2014年度 関数環研究集会

報　告　集

2015年 4月

2014 年度の関数環研究集会は田中純一先生に会場を提供していただき，早稲田大学教育学部にて 2014 年 9 月 18 日（木），19 日（金）に開催されました．大勢の方々にご参加いただき，8 の講演が行われました。2 日間，有意義な情報交換や活発な討論ができ，充実した集会になりました。ご講演くださった皆様をはじめ，ご参加くださった皆様，そして集会にご協力くださいました皆様に心よりお礼申し上げます。

講演者の方々に報告原稿をお書きいただきましたので，ここに取りまとめ，報告集といたします。

世話人：三浦　毅　（新潟大学）

2014年度 関数環研究集会

9月18日（木）

9月19日（金）

$B_w^u(E)$ 空間の補間定理[1]

早稲田大学グローバルエデュケーションセンター　曽布川　拓也
(Takuya Sobukawa)

1 Morrey 空間と Campanato 空間

まずよく知られた Morrey 空間の定義を見直すことにする。

定義 1 $\mathbb{R}^n$ 上, $Q(x,r)$ を中心 x，半径 r の球（*or* 立方体）とするとき

$$\sup_{r>0,\, x\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{r^\lambda}\left(\frac{1}{|Q(x,r)|}\int_{Q(x,r)} |f(y)|^p\, dy\right)^{1/p} < \infty \tag{1}$$

を満たす関数 f の全体を *Morrey* 空間 $L_{p,\lambda}$ とよぶ。

このノルムの定義を丁寧に見直してみると

1. 関数 f の値の大きさをローカルに ($Q(x,r)$ という範囲で)L^p ノルムで測る
2. 関数の値の様子を知ることが目的なので, $Q(x,r)$ の大きさに依らないようにその測度 $|Q(x,r)|$ で割って標準化した L^p ノルムにする
3. $Q(x,r)$ の半径 r が小さければ、よりローカルな性質を詳しく見ることになるので、r の冪で割る。その冪が大きければ, 中心 x の近辺での f の挙動を細かく見ることになる。
4. 半径の取り方, 中心の取り方のすべての場合を考慮する (上限を取る)

という構造になっていることがわかる。ここでは最初に関数 f を L^p ノルムで局所的に測っているが, それを次のように弱 L^p(セミ) ノルムに変えたものも考えられる。

定義 2 関数 f で

$$\|f\|_{WL_{p,\lambda}(U)} = \sup_{Q(x,s)\subset U} \frac{1}{s^\lambda}\left(\frac{1}{|Q(x,s)|}\sup_{t>0} t^p \left|\{Q(x,s), |f|>t\}\right|\right)^{1/p} < \infty$$

を満たすもの全体を, 弱 *Morrey* 空間 $WL_{p,\lambda}$ とよぶ。

[1]本講演は中井英一氏（茨城大理）との共同研究の成果報告である。

これらは, 局所的に関数の値の発散の様子を調べ、それを全体でまとめていることになるが、振動するような関数の変動の様子を知るためには次のような見方の方が相応しいとも言える。

定義 3 関数 f で

$$\sup_{r>0,\, x\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{r^\lambda}\left(\frac{1}{|Q(x,r)|}\int_{Q(x,r)} |f(y)-f_Q|^p\,dy\right)^{1/p} < \infty \tag{2}$$

を満たすもの全体を, *Campanato* 空間 $\mathfrak{L}_{p,\lambda}$ とよぶ。ただし,

$$f_Q = \frac{1}{|Q(x,r)|}\int_{Q(x,r)} f(y)\,dy$$

である。

これも Morrey 空間と同様に見直してみると

1. " 平均 "f_Q に対して " 偏差 " $|f(y)-f_Q|$ を考え,
2. その " 分散 " (もしくは p 次モーメント, $p=2$ のときが確率論や統計学で言う分散に相当する) をとり
3. Morrey 空間と同様に球の半径の冪で割って, 全体で見る

となっている。なおこの量は、関数に定数を加えても値が変わらず, セミノルムとなる。
Morrey 空間と Campanato 空間については次の性質がよく知られている。

$$\begin{array}{cl} \lambda = -n/p \text{ のとき} & L_{p,\lambda} = L^p \\ -n/p \le \lambda < 0 \text{ のとき} & \mathfrak{L}_{p,\lambda}/\mathfrak{C} = L_{p,\lambda} \\ \lambda = 0 \text{ のとき} & \mathfrak{L}_{p,\lambda} = \mathrm{BMO} \\ 0 < \lambda \le 1 \text{ のとき} & \mathfrak{L}_{p,\lambda} = \mathrm{Lip}(\lambda) \end{array}$$

2 原点の周りの関数の挙動

前節で見たように, Morrey ノルムや Campanato セミノルムは局所的に関数の様子を調べ, 空間全体でそれを見る」という形になっている。それに対して原点中心に限定した形で色々な関数空間が考えられている。

2.1 Beurling algebra A^p の dual B^p

Beurling が一般調和解析 (Wiener 変換の解析) のために導入した関数環 A^p の双対空間 B^p は次のようなノルムを持つ空間であるとみることができる。

$$\|f\|_{B^p} = \sup_{r\ge 1}\left(\frac{1}{|Q_r|}\int_{Q_r} |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \tag{3}$$

ここで $Q_r = Q(0,r)$ である。

球の半径が 1 以上であることはそれほど本質的でないが, これと類似の Homogeneous type のノルム

$$\|f\|_{\dot{B}^p} = \sup_{r>0} \left(\frac{1}{|Q_r|} \int_{Q_r} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \tag{4}$$

はまた新しい関数空間をもたらす。これは Morrey ノルムの定義において, 球の中心 x を原点に固定, $\lambda = 0$ としたものとみなすことが出来る。

2.2 CMO^p, CBMO^p

Campanato セミノルムを同じように原点中心で見直したのが次のセミノルムである

$$\|f\|_{\mathrm{CMO}^p} = \sup_{r\geq 1} \left(\frac{1}{|Q_r|} \int_{Q_r} |f(x) - f_{Q_r}|^p \, dx \right)^{1/p} \tag{5}$$

(García-Cuerva and Herrero [3])。これに対応する Homogeneous type セミノルムが

$$\|f\|_{\mathrm{CBMO}^p} = \sup_{r>0} \left(\frac{1}{|Q_r|} \int_{Q_r} |f(x) - f_{Q_r}|^p \, dx \right)^{1/p} \tag{6}$$

(Alvarez, Guzmán-Partida and Lakey[1]) である。

2.3 一般の Central Morrey/ Campanato type 空間

またさらに, 一般の λ に対して, 原点中心に見て

$$\begin{aligned}
\|f\|_{B^{p,\lambda}} &= \sup_{r\geq 1} \frac{1}{r^\lambda} \left(\frac{1}{|Q_r|} \int_{Q_r} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \\
\|f\|_{\dot{B}^{p,\lambda}} &= \sup_{r>0} \frac{1}{r^\lambda} \left(\frac{1}{|Q_r|} \int_{Q_r} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \\
\|f\|_{\mathrm{CMO}^{p,\lambda}} &= \sup_{r\geq 1} \frac{1}{r^\lambda} \left(\frac{1}{|Q_r|} \int_{Q_r} |f(x) - f_{Q_r}|^p \, dx \right)^{1/p} \\
\|f\|_{\mathrm{CBMO}^{p,\lambda}} &= \sup_{r>0} \frac{1}{r^\lambda} \left(\frac{1}{|Q_r|} \int_{Q_r} |f(x) - f_{Q_r}|^p \, dx \right)^{1/p}
\end{aligned}$$

といったノルム・セミノルムを定義することもできる。

2.4 関数空間 $B_\sigma(E)$

これらの空間は, その歴史的な経緯などから, 積分領域 Q_r の測度を明示しているが, これを r^n で置き換えても同値である。 すなわち

$$\|f\|_{B^{p,\lambda}} = \sup_{r\geq 1} \frac{1}{r^\lambda} \left(\frac{1}{|Q_r|} \int_{Q_r} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \approx \sup_{r\geq 1} \frac{1}{r^{n/p+\lambda}} \|f\|_{L^p(Q_r)}$$

と置き直すことができる。これを $B_{n/p+\lambda}(L^p)$ ノルムと呼ぶこととする。一般に $B_\sigma(L^p)$ 空間が考えられる。また $\dot{B}_\sigma(L^p)$ ノルムも同様に定められる。

同じように $\mathrm{CMO}^{p,\lambda}$ や $\mathrm{CBMO}^{p,\lambda}$ のセミノルムは, $\|f-f_{Q_r}\|_{L^p(Q_r)}$ を $L^p/\mathfrak{C}$ ($\mathfrak{C}$ は定数関数全体の集合) という空間のセミノルムと見なすことによって

$$\|f\|_{\mathrm{CMO}^{p,\lambda}} = \sup_{r\ge 1}\frac{1}{r^{n/p+\lambda}}\|f-f_{Q_r}\|_{L^p(Q_r)} \quad \cdots\ B_{n/p+\lambda}(L^p/\mathfrak{C})\ \text{セミノルム}$$
$$\|f\|_{\mathrm{CBMO}^{p,\lambda}} = \sup_{r>0}\frac{1}{r^{n/p+\lambda}}\|f-f_{Q_r}\|_{L^p(Q_r)} \quad \cdots\ \dot{B}_{n/p+\lambda}(L^p/\mathfrak{C})\ \text{セミノルム}$$

とみることも出来る。このように最初に局所的に関数の状況を見る尺度 (ノルムまたはセミノルム E) を変えてやることによって, さらに一般に $B_\sigma(E)$ という枠組みで多くの関数空間を捉えることが出来る。(Komori-Furuya et al. [5])

2.5 関数空間 $B^u_w(E)$

前節の $B_\sigma(E)$ の (セミ) ノルムは, 最後に r を動かして上限を取っている。それを L^∞ ノルムを取ったと見なし, さらに一般化して L^u ノルムを取る [2] ことにする。そしてウェイト $r^{-\sigma}$ を一般的な形で $w(r)$ としてやれば, 次の空間を得る。

定義 4 ($B^u_w(E)$ spaces) E を $\mathbb{R}^n$ 上の関数に対する（何らかの条件を満たす）セミノルム空間とする。このとき関数空間 $B^u_w(E)$ および $\dot{B}^u_w(E)$ をそれぞれ

$$\Big\| w(r)\|f\|_{E(Q_r)}\Big\|_{L^u([1,\infty),\frac{dr}{r})} < \infty$$
$$\Big\| w(r)\|f\|_{E(Q_r)}\Big\|_{L^u((0,\infty),\frac{dr}{r})} < \infty$$

を満たす関数 f 全体のなす空間と定める。

この定義自体には特に必要はないが, 今後扱う上でセミノルム空間 E についてつぎの条件を仮定することとする.

$$f|_{Q_r}\in E(Q_r),\quad 0<t<r<\infty \Longrightarrow f|_{Q_t}\in E(Q_t),\quad \|f\|_{E(Q_t)}\le C_E\|f\|_{E(Q_r)} \tag{7}$$

大まかに言って L^p のような「広い領域で測れば, ノルムは大きくなる」 という性質である。ここではこれを「制限条件」と呼ぶことにする。実際に E の例としては L^p, Orlicz 空間, Lorentz 空間 Morrey 空間, Weak-Morrey 空間 Campanato 空間, Lipschitz 空間などがある。

後に補間定理を証明するのに必要となるので weight w についての条件も検討しておく。

$$w(r)\le Cw(s)\quad (w(r)\ge Cw(s))\quad \text{for}\quad r\le s. \tag{8}$$

これらは増加関数/減少関数の一般化であることから, almost increasing/decreasing property と呼ぶ。またよく知られた doubling condition も仮定しておく。

$$C^{-1}\le \frac{w(r)}{w(s)}\le C\quad \text{for}\quad \frac{1}{2}\le\frac{r}{s}\le 2. \tag{9}$$

[2] Burenkov and Nursultanov は $E=L^p$ のケースでこの形の空間を考えている。([2])

このとき, ウェイト w のクラスとして

$$\mathcal{W}^u = \left\{ w : \text{almost decreasing, doubling, } \int_1^\infty w(r)^u \frac{dr}{r} < \infty \right\}$$
$$\mathcal{W}^* = \left\{ w : \text{almost decreasing, doubling, } \int_r^\infty w(t) \frac{dt}{t} \approx w(r) \right\}$$

を考える。これらは

$$u_1 \leq u_2 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{W}^* \subset \mathcal{W}^{u_1} \subset \mathcal{W}^{u_2} \subset \mathcal{W}^\infty.$$

を満たすことがわかる。

3 $B_w^u(E)$-空間の補間定理

まず K-実補間空間の定義を復習する。

(A_0, A_1) を準ノルム空間の両立対とする。$a \in A_0 + A_1$, $t \geq 0$ に対し

$$K(t, a; (A_0, A_1)) = \inf_{a = a_0 + a_1, a_i \in A_i} (\|a_0\|_{A_0} + t\|a_1\|_{A_1})$$

を Peetre の K 関数という。

定義 5 $1 \leq u \leq \infty$, $0 < \theta < 1$, $\delta \geq 0$ に対し

$$\left[\int_\delta^\infty \left(\frac{K(t, a; (A_0, A_1))}{t^\theta} \right)^u \frac{dt}{t} \right]^{1/u} < \infty$$

を満たす $a \in A_0 + A_1$ 全体を, K-実補間空間 $(A_0, A_1)_{\theta, u, [\delta, \infty)}$ という。

この補間空間に対して, 次の性質が成り立つ。

命題 6 (有界性定理) *(劣)* 線形作用素 [3] T が $A_0 \longrightarrow B_0$ および $A_1 \longrightarrow B_1$ の有界作用素であるとき, T は $(A_0, A_1)_{\theta, u} \longrightarrow (B_0, B_1)_{\theta, u}$ の有界作用素になる。

どのような空間の両立対に対してその補間空間を知られた形で確定することが基本的な問題となる。

次が我々の主結果である。

定理 7 ($B_w^u(E)$-空間の補間定理) $u_0, u_1, u \in (0, \infty]$, $w_0, w_1 \in \mathcal{W}^\infty$, $\min(u_i, u) < \infty$ ならば $w_i \in \mathcal{W}^*$ とする。また, ある $(\epsilon > 0)$ に対して $\dfrac{w_0(r)}{w_1(r)} r^{-\epsilon}$ または $\dfrac{w_1(r)}{w_0(r)} r^{-\epsilon}$ が *almost increasing* であるとする。$\theta \in (0, 1)$ に対して

$$w = w_0^{(1-\theta)} w_1^\theta.$$

と定める。このとき

$$(\dot{B}_{w_0}^{u_0}(E)(\mathbb{R}^n), \dot{B}_{w_1}^{u_1}(E)(\mathbb{R}^n))_{\theta, u, (0, \infty)} = \dot{B}_w^u(E)(\mathbb{R}^n)$$
$$(B_{w_0}^{u_0}(E)(\mathbb{R}^n), B_{w_1}^{u_1}(E)(\mathbb{R}^n))_{\theta, u, [1, \infty)} = B_w^u(E)(\mathbb{R}^n).$$

が成り立つ。

[3] 線形の場合には問題はない。劣線形の場合については後述する。

4　補間定理の証明と分解条件

$B^u_w(E)$ のノルムは, Lorentz 空間のノルムと同じ形をしているため, その補間空間の証明は似たようなものになることが期待されるが, Lorentz 空間の場合には K 関数が具体的に計算されるものの, 我々の場合にはもっと一般的な形でもあり, その手法は使えない。今回我々は, K 関数の定義に戻り,

$$K(t,f;(A_0,A_1)) = \inf_{f=f_0+f_1} (\|f_0\|_{A_0} + t\|f_1\|_{A_1})$$
$$\sim \left(\int_0^\infty \left(w_0(r)\|f_0\|_{E(Q)}\right)^{u_0} \frac{dr}{r}\right)^{1/u_0} + t\left(\int_0^\infty \left(w_1(r)\|f_1\|_{E(Q)}\right)^{u_1} \frac{dr}{r}\right)^{1/u_1}$$

を直接計算で評価した。それ自体には大きな問題はないのだが, その段階で大きな問題点が浮上した。

問題点 8 任意の *(*または充分たくさんの*)* $f \in \dot{B}^u_w(E)(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$f = f_0 + f_1, \quad f_i \in \dot{B}^{u_i}_{w_i}(E)(\mathbb{R}^n), \quad (i = 0, 1)$$

と分解できるか？言い換えれば

$$\dot{B}^u_w(E)(\mathbb{R}^n) \subset \dot{B}^{u_0}_{w_0}(E)(\mathbb{R}^n) + \dot{B}^{u_1}_{w_1}(E)(\mathbb{R}^n) \quad \text{が成り立つか？}$$

我々はセミノルム空間 E に次の条件が成り立てばこの問題が解決することを示した。

命題 9 (分解条件) $f \in E_Q(\mathbb{R}^n)$ および $r > 0$ に対し, $f = f^r_0 + f^r_1$ という分解で

$$\|f^r_0\|_{E(Q_t)} \le \begin{cases} C_E\|f\|_{E(Q_t)} & (0 < t < r), \\ C_E\|f\|_{E(Q_{ar})} & (r \le t < \infty), \end{cases}$$
$$\|f^r_1\|_{E(Q_t)} \le \begin{cases} 0 & (0 < t < cr), \\ C_E\|f\|_{E(Q_{bt})} & (cr \le t < \infty), \end{cases}$$

（C_E, a, b, c は r, t, f によらない）となるものが常にとれるならば, $f \in \dot{B}^u_w(E)(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$f = f_0 + f_1, \quad f_i \in \dot{B}^{u_0}_{w_0}(E)(\mathbb{R}^n)$$

と分解できる。すなわち $\dot{B}^u_w(E)(\mathbb{R}^n) \subset \dot{B}^{u_0}_{w_0}(E)(\mathbb{R}^n) + \dot{B}^{u_0}_{w_0}(E)(\mathbb{R}^n)$ となる。

この条件は多くのケースに有効である。たとえば Lattice 条件を持つようなセミノルム空間 (L^p, Orlicz, Lorentz, Morrey 空間), また Lattice ではないが Campanato 空間 $\mathfrak{L}_{p,\lambda}$ でもこの分解条件が成り立つことがわかる。

5　有界性定理について

そもそも補間理論は, 有界性定理を示すことがその主たる目的である。作用素 T が線形のときにはその証明は容易である。しかしそれより弱い劣加法性

$$|T(f+g)(x)| \le |Tf(x)| + |Tg(x)|$$

だけを仮定して有界性定理を証明するのは困難である。そこで我々はさらに次の条件をつけた。

$$|Tf(x) - Tg(x)| \le C|T(f-g)(x)| \quad (C>0 \text{ は } f,\, g \text{ に依らない定数})$$

ここまで条件を付ければ有界性定理が証明できる [4]。実際、実解析でよく扱う多くの劣線形作用素はこの条件を満たす。

6　応用例

我々の補間定理によって新しく得られた評価を挙げる。

例 10 *Hardy-Littlewood / Fractional Maximal Operators*

$$M_\alpha f(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|^{1-\alpha/n}} \int_Q |f(y)|\,dy \quad (\alpha \in [0,n))$$

は $\mu = \lambda + \alpha$, $q \le (\lambda/\mu)p$, $\sigma + \lambda + \alpha \le 0$ のとき

$$B_\sigma(L_{p,\lambda})(\mathbb{R}^n) \longrightarrow B_\sigma(L_{q,\mu})(\mathbb{R}^n) \qquad B_\sigma(L_{1,\lambda})(\mathbb{R}^n) \longrightarrow B_\sigma(WL_{q,\mu})(\mathbb{R}^n)$$

$(1 < p < \infty)$ という有界性を持つ *([5])* 。これに我々の補間定理を適用すると $p, q \in [1,\infty)$, $\lambda \in [-n/p, 0)$, $\mu \in [-n/q, 0)$, $u \in (0,\infty]$ のときに

$$B^u_w(L_{p,\lambda})(\mathbb{R}^n) \longrightarrow B^u_w(L_{q,\mu})(\mathbb{R}^n) \qquad B^u_w(L_{1,\lambda})(\mathbb{R}^n) \longrightarrow B^u_w(WL_{q,\mu})(\mathbb{R}^n)$$

$(1 < p < \infty)$ という有界性を得る。

例 11 *Singular / Fractional Integral Operators*

$$T_\Omega f(x) = p.v. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^n} f(y)\,dy \quad (\textit{Calderón Zygmund } \text{作用素})$$
$$I_{\Omega,\alpha} f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-\alpha}} f(y)\,dy \quad (\textit{rough kernel})$$

に対して同様に *Komori-Furuya* らの評価 *([5])* をこの定理で補間することによって

$$B^u_w(L_{p,\lambda})(\mathbb{R}^n) \longrightarrow B^u_w(L_{q,\mu})(\mathbb{R}^n) \qquad B^u_w(L_{1,\lambda})(\mathbb{R}^n) \longrightarrow B^u_w(WL_{q,\mu})(\mathbb{R}^n)$$

$(1 < p < \infty)$ という有界性を得る。

[4] 劣加法的な作用素についてこの条件をつければ有界性が証明できることをはっきり書いた欧文の文献が見当たらないが, 本講演のあと色々な議論を通じてこの条件をつけることはすでに知られたことであることがわかった。

特に, $\lambda=-n/p$ とおけば, Burenkov- Nursultanov [2] による これらの作用素に対するLocal Morrey type spaces における有界性 $LM_{pu,\tilde{w}}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow LM_{qu,\tilde{w}}(\mathbb{R}^n)$ を得る。

例 12 (Singular integral operators with cancellation property)

$$Tf(x)=\lim_{\eta\to 0}\int_{|x-y|\geq\eta} K(x,y)f(y)\,dy$$

$$|K(x,y)|\leq \frac{C}{|x-y|^n} \qquad \int_{r\leq|x-y|<R} K(x,y)\,dy=\int_{r\leq|x-y|<R} K(y,x)\,dy=0$$

(Kernel についての条件は省略）の形の作用素についても同様な議論で

$$B^u_w(\mathcal{L}_{p,\lambda})(\mathbb{R}^n)\longrightarrow B^u_w(\mathcal{L}_{q,\mu})(\mathbb{R}^n) \qquad \dot{B}^u_w(\mathcal{L}_{p,\lambda})(\mathbb{R}^n)\longrightarrow \dot{B}^u_w(\mathcal{L}_{q,\mu})(\mathbb{R}^n)$$

という形の有界性を得る。

例 13 *Modified fractional integral operators*

$$\tilde{I}_\alpha f(x)=\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\left(\frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}x-\frac{1-\chi_1(y)}{|y|^{n-\alpha}}\right)dy. \quad \alpha\in(0,n)$$

についても, *Matsuoka-Nakai[4]* の結果を補間することによって

$$B^u_w(\mathcal{L}_{p,\lambda})(\mathbb{R}^n)\longrightarrow B^u_w(\mathcal{L}_{q,\mu})(\mathbb{R}^n) \qquad \dot{B}^u_w(\mathcal{L}_{p,\lambda})(\mathbb{R}^n)\longrightarrow \dot{B}^u_w(\mathcal{L}_{q,\mu})(\mathbb{R}^n)$$

その特殊なケースとして

$$B^u_w(\mathrm{BMO})(\mathbb{R}^n)\longrightarrow B^u_w(\mathrm{Lip}_\alpha)(\mathbb{R}^n) \qquad \dot{B}^u_w(\mathrm{Lip}_\beta)(\mathbb{R}^n)\longrightarrow \dot{B}^u_w(\mathrm{Lip}_\gamma)(\mathbb{R}^n)$$

という有界性を得る。

参考文献

[1] J. Alvarez, M. Guzmán-Partida and J. Lakey, Spaces of bounded λ-central mean oscillation, Morrey spaces, and λ-central Carleson measures, Collect. Math., 51 (2000), 1–47.

[2] V. I. Burenkov and E. D. Nursultanov, Description of interpolation spaces for local Morrey-type spaces. (Russian) Tr. Mat. Inst. Steklova 269 (2010), Teoriya Funktsii i Differentsialnye Uravneniya, 52–62; translation in Proc. Steklov Inst. Math. 269 (2010), no. 1, 46–56.

[3] J. García-Cuerva and M.J. L. Herrero, A theory of Hardy spaces assosiated to the Herz spaces, Proc. London Math. Soc., 69 (1994), 605–628.

[4] K. Matsuoka and E. Nakai, Fractional integral operators on $B^{p,\lambda}$ with Morrey-Campanato norms, In: Function Spaces IX, Banach Center Publ., 92, 249–264, Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 2011.

[5] Y. Komori-Furuya, K. Matsuoka, E. Nakai and Y. Sawano, Integral operators on B_σ-Morrey-Campanato spaces, Rev. Mat. Complut., 26 (2013), Issue 1, 1–32.

[6] E. Nakai and T. Sobukawa, B_w^u-function spaces and their interpolation, preprint, http://arxiv.org/abs/1410.6327

関数空間上の全射等距離写像の構造

新潟大学自然科学系　　三浦　毅 (Takeshi Miura)

X をコンパクト Hausdorff 空間とし，$C(X)$ により X 上で定義された複素数値連続関数全体からなる各点での演算と最大値ノルム $\|\cdot\|_\infty$ に関する複素 Banach 空間を表す．（線形とは限らない）写像 $S\colon C(X)\to C(Y)$ が等距離写像であるとは

$$\|S(f)-S(g)\|_\infty = \|f-g\|_\infty \qquad (f,g\in C(X))$$

が成り立つことである．Banach-Stone の定理として知られている次の結果は，X,Y ともに距離空間である場合を Banach [2] が，また X,Y が一般のコンパクト Hausdorff 空間である場合を Stone [12] がそれぞれ示しているが，Banach [2], Stone [12] ともに複素数値関数ではなく実数値関数を考えている．

定理 1 (Banach-Stone の定理) $S\colon C(X)\to C(Y)$ が全射複素線形等距離写像ならば，同相写像 $\phi\colon Y\to X$ および連続関数 $\alpha\colon Y\to\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$ が存在して

$$S(f)(y)=\alpha(y)f(\phi(y)) \qquad (f\in C(X),\ y\in Y)$$

が成り立つ．

等距離写像は線形ノルム空間の間に自然な形で定義される．Banach-Stone の定理は様々な方向に拡張されている．たとえば関数環の間の全射複素線形等距離写像は Nagasawa [11] および de Leeuw, Rudin and Wermer [4] により独立に研究されている．等距離写像は，関数環のように積の構造が定義されていなくとも意味をもつので，$C(X)$ のある種の線形部分空間の間に等距離写像を考え，その構造を調べる問題は自然である．Araujo and Font [1] は局所コンパクト Hausdorff 空間 K に対して，$C_0(K)$ のある種の線形部分空間の間の全射複素線形等距離写像の形を決定している．ここでは Araujo and Font の結果の特別な場合を述べることにする．$C(X)$ のノルム空間としての部分空間 A が定数関数を含み，さらに X の点を分離するとき，A を（X 上の）関数空間と呼ぶ．A_1^* を A の双対空間 A^* の単位球とし，$*$-弱位相を与える．A_1^* の端点全体の集合を $E(A_1^*)$ で表し，δ_x を点値汎関数とする；つまり $f\in A$ に対して $\delta_x(f)=f(x)$ である．このとき

$$\mathrm{Ch}(A)=\{x\in X:\delta_x\in E(A_1^*)\}$$

と定義し，これを A の Choquet 境界と呼ぶ．このとき Araujo and Font [1] の結果から次が分かる．

定理 2 (Aarujo and Font) A,B を関数空間とする．$S\colon A\to B$ を全射複素線形等距離写像ならば，同相写像 $\phi\colon \mathrm{Ch}(B)\to\mathrm{Ch}(A)$ および連続関数 $\alpha\colon\mathrm{Ch}(B)\to\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$ が存在して

$$S(f)(y)=\alpha(y)f(\phi(y)) \qquad (f\in A,\ y\in\mathrm{Ch}(B))$$

が成り立つ．

ところで等距離写像の複素線形性は不自然，あるいは技巧的な仮定に思われる．実際，Banach [2] で示されているように，ノルム空間の間の全射等距離写像は本質的に実線形である．この結果は Mazur-Ulam の定理 [8] として知られている．Väisälä [13] は Mazur-Ulam の定理の簡単な証明を与えている．

定理 3 (Mazur-Ulam の定理) M, N を（完備とは限らない）線形ノルム空間とする．全射等距離写像 $S\colon M \to N$ に対して，$S - S(0)$ は実線形である．

S が全射等距離写像ならば，$S - S(0)$ も全射等距離写像であることは明らかである．よって Mazur-Ulam の定理より $S - S(0)$ は全射実線形等距離写像となる．したがって全射実線形等距離写像の構造を解明すれば，全射等距離写像が分かったことになる．その重要性にも関わらず実線形等距離写像に関する研究は多くはないが，たとえば Ellis [3] は関数環から一様閉である関数空間への全射実線形等距離写像の構造を解明している．また M. [9], Hatori and M. [6] は，単位元の存在を仮定せずに，関数環の間の全射等距離写像の形を決定している．この結果は Koshimizu, M., Takagi and Takahasi [7] によって拡張されている．複素線形ではない実線形等距離写像の例として

$$S(f)(y) = \begin{cases} \alpha(y) f(\phi(y)) & y \in K \\ \overline{\alpha(y) f(\phi(y))} & y \in \mathrm{Ch}(B) \setminus K \end{cases} \qquad (f \in A) \tag{1}$$

の形のものが考えられる．実際，関数環の間の全射実線形等距離写像はこの形のものに限られることが [9] において示されている．ただし K は $\mathrm{Ch}(B)$ の開かつ閉集合である．Araujo and Font [1] の実線形版を考えたとき，等距離写像は上の形のものに限られるとも予想されるが，この形では表すことの出来ない全射実線形等距離写像の例が [7] において与えられている．そこで (1) の形を全射実線形等距離写像の標準形と呼ぶことにすれば，まずは等距離写像が標準形となるための条件を調べる必要がある．

定義 1 関数空間の間の全射実線形等距離写像 $S\colon A \to B$ に対して

$$S_*(\eta)(f) = \mathrm{Re}\,\eta(S(f)) - i\mathrm{Re}\,\eta(S(if)) \qquad (\eta \in B^*,\ f \in A)$$

により $S_*\colon B^* \to A^*$ を定める．このとき S_* は全射実線形等距離写像であることが分かる．

補題 4 各 $y \in \mathrm{Ch}(B)$ に対して

$$S_*(\delta_y) = \alpha_1 \delta_{x_1}, \qquad S_*(i\delta_y) = \alpha_i \delta_{x_i}$$

をみたす $\alpha_1, \alpha_i \in \mathbb{T}$ および $x_1, x_i \in \mathrm{Ch}(A)$ が一意に存在する．ただし $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ である．

証明 S_* は全射等距離写像であるから $S_*(B_1^*) = A_1^*$ である．また S_* は実線形なので中点は保存される．よって $S_*(E(B_1^*)) \subset E(A_1^*)$ となる．$(S_*)^{-1}$ に同様の議論を適用して $(S_*)^{-1}(E(A_1^*)) \subset E(B_1^*)$，つまり $S_*(E(B_1^*)) = E(A_1^*)$ を得る．これより S_* は端点を端点に写すので，$y \in \mathrm{Ch}(B)$ に対して $S_*(\delta_y) = \alpha_1 \delta_{x_1}$ をみたす $\alpha_1 \in \mathbb{T}$ および $x_1 \in \mathrm{Ch}(A)$ が存在する．A が定数を含み X の点を分離することから $\alpha_1 \in \mathbb{T}, x_1 \in \mathrm{Ch}(A)$ の一意性が示される．同様にして $S_*(i\delta_y) = \alpha_i \delta_{x_i}$ をみたす $\alpha_i \in \mathbb{T}$ および $x_i \in \mathrm{Ch}(A)$ が一意に存在することも示される． ■

補題 5 $\alpha_i = \pm i\alpha_1$

証明 $y \in \mathrm{Ch}(B)$ とする．$\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\delta_y \in E(B_1^*)$ であるから，$S_*\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\delta_y\right) = \beta\delta_x$ をみたす $\beta \in \mathbb{T}$ および $x \in \mathrm{Ch}(A)$ が存在する．S_* は実線形なので

$$\sqrt{2}\,\beta\delta_x = S_*(\delta_y) + S_*(i\delta_y) = \alpha_1\delta_{x_1} + \alpha_i\delta_{x_i}$$

A は 1 を含むので $\sqrt{2}\beta = \alpha_1 + \alpha_i$ であるから，両辺の絶対値を考えて $|1 + \overline{\alpha_1}\alpha_i| = \sqrt{2}$ を得る．$|\overline{\alpha_1}\alpha_i| = 1$ なので $\overline{\alpha_1}\alpha_i = \pm i$ でなければならない．よって $\alpha_i = \pm i\alpha_1$ である． ■

α_1, α_i は $y \in \mathrm{Ch}(B)$ に対して一意に定まり，$\alpha_i = \pm i\alpha_1$ をみたす．そこで $K = \{y \in \mathrm{Ch}(B) : \alpha_i = i\alpha_1\}$ とおけば

$$S_*(\delta_y) = \alpha_1\delta_{x_1}, \qquad S_*(i\delta_y) = \begin{cases} i\alpha_1\delta_{x_i} & y \in K \\ -i\alpha_1\delta_{x_i} & y \in \mathrm{Ch}(B) \setminus K \end{cases}$$

が成り立つ．すべての $y \in \mathrm{Ch}(B)$ に対して $x_1 = x_i$ と仮定する．ここで $y \in \mathrm{Ch}(B)$ のとき

$$\mathrm{Re}\,\alpha_1 f(x_1) = \mathrm{Re}\,\alpha_1\delta_{x_1}(f) = \mathrm{Re}\,S_*(\delta_y)(f) = \mathrm{Re}\,\delta_y(S(f)) = \mathrm{Re}\,S(f)(y),$$

$$-\mathrm{Im}\,\alpha_1 f(x_1) = \mathrm{Re}\,i\alpha_1\delta_{x_1}(f) = \mathrm{Re}\,S_*(i\delta_y)(f) = \mathrm{Re}\,i\delta_y(S(f)) = -\mathrm{Im}\,S(f)(y)$$

である．よって $S(f)(y) = \alpha_1 f(x_1)$ を得る．同様にして $y \in \mathrm{Ch}(B) \setminus K$ のとき $S(f)(y) = \overline{\alpha_1 f(x_1)}$ となることが分かる．つまりすべての $y \in \mathrm{Ch}(B)$ に対して $x_1 = x_i$ ならば，全射実線形等距離写像 S は標準形であることが示された．逆に等距離写像 S が標準形であれば，すべての $y \in \mathrm{Ch}(B)$ に対して $x_1 = x_i$ が成り立つことも分かる．しかし [7] で与えられた例のように，標準形でない全射実線形等距離写像も存在する．そのような等距離写像は一般にどのように記述されるのかを今後解明したい．

参考文献

[1] J. Araujo and J.J. Font, *Linear isometries between subspaces of continuous functions*, Trans. Amer. Math. Soc., **349** (1997), 413–428.

[2] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Monograf. Mat., Warsaw, 1932.

[3] A.J. Ellis, *Real characterizations of function algebras amongst function spaces*, Bull. London Math. Soc., **22** (1990), 381–385.

[4] K. deLeeuw, W. Rudin and J. Wermer, *The isometries of some function spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **11** (1960), 694–698.

[5] R.J. Fleming and J.E. Jamison *Isometries on Banach Spaces: Function Spaces*, Chapman & Hall/CRC, 2003.

[6] O. Hatori and T. Miura, *Real linear isometries between function algebras. II*, Cent. Eur. J. Math., **11** (2013), 1838–1842.

[7] H. Koshimizu, T. Miura, H. Takagi and S.-E. Takahasi, *Real-linear isometries between subspaces of continuous functions*, J. Math. Anal. Appl., **413** (2014), 229–241.

[8] S. Mazur and S. Ulam, *Sur les transformationes isométriques d'espaces vectoriels normés*, C. R. Acad. Sci. Paris **194** (1932), 946–948.

[9] T. Miura, *Real-linear isometries between function algebras*, Cent. Eur. J. Math., **9** (2011), 778–788.

[10] T. Miura, *Surjective isometries between function spaces*, to appear.

[11] M. Nagasawa, *Isomorphisms between commutative Banach algebras with an application to rings of analytic functions*, Kōdai Math. Sem. Rep., **11** (1959), 182–188.

[12] M.H. Stone, *Applications of the theory of Boolean rings to general topology*, Trans. Amer. Math. Soc., **41** (1937), 375–481.

[13] J. Väisälä, *A proof of the Mazur-Ulam theorem*, Amer. Math. Monthly, **110-7** (2003), 633–635.

A generalization of the Mazur-Ulam theorem for gyrovector spaces

新潟大学自然科学研究科　　阿部　敏一 (Toshikazu Abe)

ニュートン力学力学では速度全体の集合は 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ に対応し、和について群を成す。一方、特殊相対論での速度全体の集合（但し、光と同じ速さ c を持つものは除く）は 3 次元ユークリッド空間上の半径 c の開球 $\mathbb{R}^3_c = \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3 : \|\boldsymbol{u}\| < c\}$ に対応し、特殊相対論における速度の和の演算 $\oplus_E$ は可換ではなく、結合法則も満たさない。したがって、$(\mathbb{R}^3_c, \oplus_E)$ は（可換）群ではない。しかし、$(\mathbb{R}^3_c, \oplus_E)$ は（gyrocommutative ）gyrogroup と呼ばれる構造を持っていることがわかっている。（Gyrocommutative ）gyrogroup は (可換) 群を一般化したものである。A. Ungar はさらに gyrovector space という概念を提唱した。Gyrovector space は”和”が gyrocommutative gyrogroup であるような（必ずしも可換群である必要はない）実内積空間に対応する概念である。Gyrovector 空間は実内積空間の一般化であり、実内積空間と似た様々な構造を持つ。先に挙げた特殊相対論での速度全体の集合も自然に gyrovector space の構造を持つ。

Mazur-Ulam の定理は実ノルム空間から実ノルム空間への全射等距離写像は自動的にその代数構造を保存するということを主張している。そこで、まずは gyrovector space と実ノルム空間を同時に扱えるように新たな空間”GGV space”を定義する。そして、GGV space 上で Mazur-Ulam の定理と同様の結果が得られる事について述べる。この結果はオリジナルの Mazur-Ulam の定理の一般化となっている。

1　GGV space

GGV space について定義する前にまず [1] に基づいて (gyrocommutative)gyrogroup の定義を確認しておく。

定義. [1] 空でない集合 G とその上の二項演算 $\oplus$ の組 $(G, \oplus)$ が次の性質を満たすとき gyrogroup であるという。

(G1) 次を満たす $\mathbf{0} \in G$（左側単位元）が存在する。すなわち、
$\mathbf{0} \oplus \boldsymbol{a} = \mathbf{0} \quad \forall \boldsymbol{a} \in G.$

(G2) (G1) を満たす $\mathbf{0} \in G$ のうち、任意の $\boldsymbol{a} \in G$ に対して次を満たす $\ominus \boldsymbol{a}$（$\boldsymbol{a}$ の左側逆元）が存在するものがある。
$\ominus \boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{a} = \mathbf{0}.$

(G3) 任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in G$ に対して、次を満たす $\mathrm{gyr}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\boldsymbol{c} \in G$ が一意に存在する。
$\boldsymbol{a} \oplus (\boldsymbol{b} \oplus \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b}) \oplus \mathrm{gyr}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\boldsymbol{c}.$

(G4) 任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in G$ に対して、$\boldsymbol{c} \mapsto \mathrm{gyr}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\boldsymbol{c}$ によって定まる写像 $\mathrm{gyr}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] : G \to G$ は G 上の全単射で演算 $\oplus_E$ を保存する。すなわち、
$\mathrm{gyr}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}](\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y}) = \mathrm{gyr}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\boldsymbol{x} \oplus \mathrm{gyr}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\boldsymbol{y} \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in G.$

(G5) 任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in G$ に対して次が成立する。
$\mathrm{gyr}[\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}] = \mathrm{gyr}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}].$

群の記法に習い、$\boldsymbol{a} \oplus (\ominus \boldsymbol{b})$ を $\boldsymbol{a} \ominus \boldsymbol{b}$ と表す。

定義. [1] Gyrogroup $(G, \oplus)$ が任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in G$ に対して次を満たすとき gyrocommutative であるという。

(G6) $\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b} = \mathrm{gyr}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}](\boldsymbol{b} \oplus \boldsymbol{a})$

GGV space について定義する。

定義. Gyrocommutative gyroroup $(G, \oplus)$ と写像 $\otimes : \mathbb{R} \times G \to G$ が次の公理を満たすとき、$(G, \oplus, \otimes)$ は GGV space であるという。ここで、G は実ノルム空間 $(V, \|\cdot\|)$ の部分集合とする。

(V0)' $\|\mathrm{gyr}[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]\boldsymbol{a}\| = \|\boldsymbol{a}\| \quad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{a} \in G.$

(V1) $1 \otimes \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \quad \forall \boldsymbol{a} \in G.$

(V2) $(r_1 + r_2) \otimes \boldsymbol{a} = (r_1 \otimes \boldsymbol{a}) \oplus (r_2 \otimes \boldsymbol{a}) \quad \forall \boldsymbol{a} \in G,\ r_1, r_2 \in \mathbb{R}.$

(V3) $(r_1 r_2) \otimes \boldsymbol{a} = r_1 \otimes (r_2 \otimes \boldsymbol{a}) \quad \forall \boldsymbol{a} \in G,\ r_1, r_2 \in \mathbb{R}.$

(V4) $\dfrac{|r| \otimes \boldsymbol{a}}{\|r \otimes \boldsymbol{a}\|} = \dfrac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|} \quad \forall \boldsymbol{a} \in G \setminus \{\boldsymbol{0}\},\ r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$

(V5) $\mathrm{gyr}[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}](r \otimes \boldsymbol{a}) = r \otimes \mathrm{gyr}[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]\boldsymbol{a} \quad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{a} \in G,\ r \in \mathbb{R}$

(V6) $\mathrm{gyr}[r_1 \otimes \boldsymbol{v}, r_2 \otimes \boldsymbol{v}] = id_G \quad \forall \boldsymbol{v} \in G,\ r_1, r_2 \in \mathbb{R}$

(VV) $\|G\| = \{\pm\|\boldsymbol{a}\| \in \mathbb{R} : \boldsymbol{a} \in G\}$ は和 $\oplus$ とスカラー積 $\otimes$ で一次元実線形空間をなし、以下を満たす。

(V7) $\|r \otimes \boldsymbol{a}\| = |r| \otimes \|\boldsymbol{a}\| \quad \forall \boldsymbol{a} \in G,\ r \in \mathbb{R}.$

(V8) $\|\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b}\| \leq \|\boldsymbol{a}\| \oplus \|\boldsymbol{b}\| \quad \forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in G.$

Gyrovector space との差は以下の 2 つである。1. Gyrovector space は内積空間に埋め込まれているのに対して、GGV space はノルム空間に埋め込んでいる。2. Gyrovector space は条件 (V0) として $\mathrm{gyr}[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$ が内積を保存することを要求しているのに対して、GGV space は条件 (V0)' として $\mathrm{gyr}[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$ がノルムを保存することを要求している。よって、全ての gyrovector space は明らかに GGV space となる。また、実ノルム空間 V はそれ自身の (通常の意味での) 和とスカラー積によって GGV space の公理を満たすことが簡単に確認できる。以上より、GGV space は gyrovector space と実ノルム空間両方の一般化となっている。

GGV space における"距離"と"中点"のにあたる概念"gyrometric"と"gyromidpoint"を以下のように定義する。

定義. 以下で定義される ϱ を GGV space $(G, \oplus, \otimes)$ 上の gyrometric という。

$$\varrho(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \|\boldsymbol{a} \ominus \boldsymbol{b}\| \ \ \forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in G.$$

定義. GGV space $(G, \oplus, \otimes)$ 上の点 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して、以下で定義される G 上の点 $m(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の gyromidpoint という。

$$m(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \frac{1}{2} \otimes (\boldsymbol{a} \oplus \mathrm{gyr}[\boldsymbol{a}, \ominus \boldsymbol{b}]\boldsymbol{b}).$$

上記の 2 つは gyrovector space 上で全く同じに定義されているものである。したがって、gyrovector space 上での概念をそのまま GGV space に持ち上げたものである。GGV space として特にノルム空間を考えた場合、その gyrometric は（通常の意味での）ノルムから導かれる距離、gyromidpoint は通常の意味での代数的中点と一致する。すなわち、

$$\varrho(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\|,$$

$$m(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \frac{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}}{2}$$

である。

2 Mazur-Ulam の定理

今回の主定理を述べる前にオリジナルの Mazur-Ulam の定理について述べておく。

定理. (Mazur-Ulam の定理) T を実ノルム空間 A から実ノルム空間 B への全射等距離写像とする。このとき、T は中点を保存する。すなわち、

$$T\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{T(a) + T(b)}{2} \quad \forall a, b \in A$$

ここからただちに T は実線形写像 T_0 を用いて $T = T(0) + T_0$ と表わせることがわかる。2003 年に Väisälä はこの Mazur-Ulam の定理により簡潔な証明を与えた（[4]）。この証明は、ノルム空間上の点 x に対して、点 z を中心とした対称な点 $\psi_z(x) = 2z - x$ を対応させる写像 ψ_z が持つ”よい性質”を利用したものである。

3 主定理

以下が今回の主定理である。

定理. (主定理) T を GGV space G_1 から GGV spaceG_2 へ gyrometric を保存する全射とする。このとき、T は gyromidpoint を保存する。

特に G_1,G_2 としてノルム空間を考えた場合が丁度オリジナルの Mazur-Ulam の定理である。証明はオリジナルの Mazur-Ulam の定理の Väisälä による証明を真似する。ノルム空間の場合の証明で用いられた写像 $\psi_z(x) = 2z - x$ に対応するものとして、GGV space 上の写像 $\phi_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{x}) = 2\boldsymbol{z} \ominus \boldsymbol{x}$ を用いる。この $\phi_{\boldsymbol{z}}$ もまた”よい性質”を持つ。

系. T を GGV space G_1 から GGV space G_2 への gyrometric を保存する全射とする。T は次の性質を満たす T_0 を用いて $T = T(\mathbf{0}) \oplus T_0$ で表せる。

$$T_0(\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b}) = T_0(\boldsymbol{a}) \oplus T_0(\boldsymbol{b}) \quad \forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in G_1$$

$$T_0(\alpha \otimes \boldsymbol{a}) = \alpha \otimes T_0(\boldsymbol{a}) \quad \forall \boldsymbol{a} \in G_1, \alpha \in \mathbb{R}$$

参考文献

[1] A. A. Unger, *Analytic Hyperbolic Geometry and Albert Einstein's Special Theory of Relativity*, World Scientific, (2008)

[2] Michael A. Carchidi, *Generating exotic-looking vector spaces*, College Math. J., **29(4)** (1998), 304-308

[3] A. Vogt, *Maps which preserve equality of distance*, Studia Math., **45** (1973), 43-48

[4] J. Väisälä, *A Proof of the Mazur-Ulam Theorem*, Amer. Math. Monthly, **110** (2003), 102303

無限グラフ上の合成作用素について

島根大学総合理工学部　　瀬戸　道生 (Michio Seto)

1　準備

G を高々可算個の頂点をもつグラフとする．以下，G の頂点の集合を $V = V(G)$，辺の集合を $E = E(G)$ と表す．また G には次の 6 条件を仮定する．

1. 局所有限（各頂点から出ている辺の数が有限）
2. 無向
3. ループ無し
4. 連結（任意の二頂点を有限本の辺で結ぶことが可能）
5. 原点とよばれる頂点 0_G が存在する．
6. G には次の (a), (b), (c) を満たす重み関数が備えられている．
   (a) $C_{xy} > 0 \quad (\{x, y\} \in E)$,
   (b) $C_{xy} = 0 \quad (\{x, y\} \notin E)$,
   (c) $C_{xy} = C_{yx}$.

このようなグラフは重み付きグラフ，またはネットワークとよばれる．

定義 1.1. G_1 と G_2 を重み付きグラフとする．$V_1 = V(G_1)$ から $V_2 = V(G_2)$ への写像 φ が $C_{xy} \leq C_{\varphi(x)\varphi(y)}$ $(x, y \in V_1)$ を満たすとき，φ を準同型写像とよぶ．さらに，φ が全単射かつ φ^{-1} もまた準同型であるとき，φ は同型写像とよばれる．

ここでは単射準同型写像を函数解析学的に調べて得られた結果を報告する．グラフ理論の中でもグラフ準同型写像はまだあまり研究されていないようであるが，函数解析的にはいくつかの研究テーマが埋蔵されているように思う．例えば，重みが $\{0, 1\}$ から値をとるとき，グラフ上の正則関数は考えづらいが（調和関数ならばある），準同型写像の定義は「近傍＝辺」という同一視の下で開写像定理とみなすことが出来るので，準同型写像を正則写像と考えることができる．函数解析関連でグラフ準同型写像を扱っているものとしては，Jorgensen-Pearse [2] がある．

2　ヒルベルト空間 $\mathcal{H}_G$

V 上の実数値関数 u, v に対し，$\mathcal{E}(u,v)$ を次のように定める．

$$\mathcal{E}(u,v) = \frac{1}{2}\sum_{x,y\in V} C_{xy}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y)).$$

定理 2.1.

$$\mathcal{H}_G = \{u : \mathcal{E}(u,u) < +\infty \quad and \quad u(0_G) = 0\} \quad and \quad \|u\|^2_{\mathcal{H}_G} = \mathcal{E}(u,u).$$

と定めると $\mathcal{H}_G$ は再生核ヒルベルト空間である．

k_x により $\mathcal{H}_G$ の頂点 x に対する再生核を表す．すなわち，

$$\langle u, k_x\rangle_{\mathcal{H}_G} = u(x) \quad (u \in \mathcal{H}_G)$$

が成り立つ．この再生核ヒルベルト空間 $\mathcal{H}_G$ とフレームの理論との関連をここで述べておこう．$f_{xy} = \sqrt{C_{xy}}(k_x - k_y)$ $(x, y \in V)$ とおき，non-zero な f_{xy} の全体を F とおく．ただし，f_{xy}, f_{yx} のどちらか一方は F から除くことにする．任意の $u \in \mathcal{H}_G$ に対し，

$$\|u\|^2_{\mathcal{H}_G} = \frac{1}{2}\sum_{x,y\in V} C_{xy}|u(x)-u(y)|^2 = \sum_{f_{xy}\in F} |\langle u, f_{xy}\rangle_{\mathcal{H}_G}|^2 \tag{1}$$

が成り立つが，これは F が tight であることを意味する．ここで用いる用語については Christensen [1] の Chapter 5 を参考にした．同じく [1] の Theorem 5.1.6 により，任意の $u \in \mathcal{H}_G$ は次のように展開される．

$$u = \sum_{f_{xy}\in F} \langle u, f_{xy}\rangle_{\mathcal{H}_G} f_{xy} \quad \text{（ノルム位相で無条件収束）}$$

特に，デルタ関数 δ_x は

$$\delta_x = \sum_{y: f_{xy}\in F} \langle \delta_x, f_{xy}\rangle_{\mathcal{H}_G} f_{xy} = \sum_{y:\{x,y\}\in E} C_{xy}(k_x - k_y)$$

と展開される（G から定まるラプラス作用素を Δ とするとき，これは $\Delta k_x = \delta_x$ と同じ式である）．このように $\mathcal{H}_G$ を扱う際は，正規直交基底よりも，再生核，さらにはフレームを扱った方が自然である．

3　合成作用素

G_1 と G_2 を重み付きグラフとし，$\varphi : G_1 \to G_2$ を準同型写像とする．ただし，原点を保存することを仮定する．すなわち，$\varphi(0_{G_1}) = 0_{G_2}$ を仮定する．このとき，$C_\varphi u = u \circ \varphi$ $(u \in \mathcal{H}_{G_2})$ により線型作用素 $C_\varphi : \mathcal{H}_{G_2} \to \mathcal{H}_{G_1}$ が定まる．

定理 3.1. $\varphi : G_1 \to G_2$ が単射ならば $\|C_\varphi\| \leq 1$.

定理 3.2. $\varphi : G_1 \to G_2$ を単射準同型写像とする．このとき，C_φ が等距離写像であることと φ が同型写像であることは同値である．さらに，このとき $C_\varphi C_\varphi^* = I_{\mathcal{H}_{G_1}}$ が成り立つ．

先に定めたフレームを使うと C_φ^* を次のように表現できる．

定理 3.3. $\varphi : G_1 \to G_2$ を単射準同型写像とする．このとき，

$$C_\varphi^* u = \sum_{\{x_1,y_1\}:f_{x_1y_1}\in F_1} \sqrt{\frac{C_{x_1y_1}}{C_{\varphi(x_1)\varphi(y_1)}}} \langle u, f_{x_1y_1}\rangle_{\mathcal{H}_{G_1}} f_{\varphi(x_1)\varphi(y_1)} \quad (u \in \mathcal{H}_{G_1})$$

が成り立つ．

4 de Branges-Rovnyak spaces

ここでは Sarason [3] の記号を用いる．$\varphi : G_1 \to G_2$ を単射準同型写像とする（ただし，同型写像は除く）．C_φ^* の値域上に次の内積を入れる．

$$\langle C_\varphi^* u, C_\varphi^* v\rangle_{\mathcal{M}(C_\varphi^*)} = \langle P_{(\ker C_\varphi^*)^\perp} u, P_{(\ker C_\varphi^*)^\perp} v\rangle_{\mathcal{H}_{G_1}} \quad (u, v \in \mathcal{H}_{G_1}).$$

ここで $P_{(\ker C_\varphi^*)^\perp}$ は $\ker C_\varphi^*$ の（$\mathcal{H}_{G_1}$ の内積に関する）直交補空間上への射影である．このとき，ヒルベルト空間 $(\operatorname{ran} C_\varphi^*, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{M}(C_\varphi^*)})$ を $\mathcal{M}(C_\varphi^*)$ と表すことにする．同様に $\mathcal{H}(C_\varphi^*) = \mathcal{M}((I_{\mathcal{H}_{G_2}} - C_\varphi^* C_\varphi)^{1/2})$ を定める．さらに，$\mathcal{M}(C_\varphi), \mathcal{H}(C_\varphi)$ も同様である．

定義 4.1. 単射準同型写像 $\varphi : G_1 \to G_2$ に対し，

$$\begin{aligned} E(\varphi(G_1)) &= \{\{\varphi(x_1), \varphi(y_1)\} \in E_2 : x_1, y_1 \in V_1\}, \\ \varphi(G_1) &= (\varphi(V_1), E(\varphi(G_1))), \\ D_\varphi E_1 &= \{\{x_1, y_1\} \in E_1 : C_{x_1y_1} < C_{\varphi(x_1)\varphi(y_1)}\}. \end{aligned}$$

と定める．

定理 4.1. $\varphi : G_1 \to G_2$ を単射準同型写像とする．もし $|D_\varphi E_1|$ と $|E_2 \setminus E(\varphi(G_1))|$ がともに有限ならば

$$\mathcal{H}(C_\varphi^*) = \operatorname{span}\{k_{\varphi(x_1)} - k_{\varphi(y_1)} : \{x_1, y_1\} \in D_\varphi E_1\} + \operatorname{span}\{k_{x_2} - k_{y_2} : \{x_2, y_2\} \in E_2 \setminus E(\varphi(G_1))\}.$$

一般の de Branges-Rovnyak 空間論により，$\mathcal{H}_{G_2}$ を次のように分解することができる：

$$\mathcal{H}_{G_2} = \mathcal{M}(C_\varphi^*) + \mathcal{H}(C_\varphi^*), \quad \|u\|^2_{\mathcal{H}_{G_2}} = \min\{\|v\|^2_{\mathcal{M}(C_\varphi^*)} + \|w\|^2_{\mathcal{H}(C_\varphi^*)} : u = v + w\}.$$

この和は直和ではないことに注意する．$\mathcal{M}(C_\varphi^*) \cap \mathcal{H}(C_\varphi^*)$ は overlapping space とよばれることがある．

系 4.1. $\varphi : G_1 \to G_2$ を単射準同型写像とする．もし $|D_\varphi E_1|$ と $|E_2 \setminus E(\varphi(G_1))|$ がともに有限ならば

$$\mathrm{span}\{k_{\varphi(x_1)} - k_{\varphi(y_1)} : \{x_1, y_1\} \in D_\varphi E_1\} \subseteq \mathcal{M}(C_\varphi^*) \cap \mathcal{H}(C_\varphi^*).$$

系 4.2. $\varphi : G_1 \to G_2$ を単射準同型写像とする．$G_2 = \varphi(G_1)$ かつ $|D_\varphi E_1|$ が有限ならば

$$\mathcal{H}(C_\varphi) \subseteq \mathrm{span}\{k_{x_1} - k_{y_1} : \{x, y\} \in D_\varphi E_1\} + \ker C_\varphi^*.$$

命題 4.1. $\dim \mathcal{H}(C_\varphi^*)$ と $\dim \mathcal{H}(C_\varphi)$ がともに有限ならば，C_φ はフレドホルム作用素である．

命題 4.1 をもとにして，単射準同型写像に対する一つのクラスを次のように定める．

定義 4.2. $\varphi : G_1 \to G_2$ を単射準同型写像とする．$\dim \mathcal{H}(C_\varphi^*)$ と $\dim \mathcal{H}(C_\varphi)$ がともに有限であるとき，φ を有限型とよぶ．

補題 4.1. $\varphi : G_1 \to G_2$ と $\psi : G_2 \to G_3$ が有限型ならば $\psi \circ \varphi : G_1 \to G_3$ も有限型．

$\mathrm{ind}\, A$ を A のフレドホルム指数とする．

定理 4.2. φ が有限型かつ $\ker C_\varphi^*$ と $\ker C_\varphi$ の内一方が自明ならば

$$\mathrm{ind}\, C_\varphi = \dim \mathcal{H}(C_\varphi^*) - \dim \mathcal{H}(C_\varphi) = \begin{cases} \dim \ker C_\varphi & \textit{if } \ker C_\varphi^* = \{0\} \\ -\dim \ker C_\varphi^* & \textit{if } \ker C_\varphi = \{0\}. \end{cases}$$

謝辞

大野修一先生（日本工業大学），岡田正巳先生（首都大学東京）からこのテーマに関するディスカッションの機会を頂けたことを感謝します．

参考文献

[1] O. Christensen, *An introduction to frames and Riesz bases*, Applied and Numerical Harmonic Analysis. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2003.

[2] P. E. T. Jorgensen and E. P. J. Pearse, *Spectral comparisons between networks with different conductance functions*, J. Operator Theory 72 (2014), no. 1, pp. 71–86.

[3] D. Sarason, *Sub-Hardy Hilbert spaces in the unit disk*, University of Arkansas Lecture Notes in the Mathematical Sciences, 10. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994.

[4] M. Seto, S. Suda and T. Taniguchi, *Gram matrices of reproducing kernel Hilbert spaces over graphs*, Linear Algebra Appl., 445 (2014), pp. 56–68.

[5] M. Seto, S. Suda and T. Taniguchi, *Gram matrices of reproducing kernel Hilbert spaces over graphs II (graph homomorphisms and de Branges-Rovnyak spaces)*, to appear.

WEIGHTED COMPOSITION OPERATORS WHOSE RANGES CONTAIN THE DISK ALGEBRA

泉池　敬司　　　新潟大学・自然科学系・フェロー

1. Introduction

Let $H(\mathbb{D})$ be the family of all analytic functions on the open unit disk $\mathbb{D}$. Let $\mathcal{S}(\mathbb{D})$ be the set of analytic self-maps of $\mathbb{D}$. For $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{D})$ and $u \in H(\mathbb{D})$, we have the weighted composition operator M_uC_φ on $H(\mathbb{D})$ defined by $M_uC_\varphi f = u \cdot (f \circ \varphi)$ for every $f \in H(\mathbb{D})$. For $u \in H(\mathbb{D})$, let $Z(u) = \{z \in \mathbb{D} : u(z) = 0\}$. We denote by $Aut(\mathbb{D})$ the set of automorphisms of $\mathbb{D}$. Let $A(\overline{\mathbb{D}})$ be the disk algebra, that is, $A(\overline{\mathbb{D}})$ is the space of analytic functions on $\mathbb{D}$ which may be extended continuously on $\overline{\mathbb{D}}$. For a sequence $\{z_n\}_{n\geq 1}$ in $\mathbb{D}$ satisfying $\sum_{n=1}^{\infty}(1 - |z_n|) < \infty$, the function

$$b(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{-\overline{z}_n}{|z_n|} \frac{z - z_n}{1 - \overline{z}_n z}, \quad z \in \mathbb{D}$$

is called the Blaschke product with zeros $\{z_n\}_{n\geq 1}$. If $\{z_n\}_{n\geq 1}$ is a finite set, then b is called a finite Blaschke product. It is known that $\varphi \in Aut(\mathbb{D})$ if and only if

$$\varphi(z) = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha} z}, \quad z \in \mathbb{D}$$

for some $\alpha \in \mathbb{D}$ and $\theta \in \mathbb{R}$ (see [2, 3]). We denote by $\varphi^{-1} \in Aut(\mathbb{D})$ the inverse of φ.

For $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{D})$ satisfying $\varphi \in Aut(\mathbb{D})$, we have $A(\overline{\mathbb{D}}) \subset H(\mathbb{D}) = C_\varphi(H(\mathbb{D}))$. For $\varphi \notin Aut(\mathbb{D})$ and $u \in H(\mathbb{D})$, one may guess that $(M_uC_\varphi)(H(\mathbb{D})) \cap A(\overline{\mathbb{D}})$ is a fairly small subset of $A(\overline{\mathbb{D}})$. In this paper, we shall study weighted composition operators for which the union set of the ranges of these operators contains the disk algebra $A(\overline{\mathbb{D}})$.

2. Ranges of composition operators

Let $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{D})$ satisfying $\varphi \notin Aut(\mathbb{D})$. Under the condition that $z \in C_\varphi(H(\mathbb{D}))$, we shall study a function f in $A(\overline{\mathbb{D}})$ such that $f \notin C_\varphi(H(\mathbb{D}))$.

Theorem 2.1. *Let $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{D})$ satisfy $\varphi \notin Aut(\mathbb{D})$. If $z \in C_\varphi(H(\mathbb{D}))$, then $1/(z - \alpha) \notin C_\varphi(H(\mathbb{D}))$ for some $\alpha \in \mathbb{C}$ with $|\alpha| > 1$.*

Proof. By the assumption, there is $g \in H(\mathbb{D})$ such that $g(\varphi(z)) = z$ for every $z \in \mathbb{D}$. Then φ is a univalent function. If $\varphi(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$, then $\varphi \in Aut(\mathbb{D})$, so we have $\varphi(\mathbb{D}) \subsetneqq \mathbb{D}$. Then there is a sequence $\{z_n\}_n$ in $\mathbb{D}$ such that $\varphi(z_n) \to a \in \mathbb{D} \cap \partial\varphi(\mathbb{D})$ as $n \to \infty$. We note that $|z_n| \to 1$. So we may assume that $z_n \to \lambda$ for some $\lambda \in \partial\mathbb{D}$. Then

$$g(a) = \lim_{n\to\infty} g(\varphi(z_n)) = \lim_{n\to\infty} z_n = \lambda.$$

Hence $|g(a)| = 1$. By the maximal modulus principle, we have $g(\mathbb{D}) \not\subset \overline{\mathbb{D}}$. Then there is $c \in \mathbb{D}$ such that $|g(c)| > 1$.

Assume that there is $h \in H(\mathbb{D})$ such that $h(\varphi(z)) = 1/(z - g(c))$. We have

$$\frac{1}{z - g(c)} = \frac{1}{g(\varphi(z)) - g(c)} = \Big(\frac{1}{g(z) - g(c)}\Big)(\varphi(z)).$$

Hence

$$\frac{1}{g(z) - g(c)} = h(z)$$

for every $z \in \varphi(\mathbb{D})$, so $(g - g(c))h = 1$ on $\varphi(\mathbb{D})$. Since $(g - g(c))h \in H(\mathbb{D})$, by the uniqueness theorem we have $(g - g(c))h = 1$ on $\mathbb{D}$. Since $c \in \mathbb{D}$, $0 = (g(c) - g(c))h(c) = 1$. This is a contradiction.

Put $\alpha = g(c)$. Then $|\alpha| > 1$ and $1/(z - \alpha) \notin C_\varphi(H(\mathbb{D}))$. $\square$

3. Ranges of weighted composition operators

Theorem 3.1. *Let $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_k \in \mathcal{S}(\mathbb{D})$ and $u_1, u_2, \cdots, u_k$ be nonzero functions in $H(\mathbb{D})$. If*

$$A(\overline{\mathbb{D}}) \subset \bigcup_{j=1}^{k} (M_{u_j} C_{\varphi_j})(H(\mathbb{D})),$$

then there is j_0 with $1 \le j_0 \le k$ such that $\varphi_{j_0} \in Aut(\mathbb{D})$ and $Z(u_{j_0}) = \emptyset$.

Proof. Let $\Sigma_0 = \{1, 2, \cdots, k\}$,

$$\Sigma_1 = \big\{j \in \Sigma_0 : Z(u_j) \neq \emptyset\big\},$$

$$\Sigma_2 = \big\{j \in \Sigma_0 : \varphi_j \text{ is constant}\big\},$$

$$\Sigma_3 = \big\{j \in \Sigma_0 : \varphi_j \text{ is neither constant nor a finite Blaschke product}\big\},$$

and

$$\Sigma_4 = \big\{j \in \Sigma_0 : \varphi_j \text{ is a finite Blaschke product and } \varphi_j \notin Aut(\mathbb{D})\big\}.$$

Note that some of Σ_i may be empty. To prove our assertion, suppose that either $\varphi_j \notin Aut(\mathbb{D})$ or $Z(u_j) \neq \emptyset$ for any $j \in \Sigma_0$. Then we have $\Sigma_0 = \bigcup_{i=1}^4 \Sigma_i$. We shall find a function $F \in A(\overline{\mathbb{D}})$ such that $F \neq M_{u_i} C_{\varphi_i} g$ for any $i \in \Sigma_0$ and any $g \in H(\mathbb{D})$.

For each $j \in \Sigma_1$, there is $\zeta_j \in \mathbb{D}$ such that

$$u_j(\zeta_j) = 0. \tag{3.1}$$

Associated with the set Σ_3, we shall define a function $p_3 \in A(\overline{\mathbb{D}})$. First, suppose that $\Sigma_3 \neq \emptyset$. For each $j \in \Sigma_3$, there is a sequence $\{z_{j,n}\}_{n \geq 1}$ in $\mathbb{D}$ such that

$$z_{j,n} \to \lambda_j \quad \text{as } n \to \infty \text{ for some } \lambda_j \in \partial\mathbb{D}, \tag{3.2}$$

$$\varphi_j(z_{j,n}) \to \alpha_j \quad \text{as } n \to \infty \text{ for some } \alpha_j \in \mathbb{D} \tag{3.3}$$

and

$$\varphi_j(z_{j,n}) \neq \varphi_j(z_{j,m}) \quad \text{for every } n \neq m. \tag{3.4}$$

By (3.2), we may assume that $\sum_{n=1}^{\infty}(1 - |z_{j,n}|) < \infty$. Since u_i is a nonzero function, moreover we may assume that

$$u_i(z_{j,n}) \neq 0 \quad \text{for every } i \in \Sigma_0 \text{ and } n \geq 1. \tag{3.5}$$

Let b_j be the Blaschke product with zeros $\{z_{j,n}\}_{n \geq 1}$. Let

$$p_3(z) = \prod_{j \in \Sigma_3} b_j(z)(z - \lambda_j). \tag{3.6}$$

Then by (3.2), $p_3 \in A(\overline{\mathbb{D}})$ (see [3, p. 84]). By (3.1) and (3.5), we have that

$$p_3(\zeta_i) \neq 0 \quad \text{for every } i \in \Sigma_1. \tag{3.7}$$

If $\Sigma_3 = \emptyset$, then let $p_3 = 1$.

Associated with the set Σ_4, we shall define a function $q_4 \in A(\overline{\mathbb{D}})$. Suppose that $\Sigma_4 \neq \emptyset$. For each $j \in \Sigma_4$, it is not difficult to find some γ_j and ξ_j in $\mathbb{D}$ such that $\gamma_j \neq \xi_j$,

$$\varphi_j(\gamma_j) = \varphi_j(\xi_j) \tag{3.8}$$

and

$$u_i(\gamma_j) u_i(\xi_j) \neq 0 \quad \text{for every } i \in \Sigma_0. \tag{3.9}$$

Moreover we may assume that

$$p_3(\xi_j) \neq 0 \tag{3.10}$$

and $\{\gamma_j, \xi_j : j \in \Sigma_4\}$ is a set of distinct points. Let

$$q_4(z) = \prod_{j \in \Sigma_4} (z - \gamma_j). \tag{3.11}$$

Then $q_4 \in A(\overline{\mathbb{D}})$ and

$$q_4(\xi_j) \neq 0 \quad \text{for every } j \in \Sigma_4. \tag{3.12}$$

If $\Sigma_4 = \emptyset$, then let $q_4 = 1$.

Finally, we may take $h_2 \in A(\overline{\mathbb{D}})$ such that

$$Z(h_2) = \emptyset \tag{3.13}$$

and

$$h_2 p_3 q_4 \neq c u_i \quad \text{for any } i \in \Sigma_2 \text{ and any } c \in \mathbb{C}. \tag{3.14}$$

Then let $F = h_2 p_3 q_4 \in A(\overline{\mathbb{D}})$.

By the assumption, there exist $j \in \Sigma_0$ and $g \in H(\mathbb{D})$ such that

$$M_{u_j} C_{\varphi_j} g = F = h_2 p_3 q_4, \quad z \in \mathbb{D}. \tag{3.15}$$

Since $h_2 p_3 q_4 \neq 0$, we have $g \neq 0$. To lead a contradiction, we consider it to divide four cases.

Case 1. Suppose that $j \in \Sigma_1$. By (3.1) and (3.15), we have

$$h_2(\zeta_j) p_3(\zeta_j) q_4(\zeta_j) = u_j(\zeta_j) g(\varphi_j(\zeta_j)) = 0.$$

By (3.7) and (3.13), we have $q_4(\zeta_j) = 0$. Hence by (3.11), $\zeta_j = \gamma_i$ for some $i \in \Sigma_4$. By (3.1) and (3.9), $0 = u_j(\zeta_j) = u_j(\gamma_i) \neq 0$. This is a contradiction.

Case 2. Suppose that $j \in \Sigma_2$. Let $\varphi_j(z) = a \in \mathbb{D}$. Then by (3.15) we have $g(a) u_j = h_2 p_3 q_4$. This contradicts with (3.14).

Case 3. Suppose that $j \in \Sigma_3$. Since $b_j(z_{j,n}) = 0$, by (3.6) we have that $p_3(z_{j,n}) = 0$ for every $n \geq 1$. Hence by (3.15), $u_j(z_{j,n}) g(\varphi_j(z_{j,n})) = 0$ for every $n \geq 1$. By (3.5), we have $u_j(z_{j,n}) \neq 0$. Hence $g(\varphi_j(z_{j,n})) = 0$. Since (3.3) and (3.4) hold, by the uniqueness theorem we have $g = 0$. But this is a contradiction.

Case 4. Suppose that $j \in \Sigma_4$. By (3.11) and (3.15), $u_j(\gamma_j) g(\varphi_j(\gamma_j)) = 0$. By (3.9), we have $u_j(\gamma_j) \neq 0$. Hence we have $g(\varphi_j(\gamma_j)) = 0$. Therefore by (3.8), $g(\varphi_j(\xi_j)) = 0$. By (3.15), we have $h_2(\xi_j) p_3(\xi_j) q_4(\xi_j) = 0$. But by (3.10), (3.12) and (3.13), $h_2(\xi_j) p_3(\xi_j) q_4(\xi_j) \neq 0$. This is a contradiction.

As a result, we get the assertion. $\square$

By Theorem 3.1, if $A(\overline{\mathbb{D}}) \subset \bigcup_{j=1}^{k} (M_{u_j} C_{\varphi_j})(H(\mathbb{D}))$, then $\varphi_j \in Aut(\mathbb{D})$ for some j. One may ask that the same conclusion holds if we replace the union sign by the sum sign. We have the following counter-example.

Example 3.2. Let $\varphi_1 = \varphi_2 = z^2$, $u_1 = 1$ and $u_2 = z$. Then $\varphi_1, \varphi_2 \notin Aut(\mathbb{D})$. For $f \in A(\overline{\mathbb{D}})$, we may write

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} z^{2n+1}.$$

Put $f_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} z^n$ and $f_2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} z^n$. Then $f_1, f_2 \in H(\mathbb{D})$. We have $f = f_1(z^2) + z f_2(z^2)$. Hence

$$A(\overline{\mathbb{D}}) \subset (M_{u_1} C_{\varphi_1})(H(\mathbb{D})) + (M_{u_2} C_{\varphi_2})(H(\mathbb{D})).$$

□

Since $C_\varphi(A(\overline{\mathbb{D}})) = A(\overline{\mathbb{D}})$ for every $\varphi \in Aut(\mathbb{D})$, the following is a direct corollary of Theorem 3.1.

Corollary 3.3. *Let X be a subset of $H(\mathbb{D})$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{D})$ and $u \in H(\mathbb{D})$. If $A(\overline{\mathbb{D}}) \subset (M_u C_\varphi)(X)$, then $\varphi \in Aut(\mathbb{D})$, $Z(u) = \emptyset$ and $A(\overline{\mathbb{D}}) \subset (u \circ \varphi^{-1})X$.*

Proof. By Theorem 3.1, $\varphi \in Aut(\mathbb{D})$ and $Z(u) = \emptyset$. We have $A(\overline{\mathbb{D}}) \subset u\{h \circ \varphi : h \in X\}$. Since $A(\overline{\mathbb{D}})$ is Möbius invariant, we have

$$A(\overline{\mathbb{D}}) = A(\overline{\mathbb{D}}) \circ \varphi^{-1} \subset (u \circ \varphi^{-1})\{h \circ \varphi \circ \varphi^{-1} : h \in X\} = (u \circ \varphi^{-1})X.$$

□

When $u = 1$ in Corollary 3.3, we get the following.

Corollary 3.4. *Let X be a subset of $H(\mathbb{D})$ and $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{D})$. If $A(\overline{\mathbb{D}}) \subset C_\varphi(X)$, then $\varphi \in Aut(\mathbb{D})$ and $A(\overline{\mathbb{D}}) \subset X$.*

One may ask also the following: If $A(\overline{\mathbb{D}}) \subset \bigcup_{j=1}^{k} C_{\varphi_j}(X)$, is $A(\overline{\mathbb{D}}) \subset X$? We have the following counter-example.

Example 3.5. Let $\varphi_1 = z^2$ and $\varphi_2 = z$. Let

$$X = \big(A(\overline{\mathbb{D}}) \setminus \{f(z^2) : f \in A(\overline{\mathbb{D}})\}\big) \cup \{f(z^4) : f \in A(\overline{\mathbb{D}})\}.$$

We have $X \subset A(\overline{\mathbb{D}})$ and $z^2 \notin X$. Hence $X \subsetneqq A(\overline{\mathbb{D}})$. We have $C_{\varphi_1}(X) \cup C_{\varphi_2}(X) \subset A(\overline{\mathbb{D}})$. To show the reverse inclusion, let $g \in A(\overline{\mathbb{D}})$. If $g \in X$, then $g \in C_{\varphi_2}(X)$.

Suppose that $g \notin X$. Then $g = h(z^2)$ for some $h \in A(\overline{\mathbb{D}})$. If

$$h \in A(\overline{\mathbb{D}}) \setminus \{f(z^2) : f \in A(\overline{\mathbb{D}})\} \subset X,$$

then $g = C_{\varphi_1} h \in C_{\varphi_1}(X)$. If $h = f(z^2)$ for some $f \in A(\overline{\mathbb{D}})$, then $g = f(z^4) \in X$. This is a contradiction. Thus we get $A(\overline{\mathbb{D}}) \subset C_{\varphi_1}(X) \cup C_{\varphi_2}(X)$. □

4. A generalization

Let $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_k, \cdots \in \mathcal{S}(\mathbb{D})$ and $u_1, u_2, \cdots, u_k, \cdots$ be nonzero functions in $H(\mathbb{D})$. Suppose that

$$A(\overline{\mathbb{D}}) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (M_{u_j} C_{\varphi_j})(H(\mathbb{D})).$$

The authors think that in this case there is $j_0 \geq 1$ such that $\varphi_{j_0} \in Aut(\mathbb{D})$ and $Z(u_{j_0}) = \emptyset$, but we can not prove it. Let $H^\infty(\mathbb{D})$ be the space of bounded analytic functions on $\mathbb{D}$. In the same way as the one in the proof of Theorem 3.1, we may prove the following.

Theorem 4.1. *Let $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \in \mathcal{S}(\mathbb{D})$ and $u_1, u_2, \cdots$ be nonzero functions in $H(\mathbb{D})$. If*

$$H^\infty(\mathbb{D}) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (M_{u_j} C_{\varphi_j})(H(\mathbb{D})),$$

then there is $j_0 \geq 1$ such that $\varphi_{j_0} \in Aut(\mathbb{D})$ and $Z(u_{j_0}) = \emptyset$.

Sketch of proof. In the proof of Theorem 3.1, we may take $\{z_{j,n}\}_{n \geq 1}, j \in \Sigma_3$, as

$$\sum_{j \in \Sigma_3} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_{j,n}|) < \infty$$

and $\{\gamma_j : j \in \Sigma_4\}$ as

$$\sum_{j \in \Sigma_4} (1 - |\gamma_j|) < \infty.$$

Let p_3, q_4 be the Blaschke products with zeros $\{z_{j,n} : j \in \Sigma_3, n \geq 1\}$ and $\{\gamma_j : j \in \Sigma_4\}$, respectively. Then $p_3, q_4(z) \in H^\infty(\mathbb{D})$ and the proof of Theorem 3.1 works if $A(\overline{\mathbb{D}})$ is replaced by $H^\infty(\mathbb{D})$. □

References

[1] C. C. Cowen and B. D. MacCluer, Composition Operators on Spaces of Analytic Functions, CRC Press, Boca Raton, 1995.
[2] J. Garnett, Bounded Analytic Functions, Academic Press, New York, 1981.
[3] K. Hoffman, Banach Spaces of Analytic Functions, Prentice-Hall, N. J, 1962.
[4] J. H. Shapiro, Composition Operators and Classical Function Theory, Springer-Verlag, New York, 1993.

$SO(4)$ 上のある写像について
(A map on $SO(4)$)

新潟大学自然科学系（大学院自然科学研究科）　　羽鳥　理
(Osamu Hatori)

特殊直交群の上の等距離写像について [1] で調べた。4 次元の場合に限って現れる写像の病理学的な知見について述べる。まだ大切な部分が分かっていないためこの写像の存在が無限次元の場合を含めた一般論の展開に対してどのように影響するのか？どのようなことが起こりうるのか？は今後の課題と思われる。4 次の特殊直交群は

$$SO(4) = \{A \in M(4, \mathbb{R}) : A^{tr}A = E, \det A = 1\}$$

である。すると Lie 環は

$$\mathfrak{so}(4) = \{x \in M(4, \mathbb{R}) : x + x^{tr} = 0\}$$

であり

$$SO(4) = \exp \mathfrak{so}(4),$$

である。写像

$$\phi : SO(4) \to SO(4)$$

を

$$\phi(\exp x) = \exp \tilde{x},\ x \in \mathfrak{so}(4)$$

で定める。ただし，

$$\mathfrak{so}(4) \ni x = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix} \text{ に対して，} \tilde{x} = \begin{pmatrix} 0 & a & b & d \\ -a & 0 & c & e \\ -b & -c & 0 & f \\ -d & -e & -f & 0 \end{pmatrix} \ \phi \text{ は well defined であり，}$$

$SO(4)$ からそれ自身への全単射を与え次の可換図式が成り立つ。

$$\begin{array}{ccc} SO(4) & \xrightarrow{\phi} & SO(4) \\ {\scriptstyle \exp\cdot}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \exp\cdot} \\ \mathfrak{so}(4) & \xrightarrow{\tilde{\cdot}} & \mathfrak{so}(4) \end{array}$$

単純な計算により x と $\tilde{x}$ の特性多項式が一致することが分かるので，したがって $x \mapsto \tilde{x}$ は $\mathfrak{so}(4)$ 上の線形等距離写像を与える。$x \mapsto \tilde{x}$ は Morita [4] に現れ（複素数成分の行列を扱っている），Li and Tsing [3] にも現れる（実数成分の場合も記述されている）。上の可換図式において ϕ の

・代数構造
・等距離性
・スペクトル保存性
に興味がもたれる。スペクトル写像定理と $\sigma(\tilde{x}) = \sigma(x),\ x \in \mathfrak{so}(4)$ より

$$\sigma(\phi(A)) = \sigma(\exp\tilde{x}) = \exp(\sigma(\tilde{x})) = \exp(\sigma(x)) = \sigma(A), \quad A = \exp x$$

が分かる。

問題：$\sigma(\phi(A)\phi(B)) = \sigma(AB), \quad A, B \in SO(4)$?

書き直すと： $\sigma(\exp\tilde{x}\exp\tilde{y}) = \sigma(\exp x \exp y),\ x, y \in \mathfrak{so}(4)$?　が問題となる。$\exp x \exp y$ の記述の煩雑さが問題を難しくしている。Baker-Cambell-Hausdorff formula が知られている。すなわち：単連結 Lie 群 G に対して，$\mathfrak{g}$ をその Lie 環とするとき

$$\exp x \exp y = \exp \mathrm{BCH}(x, y)$$

$$\mathrm{BCH}(x, y) = \sum_{n>0} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sum_{r_i + s_i > 0, 1 \le i \le n} \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}(r_i + s_i)\right)^{-1}}{r_1! s_1! \cdots r_n! s_n!} [x^{r_1} y^{s_1} \ldots x^{r_n} y^{s_n}]$$

である。$SO(4)$ に対してはコンパクトな記述が知られている（[2] がオリジナルで，[1] で必要な修正が述べられている）。
Fujii-Suzuki's Baker-Cambell-Hausdorff formula for $SO(4)$

$$\mathrm{BCH}(x, y) = iR^* fs(x, y) R$$

$$\exp x \exp y = \exp iR^* fs(x, y) R$$

$$fs(x,y) = \begin{pmatrix} X_3(x,y) + Y_3(x,y) & Y_1(x,y) - iY_2(x,y) & X_1(x,y) - iX_2(x,y) & 0 \\ Y_1(x,y) + iY_2(x,y) & X_3(x,y) - Y_3(x,y) & 0 & X_1(x,y) - iX_2(x,y) \\ X_1(x,y) + iX_2(x,y) & 0 & -X_3(x,y) + Y_3(x,y) & Y_1(x,y) - iY_2(x,y) \\ 0 & X_1(x,y) + iX_2(x,y) & Y_1(x,y) + iY_2(x,y) & -X_3(x,y) - Y_3(x,y) \end{pmatrix}$$

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -i \\ 0 & -i & -1 & 0 \\ 0 & -i & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} \quad : \text{Makhlin's magic matrix}$$

$fs(x, y)$ において

$$\begin{aligned}
X_1(x,y) =& \alpha_1(x,y)\varphi_1(x) + \beta_1(x,y)\varphi_1(y) - \gamma_1(x,y)(\varphi_2(x)\varphi_3(y) - \varphi_3(x)\varphi_2(y)), \\
X_2(x,y) =& \alpha_1(x,y)\varphi_2(x) + \beta_1(x,y)\varphi_2(y) - \gamma_1(x,y)(\varphi_3(x)\varphi_1(y) - \varphi_1(x)\varphi_3(y)), \\
X_3(x,y) =& \alpha_1(x,y)\varphi_3(x) + \beta_1(x,y)\varphi_3(y) - \gamma_1(x,y)(\varphi_1(x)\varphi_2(y) - \varphi_2(x)\varphi_1(y)), \\
Y_1(x,y) =& \alpha_2(x,y)\psi_1(x) + \beta_2(x,y)\psi_1(y) - \gamma_2(x,y)(\psi_2(x)\psi_3(y) - \psi_3(x)\psi_2(y)), \\
Y_2(x,y) =& \alpha_2(x,y)\psi_2(x) + \beta_2(x,y)\psi_2(y) - \gamma_2(x,y)(\psi_3(x)\psi_1(y) - \psi_1(x)\psi_3(y)), \\
Y_3(x,y) =& \alpha_2(x,y)\psi_3(x) + \beta_2(x,y)\psi_3(y) - \gamma_2(x,y)(\psi_1(x)\psi_2(y) - \psi_2(x)\psi_1(y)).
\end{aligned}$$

$$\varphi_1(x) = \frac{a_{12} + a_{34}}{2},\ \varphi_2(x) = \frac{a_{13} - a_{24}}{2},\ \varphi_3(x) = \frac{a_{14} + a_{23}}{2},\ \psi_1(x) = \frac{a_{12} - a_{34}}{2},\ \psi_2(x) = -\frac{a_{13} + a_{24}}{2},\ \psi_3(x) = \frac{a_{14} - a_{23}}{2}.$$

$$\begin{aligned}
x &= x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + x_3\sigma_3 = (x_1, x_2, x_3), \\
\Phi(x) &= \varphi_1(x)\sigma_1 + \varphi_2(x)\sigma_2 + \varphi_3(x)\sigma_3 = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)), \\
\Psi(x) &= \psi_1(x)\sigma_1 + \psi_2(x)\sigma_2 + \psi_3(x)\sigma_3 = (\psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x)), \quad \sigma_1, \sigma_2\sigma_3\text{:spin matrices of Pauli} \\
\alpha_1(x,y) &= \alpha(\Phi(x), \Phi(y)), \beta_1(x,y) = \beta(\Phi(x), \Phi(y)), \gamma_1(x,y) = \gamma(\Phi(x), \Phi(y)), \\
\alpha_2(x,y) &= \alpha(\Psi(x), \Psi(y)), \beta_2(x,y) = \beta(\Psi(x), \Psi(y)),\ \gamma_2(x,y) = \gamma(\Psi(x), \Psi(y)),
\end{aligned}$$

$$\alpha \equiv \alpha(x,y) = \frac{\sin^{-1}\rho}{\rho} \frac{\sin|x|\cos|y|}{|x|}, \beta \equiv \beta(x,y) = \frac{\sin^{-1}\rho}{\rho} \frac{\cos|x|\sin|y|}{|y|}, \gamma \equiv \gamma(x,y) = \frac{\sin^{-1}\rho}{\rho} \frac{\sin|x|\sin|y|}{|x||y|}$$

$$\rho \equiv \rho(x,y) = \left\{\sin^2|x|\cos^2|y| + \sin^2|y| - \frac{\sin^2|x|\sin^2|y|}{|x|^2|y|^2}(x \cdot y)^2 \quad + \frac{2\sin|x|\cos|x|\sin|y|\cos|y|}{|x||y|}(x \cdot y)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$0 \leq \sin^{-1}\rho \leq \pi, \cos(\sin^{-1}\rho) = \cos|x|\cos|y| - \frac{\sin|x|\sin|y|}{|x||y|}(x \cdot y).$$

であることから $fs(x,y)$ の特性多項式 P_{fs} は

$$P_{fs(x,y)} = t^4 - 2\left\{\sum_{j=1}^{3} X_j(x,y)^2 + \sum_{j=1}^{3} Y_j(x,y)^2\right\}t^2 + \left\{\sum_{j=1}^{3} X_j(x,y)^2 - \sum_{j=1}^{3} Y_j(x,y)^2\right\}^2$$

$$\sum_{j=1}^{3} X_j(x,y)^2 = \sum_{j=1}^{3} X_j(\widetilde{x},\widetilde{y})^2, \sum_{j=1}^{3} Y_j(x,y)^2 = \sum_{j=1}^{3} Y_j(\widetilde{x},\widetilde{y})^2.$$

となるから

$$P_{fs(x,y)} = P_{fs(\tilde{x},\tilde{y})}$$

である。したがって次が分かる。

定理 1. 任意の $A, B \in SO(4)$ に対して $\sigma(\phi(A)\phi(B)) = \sigma(AB)$ と $s(\phi(A) - \phi(B)) = s(A - B)$ が成り立つ。ここで $s(\cdot)$ は特異値を表す。したがって，ϕ は任意の *unitarily invariant norm* から導かれる距離に関して全射等距離写像である。

Proof. $fs(\tilde{x},\tilde{y})$ の特性多項式と，$fs(x,y)$ の特性多項式が等しいので，

$$\begin{aligned}\sigma(\exp\tilde{x}\exp\tilde{y}) &= \sigma(\exp iR^* fs(\tilde{x},\tilde{y})R) \\ &= \exp i(\sigma(fs(\tilde{x},\tilde{y}))) = \exp i(\sigma(fs(x,y))) = \sigma(\exp x \exp y)\end{aligned}$$

である。すると，

$$s(\exp\tilde{x} - \exp\tilde{y}) = s(\exp\tilde{x}\exp(-\tilde{y}) - 1) = s(\exp x \exp(-y) - 1) = s(\exp x - \exp y)$$

である。 また $\mathrm{BCH}(\tilde{x}\tilde{y}) \neq \widetilde{\mathrm{BCH}(x,y)}$ であることを用いると

定理 2. ϕ は *multiplicative*($\phi(AB) = \phi(A)\phi(B)$) でもなく，*anitimultiplicative*($\phi(AB) = \phi(B)\phi(A)$) でもない。

が分かる。一方対称性を保存する写像である。

定理 3. 任意の，$A, B \in SO(4)$ に対して $\phi(AB^{-1}A) = \phi(A)\phi(B)^{-1}\phi(A)$ である。また，*inverse preserving* なので，*Jordan triple preserving*（*i.e.,* $\phi(ABA) = \phi(A)\phi(B)\phi(A)$）である。

証明は非可換 Mazur-Ulam の定理を用いる。省略するので [1] を参照されたい。

問題 1. 以上のように ϕ について代数構造やスペクトル保存性，等距離性がわかったが，その幾何学的な性質の本質は？

参考文献

[1] T. Abe, S. Akiyama and O. Hatori, *Isometries of the special orthogonal group*, Linar Algerbra Appl. **439** (2013), 174–188

[2] K. Fujii and T. Suzuk, *On the magic matrix by Makhlin and the B-C-H formula in SO(4)*, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys., **4** (2007), 897–905

[3] Chi-Kwong Li and Nam-Kiu Tsing, *Duality between some linear preserver problems. III. c-spectral norms and (skew)-symmetric matrices with fixed singular values*, Linear Algebra Appl., **143** (1991), 67–97.

[4] K. Morita, *Schwarz's lemma in a homogeneous space of higher dimensions*, Jap. J. Math. **19** (1944)m 45–56

Reducing subspaces of weighted Hardy spaces on polydisks

札幌静修高等学校　桑原　修平 (Shuhei Kuwahara)

Stessin と Zhu は，1 変数重み付き Hardy 空間における重複度が 2 以上であるシフト作用素の reducing subspace を決定した [2]。[2] の結果をもとに，多変数重み付き Hardy 空間へ拡張した結果の報告である [1]。

1　1 変数の場合の結果

一般に，Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の作用素 T と閉部分空間 $\mathcal{M}$ に対して，$\mathcal{M}$ が T で不変であるとは，$T\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ であることをいう。また，$\mathcal{M}$ が T の *reducing subspace* であるとは，$\mathcal{M}$ が T で不変かつ T^* で不変であることをいう。

2002 年の Stessin と Zhu の論文 [2] では，Hilbert 空間として，単位円板上の解析関数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ で

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \omega_n < \infty$$

満たす重み付き Hardy 空間 $H^2_\omega(\mathbb{D})$ について考察している。ここで $\{\omega_n\}$ は正数列であり，座標関数 z によるかけ算作用素 M_z が有界になるようにあらかじめ固定しておく。さらにここでは，固定した自然数 $N > 1$ に対して，$0 \leq m, n \leq N-1$ が

$$\frac{\omega_{m+kN}}{\omega_m} \neq \frac{\omega_{n+kN}}{\omega_n} \;\; for \; \forall k > 0 \tag{1}$$

を満たすような重みを考える。例えば，$\omega_n = n+1$ とおけば，Dirichlet 空間であり，$\omega_n = (n+1)^{-1}$ とおけば，Bergman 空間であり，この条件を満たす。定理 1 は [2] の結果である。

定理 1. $T = M_z^N$ **の minimal reducing subspace は，**

$$X_n = \mathrm{Span}\{z^{n+kN}; k = 0, 1, 2, \ldots\} \;\; (n = 0, 1, 2, \ldots, N-1)$$

で与えられる。ここで Span **は closed linear span の意味である。また，reducing subspace は** X_n **の直和によって生成される。**

重みが条件 (1) を満たさない場合は，minimal reducing subspace が無数に存在し，reducing subspace はそれらの直和で書かれることがわかっている [2]。

2　主定理

２変数重み付き Hardy 空間について考察する。一般の多変数の場合については，２変数の場合と同様に証明できるからである。

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ は多重指数とする。多重指数の集合に対して，辞書式で順序を入れる。$\{\omega_\alpha\}$ は α を添え字とする正の数の集合とする。２変数重み付き Hardy 空間 $H^2_\omega(\mathbb{D}^2)$ は，$\mathbb{D}^2$ 上の解析関数 $f(z) = \sum_\alpha a_\alpha z^\alpha$ で

$$\|f\|^2 = \sum_\alpha |a_\alpha|^2 \omega_\alpha < \infty$$

を満たす関数からなる空間である。このとき，$H^2_\omega(\mathbb{D}^2)$ はこのノルムにより定まる内積

$$\langle f, g \rangle = \sum_\alpha a_\alpha \overline{b_\alpha} \omega_\alpha$$

により，Hilbert 空間となる。ここで $f(z,w) = \sum_\alpha a_\alpha (z,w)^\alpha, g(z,w) = \sum_\alpha b_\alpha (z,w)^\alpha \in H^2_\omega(\mathbb{D}^2)$ である。

自然数 $N_1 > 1, N_2 > 1$ を固定する。本報告では，座標関数 z, w のかけ算作用素 M_z, M_w に対して，$S_1 = M_z^{N_1}, S_2 = M_w^{N_2}$ の reducing subspace の決定について考える。まず，多重指数の集合

$$I = \{(\alpha_1, \alpha_2); 0 \le \alpha_1 \le N_1 - 1, 0 \le \alpha_2 \le N_2 - 1\}$$

を考える。この集合に同値関係 $\sim$ を，$(m_1, m_2) \sim (n_1, n_2) \Longleftrightarrow$

$$\frac{\omega_{m_1+k_1N_1\ m_2+k_2N_2}}{\omega_{m_1\ m_2}} = \frac{\omega_{n_1+k_1N_1\ n_2+k_2N_2}}{\omega_{n_1\ n_2}}\ for\ \forall k_1, k_2 = 0, 1, 2, \ldots$$

で定義できる。この同値関係により I を同値類に分類できる。

多項式 $p(z,w) = \displaystyle\sum_{(\alpha_1,\alpha_2)\in I} a_{(\alpha_1,\alpha_2)} z^{\alpha_1} w^{\alpha_2}$ が *transparent* であるとは，0 でない係数 $a_{(m_1,m_2)}, a_{(n_1,n_2)}$ について，$(m_1, m_2) \sim (n_1, n_2)$ が成り立つことをいう。

補題 2. **多項式 $p(z,w)$ が transparent ならば，p を含む最小の reducing subspaceX_p は**

$$\mathrm{Span}\{p(z,w) z^{k_1N_1} w^{k_2N_2}; k_1, k_2 = 0, 1, 2, \ldots\}$$

に一致する。

命題 3. **X を reducing subspace とする。X の元 $g(z,w)$ について，$g^{(\alpha_1,\alpha_2)}(0,0) \neq 0$ を満足する指数 (α_1, α_2) で最小のものを (m_1, m_2) とする。極値問題**

$$\sup\{\mathrm{Re} f^{(m_1,m_2)}(0,0); f \in X, \|f\| \le 1\}$$

は一意解をもち，その解は多項式 $G(z,w) = \sum_{\alpha\in I} a_\alpha (z,w)^\alpha$ である。

命題 4. X **を reducing subspace とする。命題 3 における極値問題の解は transparent である。**

命題 5. **多項式** p **が transparent であり，reducing subspace**Y **が** $Y \subset X_p$ **を満たすならば，** $Y = \{0\}$ **または** $Y = X_p$ **である。**

定理 6. **reducing subspace は** $N_1 N_2$ **個を超えない transparent な多項式から生成される。**
（証明の概略）X を reducing subspace とする。命題 3 より，極値問題の解 G が存在する。命題 4 により，G は transparent である。G で生成される reducing subspaceX_G は命題 5 により，minimal である。新たな reducing subspace$X \ominus X_G$ を考える。これを X_1 とおく。X の元 $g(z,w)$ について，$g^{(\alpha_1,\alpha_2)}(0,0) \neq 0$ を満足する指数 (α_1, α_2) で最小のものを (m_1, m_2) とする。$z^{m_1} w^{m_2}$ は X の元であるが，$X_1 = X \ominus X_G$ の元でないことに注意する。$X_1 = X \ominus X_G$ の元 $g(z,w)$ について，$g^{(\alpha_1,\alpha_2)}(0,0) \neq 0$ を満足する指数 (α_1, α_2) で最小のものを (m_1', m_2') としたとき，$(m_1, m_2) < (m_1', m_2')$ であることがわかる。次に X_1 の極値問題を考え，その解を G_1 とする。そして，新たな reducing subspace$X_2 = X \ominus X_{G_1}$ を考える。このように「極値問題の解で生成される reducing subspace の直交補空間を考える操作」を直交補空間が $\{0\}$ になるまで繰り返す。極値問題の解が

$$G(z,w) = \sum_{\alpha \in I} a_\alpha (z,w)^\alpha$$

の形の多項式であり，

$$I = \{(\alpha_1, \alpha_2); 0 \leq \alpha_1 \leq N_1 - 1, 0 \leq \alpha_2 \leq N_2 - 1\}$$

であることから，この「操作」は $N_1 N_2$ 回を超えないことが分かる。従って X は

$$X = \oplus \{X_G | G \text{ は } transparent \text{ な多項式 }\}$$

とかくことができる。

系 7. M_z **と** M_w **での reducing subspace は自明なものに限る。**

例 8. M_z^2 と M_w^2 での reducing subspaceX_{z-w} を考える。$-1 < \beta < \infty$ を満たす実数 β に対して

$$\gamma_n = \frac{n!\Gamma(2+\beta)}{\Gamma(2+\beta+n)}$$

とおくと，重み付き Bergman 空間 $A_\beta^2(\mathbf{D}^2)$ は重み

$$\omega_{\alpha_1\ \alpha_2} = \gamma_{\alpha_1} \gamma_{\alpha_2}$$

をもつ。直接計算することにより，

$$\frac{\omega_{3\ 0}}{\omega_{1\ 0}} \neq \frac{\omega_{2\ 1}}{\omega_{0\ 1}}.$$

であることがわかり，多重指数 $(0,1)$ と $(1,0)$ は同値でないことがわかる。従って，$X_{z-w} = X_z \oplus X_w$ と分解できる。

参考文献

[1] S. Kuwahara, *Reducing subspaces of weighted Hardy spaces on polydisks*, Nihonkai Math J. **25**(2014), 77-83

[2] M. Stessin, K. Zhu, *Reducing subspace of weighted shift operators*, Proc. Amer. Math. soc. **130**(2002), 2631-2639

関数空間 $M^p\,(p \geq 1)$ における乗法的等長写像について

岩手医科大学 教養教育センター　飯田安保 (Yasuo IIDA)
春日一浩 (Kazuhiro KASUGA)

Abstract. [4] において、講演者は p を自然数に限定した場合で関数空間 $M^p(X)$ における（必ずしも線形性を仮定しない）乗法的全射等長写像の構造を決定した。この小文では（p を自然数に限定しないで）$p \geq 1$ における結果を報告する。それは [2, 3, 4] で得られている Smirnov class、Privalov class, $M^p(X)$ $(p \in \mathbb{N})$ における結果とまったく同じである。

1. 準備

$n \geq 1$ とする。$\mathbf{C}^n$ を複素 n 次元 Euclid 空間とし、その点を表す座標を $z = (z_1, \ldots, z_n)$ と書くことにする。unit polydisk を $U^n = \{z \in \mathbf{C}^n : |z_j| < 1,\ \ 1 \leq j \leq n\}$、unit ball を $B_n = \{z \in \mathbf{C}^n : \sum_{j=1}^n |z_j|^2 < 1\}$ とし、$\mathbb{T}^n = \{z \in \mathbf{C}^n : |z_j| = 1,\ \ 1 \leq j \leq n\}$、$S_n = \{z \in \mathbf{C}^n : \sum_{j=1}^n |z_j|^2 = 1\}$ とする。以下、X は U^n か B_n を表し、∂X は $\mathbb{T}^n$ か S_n を表すものとする。また ∂X 上の normalized Lebesgue measure を $d\sigma$ で表す。

X 上の正則関数 f が $\displaystyle\sup_{0 \leq r < 1} \int_{\partial X} \log(1 + |f(rz)|)\, d\sigma(z) < \infty$ を満たすとき f は Nevanlinna class $N(X)$ に属するという。$f \in N(X)$ には有限な nontangential limit が a.e. $z \in \partial X$ で存在することが知られており、これを改めて $f(z)$ で表すものとする。また $f \in N(X)$ が以下の条件を満たすとき f は Smirnov class $N_*(X)$ に属するという：

$$\sup_{0 \leq r < 1} \int_{\partial X} \log(1 + |f(rz)|)\, d\sigma(z) = \int_{\partial X} \log(1 + |f(z)|)\, d\sigma(z).$$

$1 < p < \infty$ とする。X 上の正則関数 f が $\displaystyle\sup_{0 \leq r < 1} \int_{\partial X} (\log(1 + |f(rz)|))^p\, d\sigma(z) < \infty$ を満たすとき f は Privalov class $N^p(X)$ に属するという。以下、簡便のために $N^1(X) = N_*(X)$ と表すことにする。$N^p(X)$ $(p \geq 1)$ 上の距離を

$$d_{N^p(X)}(f, g) = \left(\int_{\partial X} (\log(1 + |f(z) - g(z)|))^p\, d\sigma(z) \right)^{\frac{1}{p}} \quad (f, g \in N^p(X))$$

で定義すると、$N^p(X)$ はこの距離に関して F-algebra（積に関して連続である、線形完備距離空間）であることが知られている。

次に関数空間 $M^p(X)$ を定義しよう。$0 < p < \infty$ に対し、以下を満たす X 上の正則関数 f の全体を $M^p(X)$ で表すことにする：

$$\int_{\partial X} \left(\log \left(1 + \sup_{0 \leq r < 1} |f(rz)| \right) \right)^p d\sigma(z) < \infty.$$

$M^p(X)$ 上の距離を

$$d_{M^p(X)}(f,g) = \left\{ \int_{\partial X} \left(\log \left(1 + \sup_{0 \le r < 1} |f(rz) - g(rz)| \right) \right)^p d\sigma(z) \right\}^{\frac{\alpha_p}{p}} \quad (f, g \in M^p(X))$$

とする（ただし $\alpha_p = \min(1,p)$ とおく）と、$M^p(X)$ はこの距離に関して F-algebra であることがわかっている ([10])。

これらのクラスに対し、以下の包含関係が成り立つことが知られている：

$$H^q(X) \subsetneq N^p(X) = M^p(X) \subsetneq M^1(X) \subsetneq N_*(X) \ \ (0 < q \le +\infty\,,\, p > 1).$$

ここで Hardy space を $H^q(X)$ で表し、そのノルムは $\|\cdot\|_q$ と表記することにする。特に Hardy algebra $H^\infty(X)$ は $N_*(X)$ や $N^p(X)$, $M^p(X)$ において稠密である。

2. $N_*(X)$, $N^p(X)$ における等長写像のこれまでの結果について

Smirnov class $N_*(X)$ における線形等長写像の結果は Stephenson [8] によって得られており、また Privalov class $N^p(X)$ における線形等長写像については、1 変数の場合は Iida-Mochizuki [6] による結果があり、多変数の場合は Subbotin [9,10] の結果が知られている。全射の場合について以上の結果をまとめたものが次の定理である：

定理 2-1

Let $p \ge 1$. $T : N^p(X) \to N^p(X)$ is a surjective linear isometry. Then there exists a holomorphic automorphism Φ on X with $\Phi(0) = 0$ such that $T(f) = \alpha f \circ \Phi$ for all $f \in N^p(X)$ where $\alpha \in \mathbb{C}, |\alpha| = 1$.

さて、$p \ge 1$ に対し $T : N^p(X) \to N^p(X)$ が $T(fg) = T(f)T(g)$ $(f\,,\, g \in N^p(X))$ を満たすとき、T は**乗法的（multiplicative）**であると呼ぶ。Smirnov class $N_*(X)$ における（必ずしも線形ではない）乗法的全射等長写像の結果は Hatori-Iida [2] によって得られており、また Privalov class $N^p(X)$ における（必ずしも線形ではない）乗法的全射等長写像については Hatori-Iida- Stević-Ueki [3] によって得られている。以下がその内容である：

命題 2-2

Let n be a positive integer and let X be either B_n or U^n. Let $p \ge 1$ and suppose that $T : N^p(X) \to N^p(X)$ is a surjective isometry. If T is 2-homogeneous in the sense that $T(2f) = 2T(f)$ holds for every $f \in N^p(X)$, then either

$$T(f) = \alpha f \circ \Phi \text{ for every } f \in N^p(X) \quad \text{or} \quad T(f) = \alpha \overline{f \circ \overline{\Phi}} \text{ for every } f \in N^p(X),$$

where α is a complex number with the unit modulus and for $X = B_n$, Φ is a unitary transformation; for $X = U^n$, $\Phi(z_1, \ldots, z_n) = (\lambda_1 z_{i_1}, \ldots, \lambda_n z_{i_n})$, where $|\lambda_j| = 1$, $1 \le j \le n$ and $(i_1, \ldots, i_n)$ is some permutation of the integers from 1 through n.

定理 2-3

Let n be a positive integer and let X be either B_n or U^n. Let T be a multiplicative (not necessarily linear) isometry from $N^p(X)$ $(p \geq 1)$ onto itself. Then there exists a holomorphic automorphism Φ on X such that either of the following holds:

$$T(f) = f \circ \Phi \text{ for every } f \in N^p(X) \quad \text{or} \quad T(f) = \overline{f \circ \overline{\Phi}} \text{ for every } f \in N^p(X),$$

where Φ is a unitary transformation for $X = B_n$; $\Phi(z_1, \ldots, z_n) = (\lambda_1 z_{i_1}, \ldots, \lambda_n z_{i_n})$ for $X = U^n$, where $|\lambda_j| = 1$ for every $1 \leq j \leq n$ and $(i_1, \ldots, i_n)$ is some permutation of the integers from 1 through n.

以上の命題 2-2 と定理 2-3 の証明において大きな役割を果たしているのが、次の「Mazur-Ulam の定理」と呼ばれるものである（[7]）。

補題 2-4

Let X and Y be normed vector spaces and $U : X \to Y$ be surjective isometry which satisfies $U(0) = 0$. Then U is real-linear.

3. $M^p(X)$ における（乗法的）全射等長写像について

関数空間 $M^p(X)$ $(p > 0)$ における線形全射等長写像の結果は Subbotin [9, 10, 11] によって得られている。その内容は $N^p(X)$ $(p \geq 1)$ のケースとまったく同じである。

定理 3-1

Let $p > 0$. $T : M^p(X) \to M^p(X)$ is a surjective linear isometry. Then there exists a holomorphic automorphism Φ on X with $\Phi(0) = 0$ such that $T(f) = \alpha f \circ \Phi$ for all $f \in M^p(X)$ where $\alpha \in \mathbb{C}, |\alpha| = 1$.

また $M^p(X)$ $(p \in \mathbb{N})$ における（必ずしも線形ではない）乗法的全射等長写像の結果は講演者によって示されている（[4]）。この内容も $N^p(X)$ $(p \geq 1)$ のケースとまったく同じである。

命題 3-2

Let n be a positive integer and let X be either B_n or U^n. Let $p \in \mathbb{N}$ and suppose that $T : M^p(X) \to M^p(X)$ is a surjective isometry. If T is 2-homogeneous in the sense that $T(2f) = 2T(f)$ holds for every $f \in M^p(X)$, then either

$$T(f) = \alpha f \circ \Phi \text{ for every } f \in M^p(X) \quad \text{or} \quad T(f) = \alpha \overline{f \circ \overline{\Phi}} \text{ for every } f \in M^p(X),$$

where α is a complex number with the unit modulus and for $X = B_n$, Φ is a unitary transformation; for $X = U^n$, $\Phi(z_1, \ldots, z_n) = (\lambda_1 z_{i_1}, \ldots, \lambda_n z_{i_n})$, where $|\lambda_j| = 1$, $1 \leq j \leq n$ and $(i_1, \ldots, i_n)$ is some permutation of the integers from 1 through n.

定理 3-3

Let n be a positive integer and let X be either B_n or U^n. Let T be a multiplicative (not necessarily linear) isometry from $M^p(X)$ $(p \in \mathbb{N})$ onto itself. Then there exists a holomorphic automorphism Φ on X such that either of the following holds:

$$T(f) = f \circ \Phi \text{ for every } f \in M^p(X) \quad \text{or} \quad T(f) = \overline{f \circ \overline{\Phi}} \text{ for every } f \in M^p(X),$$

where Φ is a unitary transformation for $X = B_n$; $\Phi(z_1, \ldots, z_n) = (\lambda_1 z_{i_1}, \ldots, \lambda_n z_{i_n})$ for $X = U^n$, where $|\lambda_j| = 1$ for every $1 \leq j \leq n$ and $(i_1, \ldots, i_n)$ is some permutation of the integers from 1 through n.

この小文では（p を自然数に限定しないで）$p \geq 1$ における結果を報告する。それは上述の $N^p(X)$ $(p \geq 1)$, $M^p(X)$ $(p \in \mathbb{N})$ での内容とまったく同じである。

命題 3-4([5])

Let n be a positive integer and let X be either B_n or U^n. Let $p \geq 1$ and suppose that $T : M^p(X) \to M^p(X)$ is a surjective isometry. If T is 2-homogeneous in the sense that $T(2f) = 2T(f)$ holds for every $f \in M^p(X)$, then either

$$T(f) = \alpha f \circ \Phi \text{ for every } f \in M^p(X) \quad \text{or} \quad T(f) = \alpha \overline{f \circ \overline{\Phi}} \text{ for every } f \in M^p(X),$$

where α is a complex number with the unit modulus and for $X = B_n$, Φ is a unitary transformation; for $X = U^n$, $\Phi(z_1, \ldots, z_n) = (\lambda_1 z_{i_1}, \ldots, \lambda_n z_{i_n})$, where $|\lambda_j| = 1$, $1 \leq j \leq n$ and $(i_1, \ldots, i_n)$ is some permutation of the integers from 1 through n.

この命題の証明において、以下の補題を利用する：

補題 3-5([9])

Let $f \in H^p(X)$, $p \geq 1$. Then the norm $||f||_{H^p_m} := \left\{ \int_{\partial X} \sup_{0 \leq r < 1} |f(rz)|^p \, d\sigma(z) \right\}^{\frac{1}{p}}$ is equivalent to the standard norm in $H^p(X)$.

さて $(0, +\infty)$ 上の関数 $\varphi(x)$ が *completely monotone* であるとは、 $\varphi(x)$ が $(0, +\infty)$ 上で無限回微分可能で $(-1)^n \varphi^{(n)}(x) \geq 0$ $(x > 0\,, n \in \mathbb{Z}_+)$ が成り立つときをいう。

補題 3-6([11])

The functions $\left(\dfrac{\log(1+x)}{x} \right)^p$ are completely monotone for all $p > 0$.

補題 3-7([11])

If a completely monotone function $\varphi(x)$ on $(0,+\infty)$ can be continued to an infinitely differentiable function on $[0,+\infty)$, then the inequality

$$\frac{(-1)^n}{x^n}\left\{\varphi(x)-\varphi(0)-\varphi^{'}(0)x-\cdots-\frac{\varphi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}\right\}\geq 0,\quad x>0,$$

holds for any $n\in\mathbb{N}$ and $\varphi^{(n)}(0)\neq 0$ if only φ is not constant.

補題 3-8

Let C be a cone of measurable functions on a measurable space with a measure (G,μ), and let A be a mapping from C to the set of measurable functions. Suppose that A is homogeneous with positive coefficients and

$$\int_G (\log(1+|Af(x)|))^p\,\mu(dx)=\int_G (\log(1+|f(x)|))^p\,\mu(dx),\quad f\in C, \tag{1}$$

for some $p>0$. Then

$$\int_G |Af(x)|^q\,\mu(dx)=\int_G |f(x)|^q\,\mu(dx),\quad f\in C, \tag{2}$$

for all $q=p+l$, where $l\in\mathbb{Z}_+$.

【証明】

[10, Lemma 2] を利用する。A は正の係数について homogeneous なので、(1) を用いて

$$\int_G \frac{(\log(1+t|Af(x)|))^p}{t^p}\,\mu(dx)=\int_G \frac{(\log(1+t|f(x)|))^p}{t^p}\,\mu(dx),\quad f\in C,$$

が任意の $t>0$ に対して成立する。$t\to 0^+$ として以下を得る：

$$\int_G |Af(x)|^p\,\mu(dx)=\int_G |f(x)|^p\,\mu(dx),\quad f\in C.$$

次に帰納法を用いる。$k\in\mathbb{N}$ とし、(2) が $q=p+1,p+2,\cdots,p+k-1$ で成り立つと仮定する。このとき任意の $t>0$ と任意の $f\in C$ に対して

$$\int_G \frac{1}{t^{p+k}}\left\{(\log(1+t|Af(x)|))^p-\sum_{l=0}^{k-1}c_l(t|Af(x)|)^{p+l}\right\}\mu(dx) \tag{3}$$
$$=\int_G \frac{1}{t^{p+k}}\left\{(\log(1+t|f(x)|))^p-\sum_{l=0}^{k-1}c_l(t|f(x)|)^{p+l}\right\}\mu(dx)$$

が成り立つ。ここで c_l は 関数 $(\frac{\log(1+x)}{x})^p$ の原点における Taylor 係数とする。

最初に $f\in L^{p+k}(G,\mu)$ と仮定する。(3) の右辺の被積分関数が、$t\to 0^+$ のとき $c_k|f(x)|^{p+k}$ に収束することが分かる。この被積分関数は符号が一定であることが補題3-6 と補題3-7 より分かり、関数

$C_k|f(x)|^{p+k}$（C_k は定数）によって押さえられる。Lebesgue の収束定理より (3) の右辺は $c_k|f(x)|^{p+k}$ の積分の形に収束する。よって (3) の左辺の極限は有限となり、Fatou の補題から $c_k|Af(x)|^{p+k}$ は可積である。補題 3-6 と補題 3-7 から、任意の k において $c_k \neq 0$ であり、$Af \in L^{p+k}(G,\mu)$ が分かる。同様の操作を考えることにより (3) の左辺は $t \to 0^+$ のとき $c_k|Af(x)|^{p+k}$ の積分の形に収束することが分かる。ゆえに (3) において $t \to 0^+$ の極限を考え、その結果を $c_k \neq 0$ で割ることで (2) が $q = p+k$ において得られる。$Af \in L^{p+k}(G,\mu)$ の場合も同様に示される。$f, Af \notin L^{p+k}(G,\mu)$ について (2) が $q = p+k$ で成り立つのは明らかである。

（証明終）

【命題 3-4 の証明の概略】

$f, g \in H^p(X)$ とする。補題 3-5 と Mazur-Ulam の定理（[7]）を使うことで、[4, Proposition 1] の方法と同様に $T|_{H^p(X)}$ が実線形等長写像であることが確認できる。

次に任意の $f \in M^p(X)$ と、f から生成される cone $C_f := \{\lambda Mf(\zeta) \,|\, \lambda > 0\}$ を考える。ここで $Mf(\zeta) = \sup\limits_{0 \le r < 1} |f(r\zeta)|$ は f に対する radial maximal function である。さらにこの cone について次のような写像を考える：

$$\widetilde{T} : \lambda Mf(\zeta) \;\mapsto\; \lambda M(Tf)(\zeta) = M(T[\lambda f])(\zeta), \quad \zeta \in \partial X, \quad \lambda \ge 0.$$

T は距離 d_{M^p} に関して等長なので、補題 3-8 の仮定が cone C_f において成り立つ。

$T : M^p(X) \to M^p(X)$ は全射等長写像なので、

$$\int_{\partial X} \left(\log \left(1 + \sup_{0 \le r < 1} |f(rz)| \right) \right)^p d\sigma(z) = \int_{\partial X} \left(\log \left(1 + \sup_{0 \le r < 1} |(Tf)(rz)| \right) \right)^p d\sigma(z)$$

から次の式がすべての $l \in \mathbb{Z}_+$ で成り立つ：

$$\int_{\partial X} \left(\sup_{0 \le r < 1} |f(rz)| \right)^{p+l} d\sigma(z) = \int_{\partial X} \left(\sup_{0 \le r < 1} |(Tf)(rz)| \right)^{p+l} d\sigma(z).$$

よって T はノルム H_m^{p+l} ($p > 0,\, l = 0, 1, 2, \cdots$) について等長である。

$d\sigma$ は有限測度なので $\lim\limits_{l \to \infty} ||f||_{H_m^{p+l}} = ||f||_{H_m^\infty}$ が任意の $f \in H^\infty(X)$ で成り立ち、さらに $||f||_{H_m^\infty} = ||f||_\infty$ であることは明らかである。加えて任意の $f \in H^\infty(X)$ で $\|f\|_p = \|T(f)\|_p$ が成り立ち $\lim\limits_{p \to \infty} \|T(f)\|_p = \|T(f)\|_\infty$ なので、任意の $f \in H^\infty(X)$ で $T(f) \in H^\infty(X)$ ならびに $\|f\|_\infty = \|T(f)\|_\infty$ が分かる。同様に $T(f)$ が $H^\infty(X)$ に属するならば $f \in H^\infty(X)$ である。ゆえに $T|_{H^\infty(X)}$ は $\|\cdot\|_\infty$ に関して、$H^\infty(X)$ における全射等長写像である。$H^\infty(X)$ はその極大イデアル空間上の uniform algebra であり、 その極大イデアル空間は「Šilov idempotent theorem」によって連結であるとしてよい。よって [1, Theorem] より $T|_{H^\infty(X)}$ は complex-linear または conjugate linear であることがいえる。以下は [4, Proposition 1] の証明方法に従えばよい。

（証明終）

最後に $M^p(X)\,(p \geq 1)$ における（必ずしも線形ではない）乗法的全射等長写像の結果は以下のように表される。この結果も $N^p(X)\ \ (p \geq 1)$, $M^p(X)\ \ (p \in \mathbb{N})$ のケースとまったく同じである。これは [4, Theorem 2] と同様に示されるので、ここでは証明を行わない。

定理 3-9([5])

Let n be a positive integer and let X be either B_n or U^n. Let T be a multiplicative (not necessarily linear) isometry from $M^p(X)\ \ (p \geq 1)$ onto itself. Then there exists a holomorphic automorphism Φ on X such that either of the following holds:

$$T(f) = f \circ \Phi \text{ for every } f \in M^p(X) \quad \text{or} \quad T(f) = \overline{f \circ \overline{\Phi}} \text{ for every } f \in M^p(X),$$

where Φ is a unitary transformation for $X = B_n$; $\Phi(z_1, \ldots, z_n) = (\lambda_1 z_{i_1}, \ldots, \lambda_n z_{i_n})$ for $X = U^n$, where $|\lambda_j| = 1$ for every $1 \leq j \leq n$ and $(i_1, \ldots, i_n)$ is some permutation of the integers from 1 through n.

【注意】今回の $M^p(X)$ の結果が $0 < p < 1$ で成り立つかどうかはまだ分かっていない。

参考文献

[1] A. J. Ellis, *Real characterizations of function algebras amongst function spaces,* Bull. London Math. Soc. **22** (1990), 381–385.

[2] O. Hatori and Y. Iida, *Multiplicative isometries on the Smirnov class*, Cent. Eur. J. Math. **9(5)** (2011), 1051–1056.

[3] O. Hatori, Y. Iida, S. Stević and S. Ueki, *Multiplicative isometries on F-algebras of holomorphic functions*, Abstract and Applied Analysis **2012** (2012), 16 pages, doi:10.1155/2012/125987.

[4] Y. Iida and K. Kasuga, *Multiplicative isometries on some F-algebras of holomorphic functions*, J. Funct. Sp. Appl. **2013**(2013), 3 pages, Article ID: 681637.

[5] Y. Iida and K. Kasuga, *Multiplicative isometries on classes $M^p(X)$ of holomorphic functions*, 投稿中.

[6] Y. Iida and N. Mochizuki, *Isometries of some F-algebras of holomorphic functions*, Arch. Math. **71** (1998), 297–300.

[7] S. Mazur and S. Ulam, *Sur les transformationes isométriques d'espaces vectoriels normés,* C. R. Acad. Sci., Paris, **194** (1932), 946–948.

[8] K. Stephenson, *Isometries of the Nevanlinna class*, Indiana Univ. Math. J. **26(2)** (1977), 307–324.

[9] A. V. Subbotin, *Linear isometry gropus of Privalov's spaces of holomorphic functions of several variables,* Doklady. Math. **60(1)** (1999), 77–79.

[10] A. V. Subbotin, *Isometriers of Privalov spaces of holomorphic functions of several variables*, J. Math. Sci. **135(1)** (2006), 2794–2802.

[11] A. V. Subbotin, *Groups of linear isometries of spaces M^q of holomorphic functions of several complex variables*, Math. Notes **83(3)** (2008), 437–440.

Yasuo IIDA
Department of Mathematics, Iwate Medical University, Yahaba, Iwate 028-3694, Japan
E-mail: yiida@iwate-med.ac.jp

Kazuhiro KASUGA
E-mail: kazuhiro.kasuga@gmail.com

参加者名簿

氏名 (敬称略)	所　属
阿 部　敏 一	新潟大
飯 田　安 保	岩手医大・教養教育
泉 池　敬 司	新潟大
春 日　一 浩	
川 村　一 宏	筑波大
菊 池　万 里	富山大 理工
桑 原　修 平	札幌静修高等学校
古清水　大直	米子高専
坂 田　繁 洋	早大 GEC
瀬 戸　道 生	島根大
曽布川　拓也	早大 GEC
高 木　啓 行	信州大
田 中　純 一	早大教育
鶴 見　和 之	
富 山　　 淳	都立大
丹 羽　典 朗	日本大・薬学部
荷 見　守 助	茨城大学
羽 鳥　　 理	新大
平 澤　　 剛	茨城大学
細 川　卓 也	茨城大学 工学部
三 浦　　 毅	新潟大
渡 邉　恵 一	新潟大