corollary 2.6. *Let* $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ *be a sequence in* $\mathcal{S}$. *If*

$$A(\overline{\mathbb{D}}) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} C_{\varphi_n}\Big(\bigcup_{0<p<\infty} H^p\Big),$$

then $\varphi_k \in \mathrm{Aut}\,(\mathbb{D})$ *for some* $k \geq 1$.

References

[1] C. Cowen and B. MacCluer, Composition Operators on Spaces of Analytic Functions, CRC Press, Boca Raton, 1995.

[2] H. Hedenmalm, B. Korenblum and K. Zhu, Theory of Bergman Spaces, Springer, New York, 2000.

[3] K. Hoffman, Banach Spaces of Analytic Functions, Prentice Hall, New Jersey, 1962.

[4] K. J. Izuchi, K. H. Izuchi and Y. Izuchi, Weighted composition operators whose ranges contain the disk algebra, Complex Var. Elliptic Equ. 60 (2015), 938–944.

[5] J. Shapiro, Composition Operators and Classical Function Theory, Springer-Verlag, New York, 1993.

$C^1[0,1]$ 上の全射実線形等距離写像について

米子工業高等専門学校　　古清水 大直 (Hironao Koshimizu)

Banach-Stone の定理 (1930 年代) を発端として, 様々な関数空間において全射複素線形等距離写像の形を決定する問題の研究がされてきた. また, 線形性を仮定しない全射等距離写像について, Mazur-Ulam の定理 (1932 年) は, 全射**実線形**等距離写像が本質であることを述べている. 1990 年に Ellis([2]) が関数環上の全射実線形等距離写像について扱っているが, まだまだ複素線形空間上の実線形等距離写像について知られていることは少ないと思われる. ここでは, 閉区間 $[0,1]$ 上の連続微分可能関数全体の空間における全射実線形等距離写像について考える.

1 Banach-Stone の定理と Mazur-Ulam の定理

X をコンパクト Hausdorff 空間とし, $C(X)$ を X 上の複素数値連続関数全体の Banach 空間とする. ただし, ノルムは sup ノルム

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in X\} \qquad (f \in C(X))$$

で与えられる. $C(X)$ 上の全射複素線形等距離写像は, 次の Banach-Stone の定理によって特徴づけられる.

Banach-Stone の定理. X をコンパクト Hausdorff 空間とする. このとき, $C(X)$ から $C(X)$ への全射複素線形等距離写像 T は, X から X の上への同相写像 φ と, $|w(x)| = 1\,(x \in X)$ となる連続関数 w を用いて,

$$(Tf)(x) = w(x)f(\varphi(x)) \qquad (x \in X,\ f \in C(X))$$

と表せる.

この定理を皮切りにして, 様々な関数空間上の全射複素線形等距離写像の特徴づけがなされている ([3]). ノルム空間上においては全射複素線形等距離写像については線形性を仮定しなくても線形性が導かれる. これは等距離性が線形性を導くことを述べた重要な事実である. それが次の Mazur-Ulam の定理である.

Mazur-Ulam の定理. N, M をノルム空間とし, T を N から M への全射等距離写像とする. このとき, $T - T0$ は N から M への全射**実線形**等距離写像になる.

この Mazur-Ulam の定理より, 全射等距離写像の本質は全射実線形等距離写像であることが分かる. そのため全射等距離写像の形を決定することは, 全射実線形等距離写像の形を決定することに帰着できる.

2　全射実線形等距離写像

まず, 全射実線形等距離写像について, $C(X)$ の部分空間について知られていることを述べる.

A を $C(X)$ の複素線形部分空間とし, ノルムは $C(X)$ と同じ sup ノルムを入れるものとする. A^* を A の共役空間とし, $x \in X$ に対して, $e_x \in A^*$ を $e_x(f) = f(x) \quad (f \in A)$ と定義する. また, A の Choquet 境界 $\mathrm{Ch}(A)$ を $\mathrm{Ch}(A) = \{x \in X : e_x$ は A^* の単位球の端点 $\}$ と定義する.

また, 分離条件のような関数空間に含まれる関数の種類の多さを示す条件を与える. 任意の相異なる 3 点 $x, y, z \in X$ に対して, $|f(x)| \neq |f(y)|$ かつ $f(z) = 0$ となる $f \in A$ が存在するとき, A を *strongly* 0-*separating* であるという. これを満たすような関数空間の例として, X 上の関数環や単位円周 $\mathbb{T}$ 上の 2 次多項式全体 $\{az^2 + bz + c \in C(\mathbb{T}) : a, b, c \in \mathbb{C}\}$ などがある.

$C(X)$ の部分空間における全射実線形等距離写像は, 次のように特徴づけられることが知られている ([7]).

定理 A. A を $C(X)$ の複素線形部分空間, strongly 0-separating とする. このとき, A から A への全射実線形等距離写像 T は, $\mathrm{Ch}(A)$ の開かつ閉集合 K と $\mathrm{Ch}(A)$ から $\mathrm{Ch}(A)$ の上への同相写像 φ と $|w(x)| = 1\,(x \in \mathrm{Ch}(A))$ となる連続関数 w を用いて,

$$(Tf)(x) = \begin{cases} w(x)f(\varphi(x)) & x \in K \\ \overline{w(x)f(\varphi(x))} & x \in \mathrm{Ch}(A) \setminus K \end{cases} \qquad (f \in C(X))$$

と表せる.

また, $\mathrm{Ch}(C(X)) = X$ だから, 定理 A により次がただちに導かれる.

系 B. $C(X)$ から $C(X)$ への全射実線形等距離写像 T は, X の開かつ閉集合 K と X から X の上への同相写像 φ と $|w(x)| = 1\,(x \in X)$ となる連続関数 w を用いて,

$$(Tf)(x) = \begin{cases} w(x)f(\varphi(x)) & x \in K \\ \overline{w(x)f(\varphi(x))} & x \in X \setminus K \end{cases} \qquad (f \in C(X))$$

と表せる.

さて, 次は具体的な関数空間上の全射実線形等距離写像を決定する問題を考える. 任意のノルム空間は $C(X)$ の部分空間として埋め込むことが可能であるので, 定理 A は等距離写像を決定する上では非常に有効であることが分かる.

ここでは, 閉区間 $[0,1]$ 上の連続微分可能関数全体の集合 $C^1[0,1]$ について考える. $C^1[0,1]$ は $[0,1]$ の各点での和・スカラー積に関して線形空間になる. 線形空間 $C^1[0,1]$ には, ノルムがいくつか考えられるが, ここでは次の 4 つのノルムを取り上げる.

$$\begin{aligned} \|f\|_C &= \sup\{|f(x)| + |f'(x)| : x \in [0,1]\} \\ \|f\|_\Sigma &= \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \\ \|f\|_\sigma &= |f(0)| + \|f'\|_\infty \\ \|f\|_m &= \max\{|f(0)|, \|f'\|_\infty\} \end{aligned} \qquad (f \in C^1[0,1])$$

これらのノルムにおける $C^1[0,1]$ 上の全射複素線形等距離写像は明らかになっている ([1, 4, 10, 5, 6]). 一方, 全射実線形等距離写像の形は次のようになる ([9]).

定理 C. T を $(C^1[0,1], \|\cdot\|_C)$ から $(C^1[0,1], \|\cdot\|_C)$ への全射実線形等距離写像または $(C^1[0,1], \|\cdot\|_\Sigma)$ から $(C^1[0,1], \|\cdot\|_\Sigma)$ への全射実線形等距離写像とする. このとき, $|\lambda| = 1$ となる定数 λ を用いて,

$$(Tf)(x) = \lambda f(x) \quad (x \in [0,1], f \in C^1[0,1])$$

または

$$(Tf)(x) = \lambda f(1-x) \quad (x \in [0,1], f \in C^1[0,1])$$

または

$$(Tf)(x) = \overline{\lambda f(x)} \quad (x \in [0,1], f \in C^1[0,1])$$

または

$$(Tf)(x) = \overline{\lambda f(1-x)} \quad (x \in [0,1], f \in C^1[0,1])$$

と表せる.

また, 上記の定理 C の証明方法を利用することやある $C(X)$ と等長同型であることと系 B を利用して, 次の定理が成り立つことが分かった ($\|\cdot\|_m$ については [8] を参照).

定理 1. T を $(C^1[0,1], \|\cdot\|_\sigma)$ から $(C^1[0,1], \|\cdot\|_\sigma)$ への全射実線形等距離写像または $(C^1[0,1], \|\cdot\|_m)$ から $(C^1[0,1], \|\cdot\|_m)$ への全射実線形等距離写像とする. このとき, $[0,1]$ から $[0,1]$ の上への同相写像 φ と $|w(t)| = 1\,(t \in [0,1])$ となる連続関数 w と $|\lambda| = 1$ となる定数 λ を用いて,

$$(Tf)(x) = \lambda f(0) + \int_0^x w(t) f'(\varphi(t))\, dt \quad (t \in [0,1], f \in C^1[0,1])$$

または

$$(Tf)(x) = \overline{\lambda f(0)} + \int_0^x w(t) f'(\varphi(t))\, dt \quad (x \in [0,1], f \in C^1[0,1])$$

または

$$(Tf)(x) = \lambda f(0) + \int_0^x \overline{w(t) f'(\varphi(t))}\, dt \quad (x \in [0,1], f \in C^1[0,1])$$

または

$$(Tf)(x) = \overline{\lambda f(0)} + \int_0^x \overline{w(t) f'(\varphi(t))}\, dt \quad (x \in [0,1], f \in C^1[0,1])$$

と表せる.

参考文献

[1] M. Cambern, *Isometries of certain Banach algebras*, Studia Math., **25** (1965), 217–225.

[2] A.J. Ellis, *Real characterizations of function algebras amongst function spaces*, Bull. London Math. Soc., **22** (1990), 381–385.

[3] R.J. Fleming and J.E. Jamison, *Isometries on Banach spaces : function spaces*, Chapman & Hall/CRC Monographs and Surveys in pure and Applied Mathematics, 2003.

[4] K. Jarosz and V.D. Pathak, *Isometries between function spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **305** (1988), 193–206.

[5] H. Koshimizu, *Finite codimensional linear isometries on spaces of differentiable and Lipschitz functions*, Cent. Eur. J. Math., **9** (2011), 139–146.

[6] H .Koshimizu, *Linear isometries on spaces of continuously differentiable and Lipschitz continuous functions*, Nihonkai Math. J., **22** (2011), 73–90.

[7] H. Koshimizu, T. Miura, H. Takagi and S.-E. Takahasi, *Real-linear isometries between subspaces of continuous functions*, J. Math. Anal. Appl., **413** (2014), 229–241.

[8] T. Miura, *Surjective isometries between function spaces*, Contemp. Math., **645** (2015), 231–239.

[9] T. Miura, *Surjective isometries on the Banach space of continuously differentiable functions*, preprint.

[10] N.V. Rao and A.K. Roy, *Linear isometries of some function spaces*, Pacific J. Math., **35** (1971), 177–192.

重み付きハーディー空間の乗法作用素について

札幌静修高等学校　　桑原　修平 (Shuhei Kuwahara)

$H^2_\omega(\mathbf{D}^2)$ を bidisk 上の重み付きハーディー空間とする。具体例としては、Bergman space や Dirichlet space 等があげられる。具体的には、bidisk 上の解析関数

$$f(z,w)=\sum_\alpha a_{(n_1,n_2)}z^{n_1}w^{n_2}$$

で，ノルムが次の式で定まるものの集合をいう。

$$\|f\|^2=\sum_{(n_1,n_2)}\omega_{(n_1,n_2)}|a_{(n_1,n_2)}|^2<\infty.$$

昨年の関数環研究集会においては，かけ算作用素 $M_{z^{n_1}}$ と $M_{w^{n_2}}$ の両方の Reducing subspaces を決定するという話題についてお話した。

1　$M_{z^{k_1}}$ と $M_{w^{k_2}}$ の Reducing Subspaces

一般に，Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の作用素 T と閉部分空間 $\mathcal{M}$ に対して，$\mathcal{M}$ が T で不変であるとは，$T\mathcal{M}\subset\mathcal{M}$ であることをいう。また，$\mathcal{M}$ が T の *reducing subspace* であるとは，$\mathcal{M}$ が T で不変かつ T^* で不変であることをいう。

2002 年の Stessin と Zhu の論文 [6] では，Hilbert 空間として，単位円板上の解析関数 $f(z)=\sum_{n=0}^\infty a_nz^n$ で

$$\|f\|^2=\sum_{n=0}^\infty|a_n|^2\omega_n<\infty$$

満たす重み付き Hardy 空間 $H^2_\omega(\mathbb{D})$ について考察している。ここで $\{\omega_n\}$ は正数列であり，座標関数 z によるかけ算作用素 M_z が有界になるようにあらかじめ固定しておく。さらにここでは，固定した自然数 $N>1$ に対して，$0\le m,n\le N-1$ が

$$\frac{\omega_{m+kN}}{\omega_m}\neq\frac{\omega_{n+kN}}{\omega_n}\ for\ \forall k>0 \tag{1}$$

を満たすような重みを考える。例えば，$\omega_n=n+1$ とおけば，Dirichlet 空間であり，$\omega_n=(n+1)^{-1}$ とおけば，Bergman 空間であり，この条件を満たす。定理 1 は [6] の結果である。

定理 1. $T = M_z^N$ **の minimal reducing subspace は，**

$$X_n = \mathrm{Span}\{z^{n+kN}; k = 0, 1, 2, \ldots\}\ (n = 0, 1, 2, \ldots, N-1)$$

で与えられる。ここで Span は closed linear span の意味である。また，reducing subspace は X_n **の直和によって生成される。**

重みが条件 (1) を満たさない場合は，minimal reducing subspace が無数に存在し，reducing subspace はそれらの直和で書かれることがわかっている [6]。

自然数 $N_1 > 1, N_2 > 1$ を固定する。昨年度の報告では，座標関数 z, w のかけ算作用素 M_z, M_w に対して，$S_1 = M_z^{N_1}, S_2 = M_w^{N_2}$ の reducing subspace の決定について考えた。まず，多重指数の集合

$$I = \{(\alpha_1, \alpha_2); 0 \leq \alpha_1 \leq N_1 - 1, 0 \leq \alpha_2 \leq N_2 - 1\}$$

を考える。この集合に同値関係 $\sim$ を，$(m_1, m_2) \sim (n_1, n_2) \Longleftrightarrow$

$$\frac{\omega_{m_1+k_1N_1\ m_2+k_2N_2}}{\omega_{m_1\ m_2}} = \frac{\omega_{n_1+k_1N_1\ n_2+k_2N_2}}{\omega_{n_1\ n_2}}\ for\ \forall k_1, k_2 = 0, 1, 2, \ldots$$

で定義できる。この同値関係により I を同値類に分類できる。

多項式 $p(z, w) = \displaystyle\sum_{(\alpha_1,\alpha_2)\in I} a_{(\alpha_1,\alpha_2)} z^{\alpha_1} w^{\alpha_2}$ が *transparent* であるとは，0 でない係数 $a_{(m_1,m_2)}, a_{(n_1,n_2)}$ について，$(m_1, m_2) \sim (n_1, n_2)$ が成り立つことをいう。

補題 2. **多項式** $p(z, w)$ **が transparent ならば，**p **を含む最小の reducing subspace**X_p **は**

$$\mathrm{Span}\{p(z, w) z^{k_1N_1} w^{k_2N_2}; k_1, k_2 = 0, 1, 2, \ldots\}$$

に一致する。

命題 3. X **を reducing subspace とする。**X **の元** $g(z, w)$ **について，**$g^{(\alpha_1,\alpha_2)}(0, 0) \neq 0$ **を満足する指数** (α_1, α_2) **で最小のものを** (m_1, m_2) **とする。極値問題**

$$\sup\{\mathrm{Re} f^{(m_1,m_2)}(0, 0); f \in X, \|f\| \leq 1\}$$

は一意解をもち，その解は多項式 $G(z, w) = \sum_{\alpha\in I} a_\alpha (z, w)^\alpha$ **である。**

命題 4. X **を reducing subspace とする。命題 3 における極値問題の解は transparent である。**

命題 5. **多項式** p **が transparent であり，reducing subspace**Y **が** $Y \subset X_p$ **を満たすならば，**$Y = \{0\}$ **または** $Y = X_p$ **である。**

定理 6. reducing subspace は N_1N_2 個を超えない transparent な多項式から生成される。
（証明の概略）X を reducing subspace とする。命題 3 より，極値問題の解 G が存在する。命題 4 により，G は transparent である。G で生成される reducing subspaceX_G は命題 5 により，minimal である。新たな reducing subspace$X \ominus X_G$ を考える。これを X_1 とおく。X の元 $g(z,w)$ について，$g^{(\alpha_1,\alpha_2)}(0,0) \neq 0$ を満足する指数 (α_1,α_2) で最小のものを (m_1,m_2) とする。$z^{m_1}w^{m_2}$ は X の元であるが，$X_1 = X \ominus X_G$ の元でないことに注意する。$X_1 = X \ominus X_G$ の元 $g(z,w)$ について，$g^{(\alpha_1,\alpha_2)}(0,0) \neq 0$ を満足する指数 (α_1,α_2) で最小のものを (m_1',m_2') としたとき，$(m_1,m_2) < (m_1',m_2')$ であることがわかる。次に X_1 の極値問題を考え，その解を G_1 とする。そして，新たな reducing subspace$X_2 = X \ominus X_{G_1}$ を考える。このように「極値問題の解で生成される reducing subspace の直交補空間を考える操作」を直交補空間が $\{0\}$ になるまで繰り返す。極値問題の解が

$$G(z,w) = \sum_{\alpha \in I} a_\alpha (z,w)^\alpha$$

の形の多項式であり，

$$I = \{(\alpha_1,\alpha_2); 0 \leq \alpha_1 \leq N_1 - 1, 0 \leq \alpha_2 \leq N_2 - 1\}$$

であることから，この「操作」は N_1N_2 回を超えないことが分かる。従って X は

$$X = \oplus\{X_G | G \text{ は } transparent \text{ な多項式 }\}$$

とかくことができる。

2　対称式のかけ算作用素

報告者は 1 章の手法を利用して，$M_{z^N w^N}$ の Reducing Subspace を決定した。この結果は，論文 [4],[5] に関連し，より一般的な関数空間に対して成り立つものである。

定理 7. (1) $M_{z^N w^N}$ の reducing subspaces は minimal reducing subspaceX_p を含む。ここで，$p(z,w)$ は重みに関するある条件を満たす関数 (transparent function) であり，この関数とこの作用素によって生成される部分空間を X_p とする。
(2)Reducing subspace$X$ が minimal である必要十分条件は transparent function
$p(z,w)$ が存在し，$X = X_p$ となることである。

Zhu は 2000 年の論文 [7] で，1 変数の Bergman 空間において，かけ算作用素 M_{z^2} について研究した。
命題 8. (1) かけ算作用素 M_{z^2} の minimal reducing subspace は偶関数のなす空間と奇関数のなす空間である。
(2) かけ算作用素 M_{z^2} と可換な作用素 T は，次の形で与えられる。

$$Tf = g_e f_e + \frac{g_o}{z} f_o$$

ここで，f_e と f_o はそれぞれ偶関数と奇関数であり，$f = f_e + f_o$ である。

2 変数の Bergman space$A_a^2(\mathbf{D}^2)$ は，M_{z+w} の reducing subspace[1], $[z-w]$（これらはそれぞれ，定数関数 1，関数 $z-w$ と M_{z+w} で生成される空間である。）に分解される。さらにこれらはそれぞれ対称式，交代式からなる空間である。

命題 9. $A_a^2(\mathbf{D}^2)$ 上の作用素 T が M_{z+w} と M_{z+w}^* の両方と可換であるための必要十分条件は，

$$Tf = T(1) \cdot f_s + T(z-w)\frac{f_a}{z-w}$$

とかけることである。ここで，$f = f_s + f_a, f_s \in [1], f_a \in [z-w]$ である。

論文 [1] によれば，実際には，$A_a^2(\mathbf{D}^2)$ 上の作用素 T が M_{z+w} と M_{z+w}^* の両方と可換であるものは複素数体の直積 $\mathbb{C}^2$ と同形であることが知られている。

参考文献

[1] H. Dan and H. Huang, Multiplication operators defined by a class of polynomials on $L_a^2(\mathbb{D}^2)$, Integr. Equ. Oper. Theory, **80**(2014), 581-601

[2] S. Kuwahara, *Reducing subspaces of weighted Hardy spaces on polydisks*, Nihonkai Math J. **25**(2014), 77-83

[3] S. Kuwahara, *Reducing subspaces of multiplication operators on weighted Hardy spaces over bidisk*, to appear in J. Math Soc. Japan.

[4] Y. Lu and X. Zhou, *Invariant subspaces and reducing subspaces of weighted Bergman space over bidisk*, J. Math. Soc. Japan, **62**(2010), 745-765

[5] Y. Shi and Y. Lu, *Reducing subspaces for Toeplitz operators on the polydisk*, Bull. Korean Math. Soc. **50**(2013), 687-696

[6] M. Stessin, K. Zhu, *Reducing subspaces of weighted shift operators*, Proc. Amer. Math. soc. **130**(2002), 2631-2639

[7] K. Zhu, *Reducing subspaces for a class of multiplication operators*, J. London. Math. soc. **62**(2000), 553-568

位数の小さいジャイロ群について

新潟大学自然科学系　　渡邉　恵一 (Keiichi Watanabe)

Abstract. 位数が 8 以下の有限 Bol loop は 1978 年までに決定されている. また, A. A. Ungar の gyrogroup は A_ℓ 性をもつ left Bol loop と同値である. 今回, 有限 Bol loop の形式の議論は用いず, magma の演算表と gyrogroup の議論により, 位数が 8 以下の gyrogroup の決定を確認した.

1　公理, 定義

定義. 空でない集合 G と写像 $G \times G \ni (a,b) \mapsto a \cdot b \in G$ の組 $(G,\cdot)$ を magma という.

定義. $(G,\cdot)$ を magma とする. 写像 $\phi : G \to G$ が $(G,\cdot)$ の自己同型であるとは,

(1) 全単射で

(2) $\phi(a \cdot b) = \phi(a) \cdot \phi(b) \quad (a, b \in G)$.

$(G,\cdot)$ の自己同型の全体を $\mathrm{Aut}(G,\cdot)$ と表す.

定義. magma $(G,\oplus)$ が gyrogroup であるとは

(G1) $\exists 0 \in G$ s.t. $0 \oplus a = a \oplus 0 = a \ (\forall a \in G)$

(G2) $\forall a \in G \, \exists \ominus a \in G$ s.t. $(\ominus a) \oplus a = a \oplus (\ominus a) = 0$

(G3) $\exists 1 \mathrm{gyr}[a,b]c \in G$ s.t. $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus \mathrm{gyr}[a,b]c$

(G4) $\mathrm{gyr}[a,b] \in \mathrm{Aut}(G,\oplus)$

(G5) $\mathrm{gyr}[a,b] = \mathrm{gyr}[a \oplus b, b]$

が $a, b, c \in G$ に対して満たされることである.

(G4) は詳しくは, $a, b \in G$ に対して

(1) $G \ni c \mapsto \mathrm{gyr}[a,b]c \in G$ は 1 対 1, onto

(2) $\mathrm{gyr}[a,b](c \oplus d) = \mathrm{gyr}[a,b]c \oplus \mathrm{gyr}[a,b]d \quad (c, d \in G)$.

gyrogroup $(G, \oplus)$ が gyrocommutative であるとは,

$$\text{(G6)} \quad a \oplus b = \mathrm{gyr}[a,b](b \oplus a)$$

が $a, b \in G$ に対して満たされることである.

例.

(1) Einstein gyrogroup

(2) Möbius gyrogroup

(3) unital C*-algebra A の正の可逆元全体 A_+^{-1}

定義. magma $(G, \cdot)$ が loop であるとは, 次が満たされることをいう:

(1) 単位元をもち,

(2) $\forall a, b \in G$ に対して 2 つの方程式

$$a \cdot x = b, \qquad y \cdot a = b$$

がそれぞれ唯一の解 $x, y \in G$ をもつ.

定理. gyrogroup は loop である.

実際,

$$a \oplus x = b, \qquad\qquad y \oplus a = b$$

の唯一の解はそれぞれ

$$x = \ominus a \oplus b, \qquad\qquad y = b \ominus \mathrm{gyr}[b,a]a$$

で与えられる. 証明は Ungar の本 [U] の第 2 章を参照されたい.

系. (cancellations)

$$a \oplus b = a \oplus c \quad \Rightarrow \quad b = c$$

$$a \oplus c = b \oplus c \quad \Rightarrow \quad a = b$$

2 gyrogroup の１元が生成する巡回群

これは [U] の第 2 章に書いてあることから容易に分かる．また [SW] にも述べられている．

左ジャイロ結合法則 (G3) と cancellation より

$$0 \oplus (a \oplus b) = (0 \oplus a) \oplus \mathrm{gyr}[0, a]b$$

$$a \oplus b = a \oplus \mathrm{gyr}[0, a]b$$

$$\therefore b = \mathrm{gyr}[0, a]b.$$

左ループ性より

$$\cdots = \mathrm{gyr}[\ominus a, a] = \mathrm{gyr}[0, a] = I = \mathrm{gyr}[a, a] = \mathrm{gyr}[a \oplus a, a] = \cdots$$

が成り立つ．ここで I は恒等写像である．$a \in G$ を任意の元とすると

$$a \oplus (a \oplus a) = (a \oplus a) \oplus \mathrm{gyr}[a, a]a = (a \oplus a) \oplus a.$$

同様にして $a \oplus \cdots \oplus a$ は演算の順序によらないことが分かり，$na \ (n \in \mathbb{Z})$ が定義され，次のいずれか一方だけが起きる．

(1) $0,\ a,\ 2a,\ 3a,\ \cdots$ のすべてが相異なる

(2) $na = 0$ となる自然数 n がある

(2) の場合，そのような最小の自然数 n を a の位数と呼ぶ．このとき

$$0,\ a,\ 2a,\ \cdots,\ (n-1)a$$

は互いに相異なる．もう少しの考察で次が分かる．

命題. $\{na;\, n \in \mathbb{Z}\}$ は巡回群．$\mathrm{gyr}[na, ma] = I \ \ (n, m \in \mathbb{Z})$.

3 gyrogroup とある種の loop の関係，また Lagrange の定理

gyrogroup は A_ℓ 性をもつ left Bol loop である．これも [U] の第 2 章に書いてあることから容易に分かる．その逆も成り立つことが知られている．いろいろな文献において，その同値性は [SSS] によるとされているが，loop よりの表現で書かれているためか，[U] を読みかけの立場からは分かりやすいとはいえない．[A] の記述は分かりやすく，gyrocommutative gyrogroup と K-loop の同値性について述べているが，そこから gyrocommutative と限らない場合を導くことは容易である．ここでは結果だけを述べ，詳細は省略する．

命題. gyrogroup は left Bol loop である．すなわち

$$a \oplus \big(b \oplus (a \oplus c)\big) = \big(a \oplus (b \oplus a)\big) \oplus c \quad (a, b, c \in G)$$

が成り立つ.

命題. gyrogroup は A_ℓ-loop である．すなわち, $\lambda_a(x) = a \oplus x$ とすると

$$\lambda_{a \oplus b}{}^{-1} \lambda_a \lambda_b$$

が G の自己同型となる.

定理. (Sabinin, Sabinina, Sbitneva. また, Abe.) gyrogroup であることと A_ℓ 性をもつ left Bol loop であることは同値.

定義. $(G, \oplus)$ を gyrogroup とする．$G \supset H$ が subgyrogroup であるとは,

$$\begin{aligned} &(1) \quad a, b \in H \quad \Rightarrow \quad a \oplus b \in H \\ &(2) \quad \quad a \in H \quad \Rightarrow \quad \ominus a \in H \end{aligned}$$

定理. (Suksumran and Wiboonton) $(G, \oplus)$ を有限個の元からなる gyrogroup とする．H が G の subgyrogroup ならば, $|H|$ は $|G|$ を割り切る.

注意. 位数 5 の loop で位数 2 の subloop をもつものが存在する.

系. G が有限 gyrogroup で $a \in G$ ならば, a の位数は $|G|$ を割り切る.

系. (Burn) G が gyrogroup で $|G|$ が素数ならば, G は巡回群.

4 位数が 8 以下の gyrogroup の決定について

$|G| = 2, 3, 5, 7$ ならば巡回群のみ.

$|G| = 4$ ならば C_4 と $C_2 \times C_2$.

$|G| = 6$ ならば C_6, $C_3 \times C_2$ と 3 次対称群 $\mathfrak{S}_3$.

$|G| = 8$ ならば, 群は C_8, $C_4 \times C_2$, $C_2 \times C_2 \times C_2$, 二面体群 D_8 と四元数群 Q_8 であり, 群でない gyrogroup は次の定理の通り.

定理. (Burn) 位数 8 の gyrogroup で群でないものの同型類はちょうど 6 つである．具体的には以下の $\Pi_1 \sim \Pi_6$.

Π_1 (gyrocommutative でない)

	0	a	$2a$	$3a$	b	$a \oplus b$	$2a \oplus b$	$3a \oplus b$
0	0	a	$2a$	$3a$	b	$a \oplus b$	$2a \oplus b$	$3a \oplus b$
a	a	$2a$	$3a$	0	$a \oplus b$	$2a \oplus b$	$3a \oplus b$	b
$2a$	$2a$	$3a$	0	a	$2a \oplus b$	$3a \oplus b$	b	$a \oplus b$
$3a$	$3a$	0	a	$2a$	$3a \oplus b$	b	$a \oplus b$	$2a \oplus b$
b	b	$a \oplus b$	$2a \oplus b$	$3a \oplus b$	$2a$	$3a$	0	a
$a \oplus b$	$a \oplus b$	b	$3a \oplus b$	$2a \oplus b$	$3a$	$2a$	a	0
$2a \oplus b$	$2a \oplus b$	$3a \oplus b$	b	$a \oplus b$	0	a	$2a$	$3a$
$3a \oplus b$	$3a \oplus b$	$2a \oplus b$	$a \oplus b$	b	a	0	$3a$	$2a$

x	a	$2a$	$3a$	b	$a \oplus b$	$2a \oplus b$	$3a \oplus b$
τx	$3a$	$2a$	a	b	$3a \oplus b$	$2a \oplus b$	$a \oplus b$

Π_2 (gyrocommutative)

	0	a	$2a$	$3a$	b	$a \oplus b$	$2a \oplus b$	$3a \oplus b$
0	0	a	$2a$	$3a$	b	$a \oplus b$	$2a \oplus b$	$3a \oplus b$
a	a	$2a$	$3a$	0	$a \oplus b$	$2a \oplus b$	$3a \oplus b$	b
$2a$	$2a$	$3a$	0	a	$2a \oplus b$	$3a \oplus b$	b	$a \oplus b$
$3a$	$3a$	0	a	$2a$	$3a \oplus b$	b	$a \oplus b$	$2a \oplus b$
b	b	$a \oplus b$	$2a \oplus b$	$3a \oplus b$	$2a$	$3a$	0	a
$a \oplus b$	$a \oplus b$	b	$3a \oplus b$	$2a \oplus b$	a	0	$3a$	$2a$
$2a \oplus b$	$2a \oplus b$	$3a \oplus b$	b	$a \oplus b$	0	a	$2a$	$3a$
$3a \oplus b$	$3a \oplus b$	$2a \oplus b$	$a \oplus b$	b	$3a$	$2a$	a	0

x	a	$2a$	$3a$	b	$a \oplus b$	$2a \oplus b$	$3a \oplus b$
τx	$3a$	$2a$	a	$2a \oplus b$	$a \oplus b$	b	$3a \oplus b$

Π_3 (gyrocommutative)

	0	a	$2a$	$3a$	b	$a \oplus b$	$2a \oplus b$	$3a \oplus b$
0	0	a	$2a$	$3a$	b	$a \oplus b$	$2a \oplus b$	$3a \oplus b$
a	a	$2a$	$3a$	0	$a \oplus b$	$2a \oplus b$	$3a \oplus b$	b
$2a$	$2a$	$3a$	0	a	$2a \oplus b$	$3a \oplus b$	b	$a \oplus b$
$3a$	$3a$	0	a	$2a$	$3a \oplus b$	b	$a \oplus b$	$2a \oplus b$
b	b	$3a \oplus b$	$2a \oplus b$	$a \oplus b$	$2a$	a	0	$3a$
$a \oplus b$	$a \oplus b$	b	$3a \oplus b$	$2a \oplus b$	a	0	$3a$	$2a$
$2a \oplus b$	$2a \oplus b$	$a \oplus b$	b	$3a \oplus b$	0	$3a$	$2a$	a
$3a \oplus b$	$3a \oplus b$	$2a \oplus b$	$a \oplus b$	b	$3a$	$2a$	a	0

x	a	$2a$	$3a$	b	$a \oplus b$	$2a \oplus b$	$3a \oplus b$
τx	a	$2a$	$3a$	$2a \oplus b$	$3a \oplus b$	b	$a \oplus b$

Π_4 (gyrocommutative でない)

	0	a	$2a$	$3a$	b	$a \oplus b$	$2a \oplus b$	$3a \oplus b$
0	0	a	$2a$	$3a$	b	$a \oplus b$	$2a \oplus b$	$3a \oplus b$
a	a	$2a$	$3a$	0	$a \oplus b$	$2a \oplus b$	$3a \oplus b$	b
$2a$	$2a$	$3a$	0	a	$2a \oplus b$	$3a \oplus b$	b	$a \oplus b$
$3a$	$3a$	0	a	$2a$	$3a \oplus b$	b	$a \oplus b$	$2a \oplus b$
b	b	$a \oplus b$	$2a \oplus b$	$3a \oplus b$	0	a	$2a$	$3a$
$a \oplus b$	$a \oplus b$	$2a \oplus b$	$3a \oplus b$	b	$3a$	0	a	$2a$
$2a \oplus b$	$2a \oplus b$	$3a \oplus b$	b	$a \oplus b$	$2a$	$3a$	0	a
$3a \oplus b$	$3a \oplus b$	b	$a \oplus b$	$2a \oplus b$	a	$2a$	$3a$	0

x	a	$2a$	$3a$	b	$a \oplus b$	$2a \oplus b$	$3a \oplus b$
τx	a	$2a$	$3a$	$2a \oplus b$	$3a \oplus b$	b	$a \oplus b$

Π_5 (Zassenhaus' loop. gyrocommutative でない)

	0	a	$2a$	$3a$	b	$a \oplus b$	$2a \oplus b$	$3a \oplus b$
0	0	a	$2a$	$3a$	b	$a \oplus b$	$2a \oplus b$	$3a \oplus b$
a	a	$2a$	$3a$	0	$a \oplus b$	$2a \oplus b$	$3a \oplus b$	b
$2a$	$2a$	$3a$	0	a	$2a \oplus b$	$3a \oplus b$	b	$a \oplus b$
$3a$	$3a$	0	a	$2a$	$3a \oplus b$	b	$a \oplus b$	$2a \oplus b$
b	b	$a \oplus b$	$2a \oplus b$	$3a \oplus b$	0	a	$2a$	$3a$
$a \oplus b$	$a \oplus b$	b	$3a \oplus b$	$2a \oplus b$	a	0	$3a$	$2a$
$2a \oplus b$	$2a \oplus b$	$3a \oplus b$	b	$a \oplus b$	$2a$	$3a$	0	a
$3a \oplus b$	$3a \oplus b$	$2a \oplus b$	$a \oplus b$	b	$3a$	$2a$	a	0

x	a	$2a$	$3a$	b	$a \oplus b$	$2a \oplus b$	$3a \oplus b$
τx	$3a$	$2a$	a	b	$3a \oplus b$	$2a \oplus b$	$a \oplus b$

Π_6 と同型 (Robinson's loop. gyrocommutative)

	0	a	b	$a\oplus b$	c	$a\oplus c$	d	e
0	0	a	b	$a\oplus b$	c	$a\oplus c$	d	e
a	a	0	$a\oplus b$	b	$a\oplus c$	c	e	d
b	b	c	0	e	a	d	$a\oplus c$	$a\oplus b$
$a\oplus b$	$a\oplus b$	b	a	0	d	e	c	$a\oplus c$
c	c	$a\oplus c$	e	d	0	a	$a\oplus b$	b
$a\oplus c$	$a\oplus c$	$a\oplus b$	d	a	e	0	b	c
d	d	e	$a\oplus c$	c	$a\oplus b$	b	0	a
e	e	d	c	$a\oplus c$	b	$a\oplus b$	a	0

x	a	b	$a\oplus b$	c	$a\oplus c$	d	e
τx	e	b	c	$a\oplus b$	$a\oplus c$	d	a

ここで, τ の表は自明でないジャイロ自己同型を示している. それぞれ 1 つだけ現れる. どの x, y に対して $\mathrm{gyr}[x, y]$ が τ になるかは省略する.

今回, 定義通りに演算を調べてこれらの表が位数 8 の gyrogroup を定めること, どの 2 つも同型であると仮定すると矛盾が導かれること, また, 演算表を調べ尽くしてこれらと同型なもの以外に位数 8 の gyrogroup がないことを確認した. そのような作業は, 数式処理ソフトを用いることができれば, 相当大きい位数まで比較的容易になされてしまうことに注意した方が良いようである.

証明の概略. $(G, \oplus)$ が 8 個の元からなると仮定する. 第 2, 3 節のことから, どの元の位数も 8 の約数. 位数 8 の元がもしあれば巡回群なので, 単位元以外の元の位数は 2 か 4 としてよい. 位数 4 の元 a がある場合, $0, a, 2a, 3a$ は互いに異なり, 別の元のひとつを b とする. このとき

$$G = \{0, a, 2a, 3a, b, a\oplus b, 2a\oplus b, 3a\oplus b\}$$

としてよいこと, $\ominus b$ としてありうるのは $b, a\oplus b, 2a\oplus b, 3a\oplus b$ ということ, $b\oplus a$ としてありうるのは $a\oplus b, 2a\oplus b, 3a\oplus b$ ということ等が cancellations から分かる. 例えば $\ominus b = 2a\oplus b$ および $b\oplus a = a\oplus b$ の場合の表は

	0	a	$2a$	$3a$	b	$a\oplus b$	$2a\oplus b$	$3a\oplus b$
0	0	a	$2a$	$3a$	b	$a\oplus b$	$2a\oplus b$	$3a\oplus b$
a	a	$2a$	$3a$	0	$a\oplus b$	$2a\oplus b$	$3a\oplus b$	b
$2a$	$2a$	$3a$	0	a	$2a\oplus b$	$3a\oplus b$	b	$a\oplus b$
$3a$	$3a$	0	a	$2a$	$3a\oplus b$	b	$a\oplus b$	$2a\oplus b$
b	b	$a\oplus b$					0	
$a\oplus b$	$a\oplus b$							
$2a\oplus b$	$2a\oplus b$				0			
$3a\oplus b$	$3a\oplus b$							

loop なので, どの元も各行, 各列に一度ずつ現れることに注意し, ありうる表をすべて求める. そのとき, gyrogroup になっているという仮定を使って, ありえない表をなるべく早い段階で見つけて捨てる. 残った表が gyrogroup の定義を満たしているかどうかチェックする. 満たしている表について同型かどうかを判定する. 私が採った方法では表の絞り込みの効率が悪く, 特に 0 以外の 7 つの元が位数 2 の場合は結果として同型な表がたくさん現れて, 手数を要した.

注意. $|G| = 4, 6$ の場合も, 同様の方法で, 決定を確認した. これらの場合, gyrogroup は群となる.

Burn の表とこの報告の表との関係

[B, Theorem 6] の Π_1

$$
\begin{aligned}
&(1)\\
&(1234)(5678)\\
&(13)(24)(57)(68)\\
&(1432)(5876)\\
&(1537)(2648)\\
&(1638)(2547)\\
&(1735)(2846)\\
&(1836)(2745)
\end{aligned}
$$

は, 演算表

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
a_1	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
a_2	a_2	a_3	a_4	a_1	a_6	a_7	a_8	a_5
a_3	a_3	a_4	a_1	a_2	a_7	a_8	a_5	a_6
a_4	a_4	a_1	a_2	a_3	a_8	a_5	a_6	a_7
a_5	a_5	a_6	a_7	a_8	a_3	a_4	a_1	a_2
a_6	a_6	a_5	a_8	a_7	a_4	a_3	a_2	a_1
a_7	a_7	a_8	a_5	a_6	a_1	a_2	a_3	a_4
a_8	a_8	a_7	a_6	a_5	a_2	a_1	a_4	a_3

の表現であり, 文字 $a_1, \cdots, a_8$ を順に

$$0,\ a,\ 2a,\ 3a,\ b,\ a \oplus b,\ 2a \oplus b,\ 3a \oplus b$$

で置き換えると, 数ページ前の Π_1 の表と一致する. Π_2 から Π_5 も同様.

表現は異なるが同型という例をひとつ示す. [B, Theorem 6] の Π_6

$$
\begin{aligned}
&(1)\\
&(12)(34)(56)(78)\\
&(13)(25)(47)(68)\\
&(14)(23)(58)(67)\\
&(15)(26)(37)(48)\\
&(16)(24)(38)(57)\\
&(17)(28)(35)(46)\\
&(18)(27)(36)(45)
\end{aligned}
$$

は, 演算表

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
a_1	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
a_2	a_2	a_1	a_4	a_3	a_6	a_5	a_8	a_7
a_3	a_3	a_5	a_1	a_7	a_2	a_8	a_4	a_6
a_4	a_4	a_3	a_2	a_1	a_8	a_7	a_6	a_5
a_5	a_5	a_6	a_7	a_8	a_1	a_2	a_3	a_4
a_6	a_6	a_4	a_8	a_2	a_7	a_1	a_5	a_3
a_7	a_7	a_8	a_5	a_6	a_3	a_4	a_1	a_2
a_8	a_8	a_7	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1

の表現. この第 7, 8 列を入れ替え, その結果の下から 2 つの行を入れ替えると次を得る.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_8	a_7
a_1	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_8	a_7
a_2	a_2	a_1	a_4	a_3	a_6	a_5	a_7	a_8
a_3	a_3	a_5	a_1	a_7	a_2	a_8	a_6	a_4
a_4	a_4	a_3	a_2	a_1	a_8	a_7	a_5	a_6
a_5	a_5	a_6	a_7	a_8	a_1	a_2	a_4	a_3
a_6	a_6	a_4	a_8	a_2	a_7	a_1	a_3	a_5
a_8	a_8	a_7	a_6	a_5	a_4	a_3	a_1	a_2
a_7	a_7	a_8	a_5	a_6	a_3	a_4	a_2	a_1

文字 $a_1, \cdots, a_6, a_8, a_7$ を順に

$$0,\ a,\ b,\ a \oplus b,\ c,\ a \oplus c,\ d,\ e$$

で置き換えると, 数ページ前の Π_6 と同型なものの表

	0	a	b	$a\oplus b$	c	$a\oplus c$	d	e
0	0	a	b	$a\oplus b$	c	$a\oplus c$	d	e
a	a	0	$a\oplus b$	b	$a\oplus c$	c	e	d
b	b	c	0	e	a	d	$a\oplus c$	$a\oplus b$
$a\oplus b$	$a\oplus b$	b	a	0	d	e	c	$a\oplus c$
c	c	$a\oplus c$	e	d	0	a	$a\oplus b$	b
$a\oplus c$	$a\oplus c$	$a\oplus b$	d	a	e	0	b	c
d	d	e	$a\oplus c$	c	$a\oplus b$	b	0	a
e	e	d	c	$a\oplus c$	b	$a\oplus b$	a	0

と一致する. この loop の表現は

$$\begin{aligned}
&(1)\\
&(12)(34)(56)(78)\\
&(13)(25)(48)(67)\\
&(14)(23)(57)(68)\\
&(15)(26)(38)(47)\\
&(16)(24)(37)(58)\\
&(17)(28)(36)(45)\\
&(18)(27)(35)(46)
\end{aligned}$$

である.

注意. [B] では loop $(L,\cdot)$ が Bol であるとは

$$\big((a\cdot b)\cdot c\big)\cdot b = a\cdot\big((b\cdot c)\cdot b\big) \quad (a,b,c\in L)$$

を満たすことと定義している. これは [K] では right Bol と呼ばれており,

$$a * b = b\cdot a$$

によって right Bol loop $(L,\cdot)$ と left Bol loop $(L,*)$ は dual の関係にある.

注意. 位数 8 の left Bol loop がすべて A_ℓ 性をもつということが自明でないとすれば, “A_ℓ 性をもつ left Bol loop と gyrogroup は同値” ということと [B] とから位数 8 の gyrogroup の決定が直ちに従うわけではない.

5 gyrogroup の演算表と群の演算表の類似性について

参考までに記載しておく.

D_8

	0	a	$2a$	$3a$	b	$a\oplus b$	$2a\oplus b$	$3a\oplus b$
0	0	a	$2a$	$3a$	b	$a\oplus b$	$2a\oplus b$	$3a\oplus b$
a	a	$2a$	$3a$	0	$a\oplus b$	$2a\oplus b$	$3a\oplus b$	b
$2a$	$2a$	$3a$	0	a	$2a\oplus b$	$3a\oplus b$	b	$a\oplus b$
$3a$	$3a$	0	a	$2a$	$3a\oplus b$	b	$a\oplus b$	$2a\oplus b$
b	b	$3a\oplus b$	$2a\oplus b$	$a\oplus b$	0	$3a$	$2a$	a
$a\oplus b$	$a\oplus b$	b	$3a\oplus b$	$2a\oplus b$	a	0	$3a$	$2a$
$2a\oplus b$	$2a\oplus b$	$a\oplus b$	b	$3a\oplus b$	$2a$	a	0	$3a$
$3a\oplus b$	$3a\oplus b$	$2a\oplus b$	$a\oplus b$	b	$3a$	$2a$	a	0

Π_3 と同型

	0	a	$2a$	$3a$	b	$a\oplus b$	$2a\oplus b$	$3a\oplus b$
0	0	a	$2a$	$3a$	b	$a\oplus b$	$2a\oplus b$	$3a\oplus b$
a	a	$2a$	$3a$	0	$a\oplus b$	$2a\oplus b$	$3a\oplus b$	b
$2a$	$2a$	$3a$	0	a	$2a\oplus b$	$3a\oplus b$	b	$a\oplus b$
$3a$	$3a$	0	a	$2a$	$3a\oplus b$	b	$a\oplus b$	$2a\oplus b$
b	b	$3a\oplus b$	$2a\oplus b$	$a\oplus b$	0	$3a$	$2a$	a
$a\oplus b$	$a\oplus b$	b	$3a\oplus b$	$2a\oplus b$	$3a$	$2a$	a	0
$2a\oplus b$	$2a\oplus b$	$a\oplus b$	b	$3a\oplus b$	$2a$	a	0	$3a$
$3a\oplus b$	$3a\oplus b$	$2a\oplus b$	$a\oplus b$	b	a	0	$3a$	$2a$

Q_8

	0	a	$2a$	$3a$	b	$a\oplus b$	$2a\oplus b$	$3a\oplus b$
0	0	a	$2a$	$3a$	b	$a\oplus b$	$2a\oplus b$	$3a\oplus b$
a	a	$2a$	$3a$	0	$a\oplus b$	$2a\oplus b$	$3a\oplus b$	b
$2a$	$2a$	$3a$	0	a	$2a\oplus b$	$3a\oplus b$	b	$a\oplus b$
$3a$	$3a$	0	a	$2a$	$3a\oplus b$	b	$a\oplus b$	$2a\oplus b$
b	b	$3a\oplus b$	$2a\oplus b$	$a\oplus b$	$2a$	a	0	$3a$
$a\oplus b$	$a\oplus b$	b	$3a\oplus b$	$2a\oplus b$	$3a$	$2a$	a	0
$2a\oplus b$	$2a\oplus b$	$a\oplus b$	b	$3a\oplus b$	0	$3a$	$2a$	a
$3a\oplus b$	$3a\oplus b$	$2a\oplus b$	$a\oplus b$	b	a	0	$3a$	$2a$

$C_4 \times C_2$

	0	a	$2a$	$3a$	b	$a \oplus b$	$2a \oplus b$	$3a \oplus b$
0	0	a	$2a$	$3a$	b	$a \oplus b$	$2a \oplus b$	$3a \oplus b$
a	a	$2a$	$3a$	0	$a \oplus b$	$2a \oplus b$	$3a \oplus b$	b
$2a$	$2a$	$3a$	0	a	$2a \oplus b$	$3a \oplus b$	b	$a \oplus b$
$3a$	$3a$	0	a	$2a$	$3a \oplus b$	b	$a \oplus b$	$2a \oplus b$
b	b	$a \oplus b$	$2a \oplus b$	$3a \oplus b$	0	a	$2a$	$3a$
$a \oplus b$	$a \oplus b$	$2a \oplus b$	$3a \oplus b$	b	a	$2a$	$3a$	0
$2a \oplus b$	$2a \oplus b$	$3a \oplus b$	b	$a \oplus b$	$2a$	$3a$	0	a
$3a \oplus b$	$3a \oplus b$	b	$a \oplus b$	$2a \oplus b$	$3a$	0	a	$2a$

Π_4

	0	a	$2a$	$3a$	b	$a \oplus b$	$2a \oplus b$	$3a \oplus b$
0	0	a	$2a$	$3a$	b	$a \oplus b$	$2a \oplus b$	$3a \oplus b$
a	a	$2a$	$3a$	0	$a \oplus b$	$2a \oplus b$	$3a \oplus b$	b
$2a$	$2a$	$3a$	0	a	$2a \oplus b$	$3a \oplus b$	b	$a \oplus b$
$3a$	$3a$	0	a	$2a$	$3a \oplus b$	b	$a \oplus b$	$2a \oplus b$
b	b	$a \oplus b$	$2a \oplus b$	$3a \oplus b$	0	a	$2a$	$3a$
$a \oplus b$	$a \oplus b$	$2a \oplus b$	$3a \oplus b$	b	$3a$	0	a	$2a$
$2a \oplus b$	$2a \oplus b$	$3a \oplus b$	b	$a \oplus b$	$2a$	$3a$	0	a
$3a \oplus b$	$3a \oplus b$	b	$a \oplus b$	$2a \oplus b$	a	$2a$	$3a$	0

References

[A] T. Abe, K-LOOP と GYROCOMMUTATIVE GYROGROUP, 2014 年 12 月 24 日のセミナー資料の修正版, 2014 年 12 月 26 日.

[B] R. P. Burn, Finite Bol loops, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 84 (1978) 377-385.

[K] H. Kiechle, Theory of K-Loops, Lecture Notes in Mathematics, 1778. Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[SSS] L. Sabinin, L. Sabinina and L. Sbitneva, On the notion of gyrogroup, Aequationes Math. 56 (1988) 11–17.

[SW] T. Suksumran and K. Wiboonton, Lagrange's theorem for gyrogroups and the Cauchy property, Quasigroups and Related Systems 22 (2014), 283–294.

[U] A. A. Ungar, Analytic Hyperbolic Geometry and Albert Einstein's Special Theory of Relativity. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 2008.

Banach Stone型のいくつかの定理

新潟大学理学部　三浦毅(Takeshi Miura)
筑波大学数理物質系数学域　川村一宏　(Kazuhiro Kawamura)

Compact Hausdorff 空間 X にたいして, X 上の複素数値連続関数全体に sup norm をいれた Banach 空間を $C(X)$ で表す。古典的 Banach-Stone の定理は, $C(X)$ 上の任意の複素線形全射等長写像 $T : C(X) \to C(X)$ は次の形に表せることを主張する：

$$Tf(x) = \alpha(x) \cdot f(\varphi(x)),\ x \in X,\ f \in C(X) \tag{1}$$

ここで $\varphi : X \to X$ は位相同型写像, $\alpha : X \to \mathbb{C}$ は $|\alpha(x)| \equiv 1$ を満たす連続関数である.　この定理の様々なヴァリエーションのうち本稿で取り扱うのは以下の 2 つである.

(a) 複素線形とは限らない等長写像の一般形

(b) 全射とは限らない等長写像の一般形

まず (a) について： Mazur-Ulam の定理 [5] によって, 全射等長写像 $T : C(X) \to C(Y)$ が 0 を 0 に写せば, T は実線形でなければならない. 実線形であるが複素線形でない同型写像の典型例は複素共役写像であることを考えれば, 実線形等長写像 T は一般に次の形であることが期待される.

$$\begin{aligned} Tf(x) &= \alpha(x) \cdot f(\varphi(x)) \ \text{または} \\ &= \alpha(x) \cdot \overline{f(\varphi(x))},\ \ x \in X,\ f \in C(X), \end{aligned} \tag{2}$$

ここで $\bar{g}$ は g の複素共役を表す.

次に (b) について: 等長写像 $T : C(X) \to \operatorname{Ran} T \subsetneq C(X)$ にたいして逆写像 $T^{-1} : \operatorname{Ran} T \to C(X)$ が $C(X)$ の部分空間で定義され 1 ている作用素であることを勘案すると, $C(X)$ の部分空間 A 上で定義された, 部分空間 B 上への全射等長写像 $T : A \to B$ を考えることが自然であろう. この様な設定で意味ある結論を導くためには, A と B が十分たくさんの関数を含むことを仮定する必要がある. そのため以下考える部分空間は常に (i) 定数関数を含み (ii) 底空間の任意の 2 点を分離する, と仮定する. この設定の下で期待される同相写像 φ((1) 参照）は底空間の部分位相空間で定義されたものであろう. 今の文脈では Choquet boundary が考察されることが多い.

以上の予備的考察から (a) および (b) を合わせた設定として

(∗)　$T : A \to B$ は compact Hausdorff 空間 X, Y にたいする $C(X), C(Y)$ の部分空間 $A \subset C(X)$, $B \subset C(Y)$ の間の実線形全射等長写像, ただし A,B はそれぞれ定数関数を含み, X,Y の任意の 2 点を分離する,

を考え,

> Choquet boundary ChB から ChA への位相同型写像 φ : ChB $\to$ ChA と連続関数 $\alpha : \mathrm{Ch}B \to \mathbb{C}$ で $|\alpha(x)| \equiv 1$ を満たすものが存在して
>
> $$Tf(x) = \alpha(x) \cdot [f(\varphi(x))]^{\epsilon}, \quad x \in \mathrm{Ch}B,\ f \in A,\ \epsilon = \pm 1,$$
>
> ただし $[g]^1 = g,\ [g]^{-1} = \bar{g}$, とあらわせる

と予想することが自然と思われる.

しかしながら上の予想は一般に正しくない. 予想が成立しない例を明示的に構成したのが [3] である. 彼らは複素数平面上の単位円 $\mathbb{T}$ 上で定義された複素数係数 1 次関数の全体のなす空間 A を考え, その上の全射等長的な実線形対合 $T : A \to A, T^2 = \mathrm{id}$ を定義した.[4] はさらに進んで実線形等長変換で (2) の形に表せないようなものを許容する空間 X は, 常に $\mathbb{T}$ の位相的コピー S を含み, さらに関数空間の各関数を S に制限すると必ず一次関数である, ことを示した。従来の Banach Stone 型定理は関数空間の性質に強い制限を課した上で等長変換を (1) の形で特徴づけるものがほとんどであったのに比して, (1) あるいは (2) の形に表せない等長写像を積極的に取り上げてそのような写像を許容する関数空間の底空間のトポロジーを調べた [3], [4] は, 新しい研究方向を拓いた結果であるということができる.

本稿で報告する結果 ([2]) は [3], [4] で得られたアイデアを自然な形で発展させたものである. まず等長変換の一般形と底空間のトポロジー, 特に $\mathbb{T}$ の位相的コピーの存在, は次のように一般化される:

定理 1 $(*)$ の設定の下で, 連続関数 $\alpha : \mathrm{Ch}(B) \to \mathbb{T}$, $\varepsilon : \mathrm{Ch}(B) \to \{-1, 1\}$ が以下を満たすように存在する.

- *(a)* 各 $\lambda \in \mathbb{T}$ にたいして, 位相同型写像 $\varphi_\lambda : \mathrm{Ch}(B) \to \mathrm{Ch}(A)$ が存在し次を満たす:
  - *(a.1)* 各 $\lambda \in \mathbb{T}$ にたいして $\varphi_{-\lambda} = \varphi_\lambda$.
  - *(a.2)* 各 $y \in \mathrm{Ch}(B)$ にたいして, 次のいずれかが成り立つ:
    - *(a.2.1)* 各 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{T}$ に対して, $\varphi_{\lambda_1}(y) = \varphi_{\lambda_2}(y)$, あるいは
    - *(a.2.2)* $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq -\lambda_1$ なる任意の $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{T}$ に対して $\varphi_{\lambda_1}(y) \neq \varphi_{\lambda_2}(y)$.
- *(c)* 各 $f \in A$ に対して次が成り立つ:任意の $y \in \mathrm{Ch}(B)$ と任意の $\lambda \in \mathbb{T}$ に対して

$$f(\varphi_\lambda(y)) = \frac{\lambda^{-2\varepsilon(y)}}{2}\{f(\varphi_1(y)) - f(\varphi_i(y))\} + \frac{1}{2}\{f(\varphi_1(y)) + f(\varphi_i(y))\}.$$

- *(d)* 等長変換 T は以下のように表せる:任意の $f \in A$ と任意の $y \in \mathrm{Ch}(B)$ に対して

$$Tf(y) = \Re(\alpha(y)f(\varphi_1(y))) + i\varepsilon(y)\Im(\alpha(y)f(\varphi_i(y))).$$

いま $\mathbb{P}=\mathbb{T}/(\lambda\sim-\lambda)$ とおくと $\mathbb{P}$ は $\mathbb{T}$ と同相で，　同相写像は

$$\mathbb{P}\to\mathbb{T};[\lambda]\mapsto\lambda^2$$

によって与えられる．[4] における $\mathbb{T}$ の位相的コピー S は, (a.2.2) を満たすある $y\in \mathrm{Ch}B$ に対して $S=\{\varphi_\lambda(y)\mid\lambda\in\mathbb{T}\}$ によって与えられる．S を $\mathbb{P}$ と同一視することで S の点をパラメータ λ^2 によってあらわせば，上述の (c) は各関数 $f\in A$ の C への制限 $f|C$ が λ^2 の一次式であることを述べている．

逆に上の様な同相写像の族 $(\varphi_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{T}}$ が与えられたとき, 関数空間とその上の等長変換を定義することができる．結果を述べるために幾つかの記号を準備する．X と Y を compact Hausdorff 空間, $\varphi:\mathbb{T}\times Y\to X$ を全射連続写像で $\varphi_\lambda=\varphi(\lambda,\cdot):Y\to X$ によって定義される写像が以下の条件を満たすとする．

(F1) 各 φ_λ は同相写像で，　各 $\lambda\in\mathbb{T}$ に対して $\varphi_{-\lambda}=\varphi_\lambda$ が成り立つ．

(F2) 各 $y\in Y$ に対して次のいずれかが成り立つ：

(F2.1) 任意の $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{T}$ に対して $\varphi_{\lambda_1}(y)=\varphi_{\lambda_2}(y)$,　または

(F2,2) $\lambda_1\neq\lambda_2\neq-\lambda_1$ なる任意の $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{T}$ に対して $\varphi_{\lambda_1}(y)\neq\varphi_{\lambda_2}(y)$.

上の仮定の下で

$$\begin{aligned}F&=\{y\in Y\mid\varphi_{\lambda_1}(y)=\varphi_{\lambda_2}(y)\text{ for each }\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{T}\}\\ U&=\{y\in Y\mid\varphi_{\lambda_1}(y)\neq\varphi_{\lambda_{2(y)}}\ \text{ for each }\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{T}\text{ with }\lambda_1\neq\lambda_2\neq-\lambda_1\}\end{aligned}$$

とおく．$Y=F\cup U$, $F\cap U=\emptyset$ かつ F は Y の閉集合であることに注意する．φ_1 は同相写像だから $X=\varphi_1(F)\cup\varphi_1(U)$, $\varphi_1(F)\cap\varphi_1(U)=\emptyset$ が成り立つ．連続関数 $\varepsilon:Y\to\{-1,1\}$ に対して, X 上の連続関数 a, b が次を満たすようにとれたと仮定する:

(F3) 任意の $\lambda\in\mathbb{T}$ と任意の $y\in Y$ に対して $a(\varphi_\lambda(y))=\lambda^{-2\varepsilon(y)}a(\varphi_1(y))$,

(F4) 任意の $y\in F$ と任意の $\lambda\in\mathbb{T}$ に対して　$a(\varphi_\lambda(y))=0$, かつ

(F5) 任意の $y\in Y$ と任意の $\lambda\in\mathbb{T}$ に対して　$b(\varphi_\lambda(y))=b(\varphi_1(y))$.

$C(X)$ の部分空間 A を

$$A=\{a+b\ \mid\ a\text{ and }b\text{ satisfy the conditions (F3)-(F5)}\}$$

と定める．連続関数 $\alpha:Y\to\mathbb{T}$ に対して, $T:A\to C(Y)$ を次のように定義しよう：

$$T(a+b)(y)=\begin{cases}\overline{\alpha(y)a(\varphi_1(y))}+\alpha(y)b(\varphi_1(y)), & \varepsilon(y)=1\\ \alpha(y)a(\varphi_1(y))+\overline{\alpha(y)b(\varphi_1(y))}, & \varepsilon(y)=-1.\end{cases}\tag{3}$$

T が実線形写像であることを見るのは易しい．さらに $B=\mathrm{Ran}(T)$ とおく．以上の記号の下で次が成り立つ：

定理 2 *A と B が定数関数を含み，かつ X と Y それぞれの 2 点を分離するとする．$U \neq \emptyset$ であれば，T は全射等長変換で (2) の形に表すことができない．*

上の定理の仮定を満たすような位相空間の典型例は，$\mathbb{T}$ 作用を持つコンパクト距離空間の中に見出すことができる． $\mathbb{T}$ の位相空間 X 上の作用が *semi-free* であるとは，各 $x \in X$ に対して次のいずれかが成り立つことである：

(i) 任意の $\lambda \in \mathbb{T}$ に対して　$\lambda \cdot x = x$,　または

(ii) 任意の $\lambda \in \mathbb{T} \setminus \{1\}$ に対して　$\lambda \cdot x \neq x$.

x の軌道 $\mathrm{orb}(x)$ を $\mathrm{orb}(x) = \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{T}\}$ と定義する．上のような作用の *global section* Σ とは Σ で次を満たすような X の閉集合である：　各 $x \in X$ に対して $\Sigma \cap \mathrm{orb}(x)$ は一点集合．

例 3 *(1) 複素数平面上の単位円板 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$．複素数の積が $\mathbb{T}$ の $\mathbb{D}$ への semi-free な作用を与える．*

(2) compact Hausdorff 空間 X に対して $X \times \mathbb{T}$ は free な $\mathbb{T}$ 作用を持つ．

定理 2 を上の作用を持つコンパクト距離空間に適用することで次の定理が得られる．

定理 4 *compact 距離空間 X が $\mathbb{T}$ の semi-free な作用で global section を持つものを許容するとする．$F = \{x \in X \mid$ 任意の$\lambda \in \mathbb{T}$ に対して$\lambda x = x\} \neq X$ と仮定する．このとき $C(X)$ の部分空間 A と全射等長変換 $T : A \to A$ で*

(a) $\mathrm{Ch}A = X$,

(b) T は (2) の形に表せない

様なものが存在する．

注：上の定理で X の距離化可能性は”peak function”の豊富な存在を保証するために仮定されている．

この定理によって (2) の形に表せない等長変換を許容する関数空間の例が豊富に得られた.[3] の結果に対する理解を深めるために，このような空間および等長変換の詳しい性質を調べることは大切な問題であるように思われる．

本稿で述べた結果のいくつかは Banach あるいは Hilbert 空間に値をとるベクトル値関数空間に拡張することができる ([1]) が，これらの結果については稿を改めることとしたい．

参考文献

[1] K. Kawamura, Linear surjective isometries between vector-valued function spaces, J. Australian Math. Soc. published on line Jan. 2016.

[2] K. Kawamura and T. Miura, Real-linear surjective isometries between function spaces, preprint.

[3] H. Koshimizu, T. Miura, H. Takagi and S.-E. Takahasi, *Real-linear isometries between subspaces of continuous functions,* J. Math. Anal. Appl. 413 (2014), 229-241.

[4] T. Miura, *Surjective isometries between function spaces*, Contemp. Math. 645 (2015), 231-239.

[5] J. Väisälä, *A proof of the Mazur-Ulam theorem,* Amer. Math. Monthly 110-7 (2003), 633-635.

単位球面上の等距離写像に関する一つの注意

新潟大学自然科学系（大学院自然科学研究科）　　羽鳥　理
(Osamu Hatori)

1　序章

ノルム空間の間の全射等距離写像は affine であることを主張する Mazur-Ulam の定理（1932）は古典的である。Mankiewicz はその局所 Mazur-Ulam の定理 [3] により，ノルム空間の連結開集合間の等距離写像は全体に等距離写像として拡張できることを示した。一方 Figiel [1] は $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}^2$ の中への等距離写像で affine ではないものの例を示した。そこで次の問題が生ずる。

Problem 1. *Banach* 空間またはノルム空間の部分集合で定義された等距離写像の全体への拡張は可能か？

2　Tingley 問題

次は Tingley [6] により研究が始まった。

Problem 2. *Banach* 空間の単位球面の間の等距離写像は *Banach* 空間全体に等距離写像として拡張できるか？

$\ell^p(\Gamma)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ やコンパクト距離空間 Ω 上の複素数値連続関数全体 $C(\Omega)$ などの Banach 空間では肯定的であることが知られているようであるが，完全な解決や反例については知られていないようである。

3　行列環の場合

行列環 $M_n(\mathbb{C})$ や C^* 環の場合はどのようであろうか？Tanaka [5] は行列環の場合には Tingley 問題は肯定的であることを示した。ここでは次の結果を紹介する。(cf. [2])

定理 3. $M_n(\mathbb{C})$ を成分が複素数である n 次正方行列全体とする。$S_n = \{A : \|A\|_\infty = 1\}$ をスペクトルノルム $\|\cdot\|_\infty$ に関する $M_n(\mathbb{C})$ の単位球とする。$\|\cdot\|$ を *unitarily invariant strictly convex norm* とする。$\varphi : S_n \to S_n$ が $\|\cdot\|$ に関する全射等距離写像であるとする。このときユニタリー行列 U, V が存在して，以下のどれかが成立する。

(1) $\varphi(A) = UAV, \quad A \in S_n$*;*

(2) $\varphi(A) = UA^{tr}V, \quad A \in S_n$*;*

(3) $\varphi(A) = UA^*V, \quad A \in S_n$*;*

(4) $\varphi(A) = U\bar{A}V, \quad A \in S_n$*.*

一般に Banach 空間 $(X, \|\cdot\|)$ において，$|x\| = \|y\|$ で $x \neq y$ ならば，$\|\frac{x+y}{2}\| < 1$ であるとき $\|\cdot\|$ は strictly convex であるという．Schatten p-norm は strictly convex であるが，スペクトルノルムは strictily convex ではない．

補題 4. $A, B, \frac{A+B}{2} \in S_n$ ならば，

$$\varphi\left(\frac{A+B}{2}\right) = \frac{\varphi(A) + \varphi(B)}{2}$$

である．

ノルムが strictly convex だと，接する球の共有点はただ 1 点のみであるからである．$U(n)$ をユニタリー群とする．S_n の端点全体は $U(n)$ と一致することが知られている。

補題 5. $\varphi(U(n)) = U(n)$ である。

Proof. $A \in U(n)$ とする．よって A は S_n の端点である．ここで $\varphi(A) \notin U(n)$ と仮定する．$\varphi(A)$ の極分解 $\varphi(A) = U|\varphi(A)|$ に対して，

$$U_1 = U\left(|\varphi(A)| + i\sqrt{1 - |\varphi(A)|^2}\right),\ U_2 = U\left(|\varphi(A)| - i\sqrt{1 - |\varphi(A)|^2}\right)$$

とすれば U_1, U_2 はユニタリーであり，$\varphi(A) = \frac{U_1 + U_2}{2}$ である．φ^{-1} に補題 4 を適用すれば，

$$A = \frac{\varphi^{-1}(U_1) + \varphi^{-1}(U_2)}{2}$$

である．これは A が S_n の端点であることと矛盾する．以上より，$\varphi(A) \in U(n)$ である． $\square$

定理の証明を行う。補題 5 より

$$\varphi|_{U(n)} : U(n) \to U(n)$$

は well defined である．Molnár の定理 [4] よりユニタリー行列 U, V が存在して，次のどれかが成立する。

(1) $\varphi(A) = UAV, \quad A \in U(n)$;

(2) $\varphi(A) = UA^{tr}V, \quad A \in U(n)$;

(3) $\varphi(A) = UA^*V, \quad A \in U(n)$;

(4) $\varphi(A) = U\bar{A}V, \quad A \in U(n)$.

$A \in S_n$ のときは，$A = \frac{U_1 + U_2}{2}$ であるユニタリーの存在が補題 5 の方法で分かり，$\varphi(\frac{U_1 + U_2}{2}) = \frac{\varphi(U_1) + \varphi(U_2)}{2}$ であるから，上の形は $A \in S_n$ の場合も成立する．

参考文献

[1] T. Figiel, *On nonlinear isometric embeddings of normed linear spaces*, Bull. de L'Acad. Polon. Sciences. Série des Sciences Maath., Astr et Phys. **XVI** (1968), 185–188

[2] O. Hatori, *Maps on the sphere of the algebras of matrices*, Nihonkai Math. J. **26** (2015), 121–125

[3] P. Mankiewicz, *On extension of isometries in normed linear spaces*, Bull. L'Acad. Polonaise Sciences, Ser. des Sciences Math., Astr. Phys., bf 100 (1972), 367–371

[4] L. Molnár, *Jordan triple endomorphisms and isometries of unitary groups*, Linear Algebra Appl., **439** (2013), 3518–3531

[5] R. Tanaka, *The solution of Tingley's problem for the operator norm unit sphere of complex* $n \times n$ *matrices*, Linear Algebra Appl. 494 (2016), 274–285

[6] D. Tingley, *Isometries on the unit sphere*, Geomet. Dedicata, **22** (1987), 371–378

参 加 者 名 簿

氏名 (敬称略)	所　属
阿 部　敏 一	新潟大学　工学部
飯 田　安 保	金沢医科大学
石 井　　透	新潟大学
泉 池　敬 司	新大自然
泉 池　耕 平	山口大学
大 井　志 穂	新潟大学大学院
大 野　修 一	日本工大
小 高　晏 奈	新潟大学
春 日　一 浩	
川 上　泰 史	新潟大学
川 村　一 宏	筑波大学数理物質系
桑 原　修 平	札幌静修高等学校
古清水　大直	米子高専
瀬 戸　道 生	防衛大
高 木　啓 行	信州大　理
高橋　圭太郎	新潟大学
鶴 見　和 之	
冨樫 (新藤) 瑠美	長岡工業高等専門学校
丹 羽　典 朗	日本大学薬学部
羽 鳥　　理	新大自然
細 川　卓 也	茨城大 工
本 間　拓 朗	新潟大学
三 浦　大 志	新潟大学
三 浦　　毅	新潟大
渡 邉　恵 一	新潟大 自然科学系