2013年度 関数環研究集会

報　告　集

2014年 5月

2013 年度の関数環研究集会は，新潟市内にある「クロスパルにいがた 生涯学習センター」にて，2013 年 12 月 11 日 (水)・12 日 (木) の 2 日間，開催されました。大勢の方々にご参加いただき，8 の講演が行われました。2 日間，有意義な情報交換や活発な討論ができ，充実した集会になりました。ご講演くださった皆様をはじめ，ご参加くださった皆様，そして集会にご協力くださいました皆様に心よりお礼申し上げます。

講演者の方々には報告原稿をお書きいただきましたので，ここに取りまとめ，報告集といたします。

世話人：三浦　毅　　　　　　(新潟大学)

2013年度 関数環研究集会 プログラム

12月11日（水）

12月12日（木）

$\exp A$ 上の preserver problem について
(Preserver problems on $\exp A$)

新潟大学自然科学系　　羽鳥　理 (Osamu Hatori)

To the memory of Professor Junzo Wada

1. 背景

目標は以下への解答である．

問題 1. *A, B* を単位的な半単純 *Banach* 環とする．全射線形写像 $\phi : A \to B$ が単位的（$\phi(1) = 1$）かつスペクトルを保存する（$\phi(a)$ のスペクトル $= a$ のスペクトル, $\forall a \in A$）とする．このとき ϕ は *Jordan* 射（$\phi(a^2) = \phi(a)^2$, $a \in A$）か？

この問題は 1970 年に Kaplansky が [25] で言及して以来 Kaplansky の問題とも呼ばれることもあるが，問題意識としてはもっと古くからあったようである．1960 年代後半の Gleason [8], Kahane-Żelazko [24], Żelazko [34] 等の研究により Banach 環が可換の場合には肯定的であることが知られていた．さらに Dieudonné [5] や Frobenius の研究 [7] にまでさかのぼることができる．この問題について Sourour による break through [33] があったのは 1996 年であり Banach 空間上の有界作用素全体の Banach 環について証明された．その後 Aupetit [3] は von Neumann 環の場合も肯定的であることを示した．多くの数学者により研究が続けられていて Harris-Kadison [10] の研究もあるが一般の単位的 C^*-環の場合ですら未解決のまま残されている．可換性に着目した研究もある（cf. [4]）が，決着がついたという知らせは 2014 年 3 月 31 日の時点ではまだない．

スペクトルを保存する写像は可逆元を保存する．したがってスペクトル保存写像は一般線形群（可逆元全体からなる群）間の写像を誘導する．一般線形群の間の各種写像については Kaplansky の問題の解決の前に知っておいてよいようにも思われる（cf. Harris-Kadison [9]）．たとえば等距離写像＝距離を保存する写像，についてはどうか？Banach-Stone の定理に始まり，Kadison によるその非可換化 [22, 23] は 1950 年代前半になされている．線形構造をもつ対象の等距離写像の研究はその後大きく発展して多種の対象に対して多くの結果を得て現在も研究が発展している．一方，一般線形群やその部分構造の間の等距離についての研究はあまり多くないように思われる．調べる必要があるように思ったことがこの研究を始めた動機でもある．

2. 一般線形群の間の等距離写像

Kaplansky の問題が意識にあるので，写像 ϕ に積などの代数構造を仮定することはしたくない．「代数構造の仮定なし」は無謀にも見えかねないが，Mazur-Ulam の定理「距離構造 $>$ 代数構造」がありその限りではないことが分かる．実際に代数構造を仮定せず距離のみを保存する写像について研究を行い，いくつかの結果を得た．「距離構造 $>$ 代数構造」の法則は守られている．一般線形群の間の等距離写像については [11]，[13] でいくつかの結果を得たが，それらは Banach 環全体の上の実線形等距離写像に拡張されることが分かった．一般線形群が連結の場合には Mankiewicz の局所 Mazur-Ulam 定理 [27] により分かっていたことである．一般線形群は連結とは限らない場合でもそうなることが新たに分かった．さらに Banach 環が可換の場合には本質的に乗法的であることが分かった．非可換の場合について，その Jordan 性については C^*-環以外では結論はまだ得られていない．半単純な単位的 Banach 環 A, B の一般線形群を A^{-1}, B^{-1} とする．

問題 2. $\phi : A^{-1} \to B^{-1}$ を全射等距離写像とする．特に $\phi(1) = 1$ ならば ϕ は A から B への実線形 *Jordan* 射に拡張できるか？

可換の場合は [11] で，単位的 C^*-環の場合は Watanabe との共著 [20] で肯定的であることを示した．

3. ユニタリー群の間の等距離写像の構造

単位的可換C*環の間の等距離複素線形写像はBanach環としての荷重付き同形写像である（Banach-Stoneの定理）．単位的可換C*環は関数環に置き換えらることもNagasawaの定理として知られている．KadisonはBanach-Stoneの定理を非可換化した（単位的C*環の間の等距離複素線形写像はJordan $*$-isomorphismに左からunitaryをかけた形をしている）[22, 23]．しかしながらこのような結果は一般のBanach環に対しては期待できない．可換の場合でも、Banach空間としては同形であっても多元環としては同形でない単位的半単純可換Banach環がたくさんある．一方上述のように距離構造が代数構造に言及するというような現象が散見される中で、筆者は単位的Banach環の可逆元からなる群の間の等距離群写像はBanach環の間の等距離実線形写像に拡張できることを示した [11, 13]．特に可換の場合や C^*-環の場合はJordan射になることを示した [11, 20]．またMazur-Ulamの定理の非可換化を行い [15]，その応用としてHilbert空間上のユニタリー群の間の等距離写像の形をMolnárとの共著で決定した [18]．以下で H はHilbert空間，$B(H)$ を H 上の有界作用素全体のBanach環とし，$U(H)$ で H 上のユニタリー群（ユニタリー作用素全体からなる群）とする．作用素どおしの距離は作用素ノルムにより定める．また 1 は H 上の恒等作用素とする．

定理 3.1 ([18])**.** ϕ は $U(H)$ からそれ自身の上への等距離写像とする．このとき H 上の *unitary* または *antiunitary* U が存在して

$$\phi(A) = \phi(1)UAU^*, \quad \forall A \in U(H)$$

または

$$\phi(A) = UA^*U^*, \quad \forall A \in U(H)$$

が成り立つ．

証明は [15] で与えた非可換Mazur-Ulamの定理を用いて $\phi(1)^{-1}\phi(\cdot)$ がJordan3重積をを保存することを示し，このことよりランク1射影間の推移確率を保存する写像を導き，Wignerのunitary or antiunitary theoremを用いてその形を決定し，それを $\phi(1)^{-1}\phi$ に反映させる．証明はかなり大がかりなものであるが [18] か2010年の関数環の報告集にも日本語の詳細な証明がある [12]（定理2.2の記述の中で $\forall A \in B(H)^{-1}$ とあるのは $\forall A \in U(H)$ であるのでここで訂正する）ので参照されたい．

4. 正値可逆作用素全体の間の Thompson 等距離写像（Molnár による先行研究）

ユニタリー群は $B(H)^{-1}$ あるいは $B(H)$ の部分構造として重要なもののひとつであるが，正値作用素全体 $B(H)_+^{-1}$ も非常に重要な部分構造（群ではないが）である．Molnár等 [30, 31] は正値作用素全体の間のThompson距離保存写像を決定した [30, 31]．Thompson距離 $d_T(\cdot,\cdot)$ は実ノルム空間のある種の正凸錐に対して定義されるが，$B(H)$ をはじめとして一般に単位的 C^*-環の正値（可逆）元全体に対してはCPR幾何における測地距離と一致することが知られており（cf. [2]）大切な距離の一つである．実際

$$d_T(A,B) = \|\log A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\|, \qquad A, B \in B(H)_+^{-1}$$

で与えられ，一般の単位的 C^*-環についても同様である．Molnárはその学生であるNagyとともに次を示した [30, 31]．

定理 4.1 ([30, 31]). $\phi : B(H)^{-1} \to B(H)^{-1}$ を全射等 *Thompson* 距離写像とする．このとき H 上の可逆有界複素線形作用素または可逆有界共役線形（*conjugate linear)* 作用素 T が存在して

$$\phi(A) = TAT^*, \qquad A \in B(H)_+^{-1}$$

または

$$\phi(A) = TA^{-1}T^*, \qquad A \in B(H)_+^{-1}$$

が成り立つ．

この定理の逆が成立することは簡単であるから，上記は Thompson 等距離写像を決定した定理である．H の次元が 3 以上の場合と 2 の場合では異なる証明が与えられた．3 次元以上の場合は Molnár により決定されていて [30]，その後 Nagy との共著 [31] で 2 次元の場合も解決された．

ノルムから導かれる距離に関する等距離写像についてその形は，Mankiewicz による局所 Mazur-Ulam の定理などすでに知られている結果を組み合わせると簡単に分かる．実際 $B(H)$ の間の*-同形写像か*-反同形写像の制限であることが分かる．任意の単位的 C^*-環の正値可逆元全体は連結であるから，この場合も同様の方法で Jordan *-同形写像であることが分かる．

5. 単位的 C^*-環の場合

前章までで一般線形群，ユニタリー群，正値作用素全体の空間における等距離写像の形についての結果を紹介したが，それぞれの場合に adhoc な証明が与えられていてまたは $B(H)$ に特有の性質を用いた証明が与えられていた．以下の１～４の方法により単位的 C^*-環のユニタリー群や正値元全体の空間の間の Thompson 等距離写像について統一的に扱うことが可能となった．本章で結果を紹介する．

１．与えられた等距離写像 ϕ の代数構造を記述する（逆 Jordan 積保存写像であること $\phi(ab^{-1}a) = \phi(a)\phi(b)^{-1}\phi(a)$ を示す）．

２．１により適当な 1 係数群が定義でき，その無限小変換（自己共役元）の間の変換 f が等距離写像であることを示す．

３．Kadison の C^*-環の自己共役部分の間の（あるいは問題に応じて対応する空間の間の）等距離写像に関する結果を用いて f の形を記述する．

４．３の結果を利用し ϕ を記述する．

１に対応する命題を非可換 Mazur-Ulam の定理と呼ぶが，いくつかの類型がありすべてをあるいは大多数を包括するような一般的なものはまだ確立されていない．また一般線形群の等距離写像の代数構造を記述できるような形の非可換 Mazur-Ulam の定理もまだない．これらは今後の研究にその解決を委ねたい．ところで $ab^{-1}a$ は a を中心とする b の対称点を表すと考えられる．オリジナルの Mazur-Ulam の定理は等距離写像が代数的中点を保存することを主張する定理とみることができるが，非可換 Mazur-Ulam の定理は対称点を保存することを主張する定理である．線形空間では与えられた 2 点の中点は一意的に定まるが，群では中点がないことやあったとしても複数のこともあり，中点を保存する形の命題は望めない．対称点は一意に定まり，それを保存することを主張するのが非可換 Mazur-Ulam の定理ということになる．[15] の Corollary 3.9 と 3.10 は twisted subgroup に対する非可換 Mazur-Ulam の定理である．説明は煩雑になるのでここでは行わないので詳細は [15] を参照されたい．Corollary 3.9 から次の非可換 Mazur-Ulam の定理が従う．

定理 5.1. B_j を *Banach* 空間とし，G_j を B_j からそれ自身への全射等距離写像（全体とは限らない）からなる群とする（$j = 1, 2$）．$\phi : G_1 \to G_2$ を全射等距離写像とする．このとき $\|U - V\| < 1/2$ であるような任意の $U, V \in G_1$ に対して

$$\phi(UV^{-1}U) = \phi(U)\phi(V)^{-1}\phi(U)$$

が成り立つ．

[18, Theorem 6] では $B_1 = B_2$ の場合の定理と証明が記述されているが，まったく同様に上の定理が証明できる．

定理 5.1 において $\|U - V\| < 1/2$ は本質的な条件であり，$\|U - V\|$ が 1/2 以上の場合には結論が成り立たない．したがってこの定理では局所的な主張が限界である．定理 5.2 などの証明に応用する場合は ”分割の議論 ”（[18, Lemma 7]）で不足分を補うことになる．ユニタリー群に限らず，対象の集合が exp の値域であると ”分割の議論 ”は機能する．von Neumann 環のユニタリー群の間の等距離写像に関しては，Molnár との共著 [19] で定理 5.1 を用いて次の結果を得た．

定理 5.2. *M_j（$j = 1, 2$）を von Neumann 環とする．$\phi : M_{1+}^{-1} \to M_{2+}^{-1}$ を全射とする．ϕ 等距離（ノルム距離に関する）写像であることと次は同値である：M_1 から M_2 の上への Jordan *-同形写像 J と M_2 の中心射影 p が存在して*

$$\phi(a) = \phi(1)(pJ(a) + (1 - p)J(a)^*), \qquad a \in M_{1+}^{-1}.$$

*特に $\phi(1)^{-1}\phi$ は M_1 から M_2 への Jordan *-実同形写像に一意的に拡張できる．*

証明では von Neumann 環 M のユニタリー群が $\exp iM_S$ と一致することが本質的に用いられている．ここで M_S は M の自己共役部分である．一般の単位的 C^*-環の場合にはユニタリー群は連結とは限らない．von Neumann 環の場合と異なり $\phi(1)^{-1}\phi$ が Jordan *-実同形写像に拡張できないような等距離写像 ϕ が存在する．実は，単位的 C^*-環の場合にもユニタリー群の間の等距離写像は [14] で完全に決定され，Jordan *-実同形写像に拡張されるための必要十分条件も記述されたので詳細は [14] を参照されたい．

[15] の Corollary 3.10 を用いると次が得られる．これは [18] の Theorem 9 である．

定理 5.3. *A_j（$j = 1, 2$）を単位的 C^*-環とする．$\phi : A_{1+}^{-1} \to A_{2+}^{-1}$ を全射とする．ϕ が Thompson 等距離写像であると，*

$$\phi(ab^{-1}a) = \phi(a)\phi(b)^{-1}\phi(a), \qquad a, b \in A_{1+}^{-1}$$

が成り立つ．

これが上記の 1 にあたるが，さらに 2，3，4 が実行できて Molnár との共著 [19, Theorem 9] で次を示した．

定理 5.4. *A_j（$j = 1, 2$）を単位的 C^*-環とする．$\phi : A_{1+}^{-1} \to A_{2+}^{-1}$ を全射とする．ϕ が Thompson 等距離写像であることと次は同値である：A_1 から A_2 の上への Jordan *-同形写像 J と A_2 の中心射影 p が存在して*

$$\phi(a) = \phi(1)^{\frac{1}{2}}\left(pJ(a) + (1 - p)J(a)^{-1}\right)\phi(1)^{\frac{1}{2}}, \quad a \in A_{1+}^{-1}.$$

任意の単位的 C^*-環 A について $A_+^{-1} = \exp A_S$, A_S は A_j の自己共役部分，であることが ”分割の議論 ”が機能するなど証明でのポイントのひとつである．

6. 付録：5 章の方法の応用

非可換 Mazur-Ulam の定理と 1 係数群を用いる方法は，特殊直交群の等距離写像の記述や Lipschitz 環に対する非対称にノルムを保存する写像の記述への応用がある．この章ではこれらを紹介する．

まず特殊直交群（特殊直交行列全体の群）の間の等距離写像について [1] の結果を紹介する．$c_1 > 0$ かつ $c_1 \geq c_2 \geq \cdots \geq c_n \geq 0$ であるような実数列に対して n 次正方行列 A の c-スペクトルノルムを

$$\|A\|_c = \sum_{i=1}^{n} c_i \sigma_i(A)$$

により与える．ただし，$\sigma_1(A) \geq \sigma_2(A) \geq \cdots \geq \sigma_n(A)$ は A の特異値である．$c_1 = \cdots = c_k = 1$, $c_{k+1} = \cdots = c_n = 0$ の場合が Ky Fan k-ノルムであり，特に $k = 1$ の場合が作用素ノルムである．

c-スペクトルノルムは unitarily invariant norm であるがそのすべてではない．特殊直交群 $SO(n)$ 上の c-スペクトルノルムから導かれる距離に関する等距離写像について Abe, Akiyama との共著 [1] で以下を示した．$n=4$ のときだけ特殊な形の等距離写像が現れることが分かった．A を 4 次の実歪対象行列とする．$\widetilde{A}$ により A の $(1,4)$ 成分と $(2,3)$ 成分，$(4,1)$ 成分と $(3,2)$ 成分をそれぞれ入れ替えて得られる歪対象行列を表す．以下では E_n は n 次単位行列であり $K(n)$ は実歪対象行列全体の線形空間とする．$K(n)$ は $SO(n)$ の Lie 環であり $SO(n)=\exp K(n)$ である．

定理 6.1. ϕ を特殊直交群 $SO(n)$ からそれ自身への写像とする．$\|\cdot\|_c$ を一つの c-スペクトルノルムとする．このとき次の (i) と (ii) は同値である．
(i) ϕ は $\|\cdot\|_c$ から導かれる距離に関する等距離写像である．
(ii) 直交行列 O が存在して次の (a), (b), (c), (d) のどれかが成り立つ：
 (a) $\phi(X)=\phi(E_n)OXO^{-1}, \quad X\in SO(n)$,
 (b) $\phi(X)=\phi(E_n)OX^{-1}O^{-1}, \quad X\in SO(n)$,
 (c) $n=4$ であり，$\phi(X)=\phi(E_n)O(\exp\widetilde{A})O^{-1}, \quad X=\exp A$ で $A\in K(n)$,
 (d) $n=4$ であり，$\phi(X)=\phi(E_n)O(\exp\widetilde{A})^{-1}O^{-1}, \quad X=\exp A$ で $A\in K(n)$.
このとき ϕ は自動的に全射である．また $\phi(E_n)=E_n$ とすると，ϕ は，(a) の場合には群同形写像になり，(b) の場合には群反同形写像になり，(c) と (d) の場合には群同形写像にも群反同形写像にもならないが，逆 Jordan 積 $(XY^{-1}X)$ を保存する．

(i) から (ii) を導く際に 5 章の 1 から 4 の方法を適用する．ϕ が等距離写像だとする．一般にコンパクト距離空間からそれ自身への等距離写像は自動的に全射なので，今の場合 ϕ も全射である．すると非可換 Mazur-Ulam の定理 [15, Corollary 3.9] と "分割の議論" により $\phi(XY^{-1}X)=\phi(X)\phi(Y)^{-1}\phi(X)$ が任意の $X,Y\in SO(n)$ に対して成立することが分かる．1 係数群の方法で $K(n)$ 環の全射等距離写像が導かれるが Li and Tsing [26] によりその形が決まっている．このことから ϕ は (ii) の (a), (b), (c), (d) のどれかになることが分かる．

(ii) の (a) や (b) から (i) を導くのは容易である．(ii) の (c) または (d) の形の写像が等距離写像になることを示すのには多少の工夫が必要である．Fujii and Suzuki [6] による Baker-Cambel-Hausdorff の公式を用いる．詳細は [1] を参照のこと．

(ii) の (a) または (b) が成り立てば簡単な計算により ϕ は任意の unitarily invariant norm から導かれる距離に関して等距離写像であることが分かる．また任意の $A,B\in K(n)$ に対して $\exp A\exp B$ の固有多項式と $\exp\widetilde{A}\exp\widetilde{B}$ の固有多項式が一致するので（[1, Lemma 8]），このことを用いると (ii) の (c) または (d) より ϕ が任意の unitarily invariant norm から導かれる距離に関して等距離写像であることが分かる．逆が成立するかは分かっていない．

問題 3. *unirarily invariant norm* を任意に与え，それから導かれる距離に関する等距離写像 $\phi: SO(n)\to SO(n)$ は (ii) のどれかの形になるか?

そのような距離についての $K(n)$ からそれ自身への等距離写像が分かれば解決につながるように思われる．

問題 4. $K(4)$ での変換 $A\mapsto\widetilde{A}$，あるいは $SO(4)$ での変換 $\exp A\mapsto\exp\widetilde{A}$ の幾何学的な意味づけ，もしあるなら物理学的な意味づけは何か？

この変換はすでに Morita [32] にあらわれる変換であるが，その本質的な意味が筆者には分かっていない．

Molnár の先駆的な論文 [29] による乗法的にスペクトルを保存する写像の研究を受けて，非対称にノルムを保存する写像の研究は [17] から始まった．非対称に商のノルムを保存する写像の研究は Miura, Honma and shindo [28] が最初のものと思われる．もともとがスペクトルに関係する研究のためノルムとしてはスペクトル半径が考慮されてきた（半単純可換 Banach 環ではスペクトル半径は（完備とは限らない）多元環ノルムを与える）．したがって非対称にノルムを保存する写

像で結ばれるバナッハ環については一般的には多元環として同形であること以上の主張はできない．一方ノルムがオリジナルノルムの場合について考慮すると該当の Banach 環は Banach 環として等距離同型であることまで予想されていたが，Lipschitz 環に対する結果が得られた [16] のでここで紹介する．X をコンパクト距離空間とする．$\mathrm{Lip}(X)$ は X 上の複素数値 Lipschitz 関数全体からなる多元環でノルムを $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty + \|\cdot\|_L$（ここでは Lipschitz ノルムと呼ぶことにする）とすることで半単純単位的可換 Banach 環（Lipschitz 環という）になる．ここで $\|\cdot\|_\infty$ は sup ノルム，$\|\cdot\|_L$ は Lipschitz 定数を表す．$\exp \mathrm{Lip}(X)$ は $\mathrm{Lip}(X)$ の可逆元全体からなる位相群 $\mathrm{Lip}(X)^{-1}$ の主成分（principal component または identity component）である．

定理 6.2. X_j をコンパクト距離空間とし $\mathrm{Lip}(X_j)$ を *Lipschitz* 環とする（$j = 1, 2$）．*Lipschitz* ノルムは $\|\cdot\|_j$ で表す．$\Phi : \exp \mathrm{Lip}(X_1) \to \exp \mathrm{Lip}(X_2)$ とする．このとき次の (i) と (ii) は同値である．
(i) 等式

$$\left\| \frac{g}{f} - 1 \right\|_1 = \left\| \frac{\Phi(g)}{\Phi(f)} - 1 \right\|_2, \quad f, g \in \exp \mathrm{Lip}(X_1)$$

が成り立つ．
(ii) 全射等距離写像 $\phi : X_2 \to X_1$ が存在して，

$$\Phi(f)(y) = \Phi(1)(y) f(\phi(y)), \quad f \in \exp \mathrm{Lip}(X_1),\ y \in X_2,$$

または

$$\Phi(f)(y) = \Phi(1)(y) \overline{f(\phi(y))}, \quad f \in \exp \mathrm{Lip}(X_1),\ y \in X_2,$$

が成り立つ．
したがって (i) または (ii) が成り立つならば，$\Phi(1)^{-1}\Phi$ は $\mathrm{Lip}(X_1)$ から $\mathrm{Lip}(X_2)$ の上の複素線形等距離多元環同型写像または反複素線形等距離多元環同形写像に拡張される．特に，$\mathrm{Lip}(X_1)$ と $\mathrm{Lip}(X_2)$ は Banach 環として同形である．

証明は 5 章の 1 〜 4 の方法を改変して行う．特に 3 については Kadison の定理の代わりに Jarosz の定理 [21, Theorem] を改変したもの [16, Proposition 7] を用いる．

Lipschitz 環以外でも同様の内容を予想できるが，上にならって証明しようとすると 3 の部分に現れる写像の乗法性が一般には成り立たない（Banach-Stone 型定理が成り立つ Banach 環はかなり限られている（cf. [21]）ことがネックになっている．アイディアが必要である．

次の問題は難しくないと思われる．

問題 5. $\Phi : \mathrm{Lip}(X_1)^{-1} \to \mathrm{Lip}(X_2)^{-1}$ の場合はどうか？

次もはるか彼方の問題ではないと思われる．

問題 6. $\Phi : \mathrm{Lip}(X_1) \to \mathrm{Lip}(X_2)$ が全射とする．Φ が

$$\|fg - 1\|_1 = \|\Phi(f)\Phi(g) - 1\|_2, \quad f, g \in \mathrm{Lip}(X_1)$$

を満たすとき $\Phi(1)^{-1}\Phi$ は複素線形等距離多元環同型写像または反複素線形等距離多元環同形写像か？

上記 2 つの問題はノルムをスペクトル半径とした場合には一般の半単純単位的可換 Banach 環に対して解決（問題 6 に関してはもっと一般的な設定のもとで結論はもちろん実線形多元環同形写像）されている [28, 17].

References

[1] T. Abe, S. Akiyama and O. Hatori, *Isometries of the special orthogonal group*, Linear Algebra Appl., **439**(2013), 174–188

[2] E. Andruchow, G. Corach and D. Stojanoff, *Geometrical significance of the Löwner-Heinz inequality,* Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), 1031–1037.

[3] B. Aupetit, *Spectrum-preserving linear mappings between Banach algebras or Jordan-Banach algebras*, J. London Math. Soc., **62**(2000), 917–924
[4] M. Brešar and P. Šemrl, *An extension of the Gleason-Kahane-Żelazko theorem:A possible approach to Kaplansky's problem*, Expo. Math., **26**(2008), 269–277
[5] J. Dieudonné, *Sur une généralization du groupen othogonal à quatre variables*, Arch. Math., **1**(1949), 282–287
[6] K. Fujii and T. Suzuki, *On the magic matrix by Makhlin and the B-C-H formula in $SO(n)$*, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys., **4**(2007), 897–905
[7] G. Frobenius, *Über die darstellung der endlichen gruppen durch lineare substitutionen*, Sitzungsber. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin (1897), 994–1015
[8] A. M. Gleason, *A characterization of maximal ideals*, J. Analyse Math., (1967), 171–172
[9] L. A. Harris and R. V. Kadison, *Affine mappings of invertible operators*, Proc. Amer. Math. Soc., **124**(1996), 2415–2422
[10] L. A. Harris and R. V. Kadison, *Invertibility preserving linear maps of Banach algebras*, Israel Math. Conference Proceedings **15**(2001), 1–8
[11] O. Hatori, *Isometries between groups of invertible elements in Banach algebras*, Studia Math., **194**(2009), 293–304
[12] 羽鳥　理, 等距離写像の代数構造, 2010 年度関数環研究集会報告集, 2011
[13] O. Hatori, *Algebraic properties of isometries between groups of invertible elements in Banach algebras*, J. Math. Anal. Appl., **376**(2011), 84–93
[14] O. Hatori, *Isometries of the unitary groups in C^*-algebras*, Studia Math., **221**(2014), 61–86
[15] O. Hatori, G. Hirasawa, T. Miura and L. Molnár, *Isometries and maps compatible with inverted Jordan triple products on groups*, Tokyo J. Math., **35**(2012), 385-410
[16] O. Hatori, A. Jim'enez-Vargas and M. Villegas-Vallecillos, *Maps which presrve norms of non-symmetrical quotient between groups of exponentials of Lipschitz functions*, J. Math. Anal. Appl., **415**(2014), 825–845
[17] O. Hatori, T. Miura and H. Takagi, *Multiplicatively spectrm-preerving and norm-preserving maps between invertible groups of commutative Banach algebras*, arxive:0904.1939, 2006
[18] O. Hatori and L. Molnár, *Isometries of the unitary group*, Proc. Amer. Math. Soc., **140**(2012), 2127–2140
[19] O. Hatori and L. Molnár, *Isometries of the unitary groups and Thompson isometries of the spaces of the invertible elements in C^*-algebras*, J. Math. Anal. Appl., **409**(2014), 158–167
[20] O. Hatori and K. Watanabe, *Isometries between groups of invertible elements in C^*-algebras*, Studia Math., **194**(2009), 293–304
[21] K. Jarosz, *Isometries in semisimple, commutative Banach algebras*, Proc. Amer. Math. Soc., **94**(1985), 65–71
[22] *Isometries of operator algebras,* Ann. Math. **54** (1951), 325–338.
[23] R. V. Kadison, *A generalized Schwarz inequality and algebraic invariants for operator algebras,* Ann. Math. **56** (1952), 494–503.
[24] Kahane and Żelazko, *A charactrerization of maximal ideals in commutative Banach algebras*, Studia Math., **299**(1968), 339–343
[25] Kaplansky, *Algebraic and analytic aspcets of operator algebras*
[26] Chi-Kwong Li and Nam-Kiu Tsing, *Duality between some linear preserver problems, III. c-spectral norms and (skew)-symmetric matrices with fixed singular values*, Linear Algebra Appl., **143**(1991), 67–97
[27] P. Mankiewicz, *On extension of isometries in normed linear spaces*, Bull. L'Acad. Polonaise Sciences, Ser. des Sciences Math., Astr. Phys., bf 100(1972), 367–371
[28] T. Miura, D. Honma and R. Shindo, *Divisibly norm-preserving maps between commutative Banach algebras*, Rocky Mountain J. Math., **41**(2011), 1675–1699
[29] L. Molnár, *Some characterization of the automorhisms of $B(H)$ and $C(K)$*, Proc. Amer. Math. Soc., **130**(2002), 111–120
[30] L. Molnár, *Thompson isometries of the space of invertible positive operatos*, Proc. Amer. Math. Soc., **137**(2009), 3849–3859
[31] L. Molnár and G. Nagy, *Thompson isometries on poisitive operators;the 2-dimensional case*, Electron. J. Linear Algebra, **20**(2010), 161–174
[32] K. Morita, *Schwarz's lemma in a homogeneous spaces of higher dimensions*, Japanese J. Math., **19**(1944), 45–56
[33] A. R. Sourour, *Invertibility preserving maps on $\mathcal{L}(X)$*, Trans. Amer. Math. Soc., **348**(1996), 13–30
[34] Żelazko, *A characterization of multiplicative linear functionals in complex Banach algebras*, Studia Math., **300**(1968), 83–85

Gyrovector 空間上の Mazur-Ulam の定理

新潟大学自然科学研究科　　阿部　敏一 (Toshikazu Abe)

ニュートン力学では速度全体の集合は３次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ に対応し、和について群を成す。一方、特殊相対論での速度全体の集合（但し、光と同じ速さ c を持つものは除く）は３次元ユークリッド空間上の半径 c の開球 $\mathbb{R}^3_c = \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3 : \|\boldsymbol{u}\| < c\}$ に対応し、特殊相対論における速度の和の演算 $\oplus_E$ は結合法則を満たさない。しかしながら、$(\mathbb{R}^3_c, \oplus_E)$ は (gyrocommutative) gyrogroup の構造を持つことが知らおり、Einstein gyrogroup と呼ばれている。(Gyrocommutative) gyrogroup は (可換) 群を一般化したものである。一部の gyrocommutative gyrogroup はスカラー倍を伴って Gyrovector 空間としての構造を考えることが出来る。実際、$(\mathbb{R}^3_c, \oplus_E)$ はスカラー積 $\otimes_E$ を伴って gyrovector 空間となり、Einstein gyrovector space と呼ばれる。ここでは、このような大事な例を含む gyrovector 空間について考える。Gyrovector 空間は実内積空間の一般化であり、実内積空間と似た様々な構造を持つ。Gyrometric は gyrovector 空間上の構造で、ちょうど実内積空間でのノルムから導かれる距離に対応するものである。

Mazur-Ulam の定理は実ノルム空間から実ノルム空間への全射等距離写像は自動的にその代数構造を保存するということを主張している。ここでは、gyrovector 空間から gyrovector 空間への gyrometric を保存する写像について考えた。Gyrovector 空間から Gyrovector 空間への全射で gyrometric を保存するものは自動的にその代数構造を保存することがわかる。

1　Gyrovector 空間

[1] に基づいて、Gyrovector 空間及びそれに関連する定義を並べる。

定義. [1] S を空でない集合、$+ : S{\times}S{\to}S$ を S 上の二項演算とする。$(S,+)$ を groupoid という。全単射 $\phi : S{\to}S$ が任意の $x,y{\in}S$ で $\phi(x+y) = \phi(x)+\phi(y)$ を満たすとき、ϕ は $(S,+)$ の自己同型写像であるという。$(S,+)$ の自己同型写像全体からなる集合を $\mathrm{Aut}(S,+)$ とかく。

定義. [1] Groupoid $(G,\oplus)$ が次の性質を満たすとき gyrogroup であるという。

(G1) 次を満たす $\mathbf{0} \in G$（左側単位元）が存在する。
$\mathbf{0} \oplus \boldsymbol{a} = \mathbf{0}\ \ \forall \boldsymbol{a} \in G$

(G2) (G1) を満たす $\mathbf{0}{\in}G$ のうち、任意の $\boldsymbol{a}{\in}G$ に対して次を満たす $\ominus\boldsymbol{a}$（$\boldsymbol{a}$ の左側逆元）が存在するものがある。
$\ominus\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{a} = \mathbf{0}$

(G3) 任意の $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}{\in}G$ に対して、次を満たす $\mathrm{gyr}[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]\boldsymbol{c}{\in}G$ が一意に存在する。
$\boldsymbol{a} \oplus (\boldsymbol{b} \oplus \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b}) \oplus \mathrm{gyr}[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]\boldsymbol{c}$

(G4) 任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} {\in} G$ に対して、$\boldsymbol{c} \mapsto \mathrm{gyr}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\boldsymbol{c}$ によって定まる写像 $\mathrm{gyr}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] : G \to G$ は $\mathrm{gyr}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \in \mathrm{Aut}(G, \oplus)$ を満たす。

(G5) 任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} {\in} G$ に対して次が成立する。
$\mathrm{gyr}[\boldsymbol{a} {\oplus} \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}] = \mathrm{gyr}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$

群の記法に習い、$\boldsymbol{a} \oplus (\ominus \boldsymbol{b})$ を $\boldsymbol{a} \ominus \boldsymbol{b}$ と表す。

定義. [1] Gyrogroup$(G, \oplus)$ が任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} {\in} G$ に対して次を満たすとき gyrocommutative であるという。

(G6) $\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b} = \mathrm{gyr}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}](\boldsymbol{b} \oplus \boldsymbol{a})$

（可換）群 G は任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} {\in} G$ に対して $\mathrm{gyr}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ が G 上の恒等写像であるような (gyrocommutative) gyrogroup である。

定義. [1] G を実内積空間 $\mathbb{V}$ の部分集合とする。Gyrocommutative gyrogroup $(G, \oplus)$ とその上のスカラー積 $\otimes : \mathbb{R} \times G \to G$ が以下を満たすとき、$(G, \oplus, \otimes)$ は gyrovector 空間であるという。

(V0) 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in G$ に対して、$\langle \mathrm{gyr}[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]\boldsymbol{a}, \mathrm{gyr}[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]\boldsymbol{b} \rangle = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ が成立する。

(V1) 任意の $\boldsymbol{a} {\in} G$ に対して、$1 \otimes \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$ が成立する。

(V2) 任意の $\boldsymbol{a} \in G,\ r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ に対して、$(r_1 + r_2) \otimes \boldsymbol{a} = (r_1 \otimes \boldsymbol{a}) \oplus (r_2 \otimes \boldsymbol{a})$ が成立する。

(V3) 任意の $\boldsymbol{a} \in G \backslash,\ r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ に対して、$(r_1 r_2) \otimes \boldsymbol{a} = r_1 \otimes (r_2 \otimes \boldsymbol{a})$ が成立する。

(V4) 任意の $\boldsymbol{a} \in G \setminus \{\boldsymbol{0}\},\ r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して、$\dfrac{|r| \otimes \boldsymbol{a}}{\|r \otimes \boldsymbol{a}\|} = \dfrac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|}$ が成立する。

(V5) 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{a} \in G,\ r \in \mathbb{R}$ に対して、$\mathrm{gyr}[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}](r \otimes \boldsymbol{a}) = r \otimes \mathrm{gyr}[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]\boldsymbol{a}$ が成立する。

(V6) 任意の $\boldsymbol{v} \in G,\ r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ に対して、$\mathrm{gyr}[r_1 \otimes \boldsymbol{v}, r_2 \otimes \boldsymbol{v}]$ は G 上の恒等写像である。

(VV) $\|G\| = \{\pm\|\boldsymbol{a}\| \in \mathbb{R}\} : \boldsymbol{a} \in G\}$ は $\oplus$ を和、$\otimes$ をスカラー積とし、以下を満たすような 1 次元実線形空間である。

(V7) 任意の $\boldsymbol{a} \in G,\ r \in \mathbb{R}$ に対して、$\|r \otimes \boldsymbol{a}\| = |r| \otimes \|\boldsymbol{a}\|$ を満たす。

(V8) 任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in G$ に対して、$\|\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b}\| \leq \|\boldsymbol{a}\| \oplus \|\boldsymbol{b}\|$ を満たす。

Gyrovector 空間上の gyrometric ϱ は次で与えられる。

$$\varrho(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \| \ominus \boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b}\| \quad \forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} {\in} G$$

Gyrogroup $(G, \oplus)$ を扱う上で、G 上に gyrocoaddition と呼ばれる演算 $\boxplus$ を考えると便利である。$(G, \oplus)$ の gyrocoaddition $\boxplus$ は次のように定義される。

$$\boldsymbol{a} \boxplus \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \oplus gyr[\boldsymbol{a}, \ominus \boldsymbol{b}]\boldsymbol{b}$$

Gyrovector 空間 $(G, \oplus, \otimes)$ 上の点 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in G$ に対して

$$M(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \frac{1}{2} \otimes (\boldsymbol{a} \boxplus \boldsymbol{b})$$

を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の gyromidpoint という。

実内積空間 $\mathbb{V}$ はそれ自身が gyrovector 空間となり、そのときの gyrometric は $\mathbb{V}$ の内積によって定まるノルムから導かれる距離となる。また、gyromidpoint は通常の線形空間の意味での中点 $(a+b)/2$ と一致する。

2 Mazur-Ulam の定理

定理. (Mazur-Ulam の定理) T を実ノルム空間 A から実ノルム空間 B への全射等距離写像とする。このとき、T は中点を保存する。すなわち、

$$T(\frac{a+b}{2}) = \frac{T(a)+T(b)}{2} \quad \forall a, b \in A$$

ここからただちに T は実線形写像 T_0 を用いて $T = T(0) + T_0$ と表わせることがわかる。2003 年に Väisälä はこの Mazur-Ulam の定理により簡潔な証明を与えた（[4]）。この証明は、ノルム空間上の点 x に対して、点 z を中心とした対称な点 $\psi_z(x) = 2z - x$ を対応させる写像 ψ_z が持つ"よい性質"を利用したものである。

3 Gyrovector 空間上の Mazur-Ulam の定理

次が今回得られた結果である。

定理. T を gyrovector 空間 G_1 から gyrovector 空間 G_2 への gyrometric を保存する全射とする。このとき、T は gyromidpoint を保存する。すなわち、

$$T(\frac{1}{2} \otimes (\boldsymbol{a} \boxplus \boldsymbol{b})) = \frac{1}{2} \otimes (T(\boldsymbol{a}) \boxplus T(\boldsymbol{b})) \quad \forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in G_1$$

証明の概略. Gyrovector 空間 G 上の点 $\boldsymbol{z}$ に対して、G 上の写像 $\phi_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{x}) = 2\boldsymbol{z} \ominus \boldsymbol{x}$ を考える。$\phi_{\boldsymbol{z}}$ が以下の"良い性質"を持っていることを確かめる。

(p1) $\phi_{\boldsymbol{z}}^{-1} = \phi_{\boldsymbol{z}}$

(p2) $\|\phi_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{x}) \ominus \phi_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{y})\| = \|\boldsymbol{x} \ominus \boldsymbol{y}\|$

(p3) $\phi_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \Leftrightarrow \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}$

(p4) $\boldsymbol{z} = M(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ ならば $\phi_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$ かつ $\phi_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}$

(p5) $\|\phi_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{x}) \ominus \boldsymbol{x}\| = 2 \otimes \|\boldsymbol{x} \ominus \boldsymbol{z}\|$

この $\phi_{\boldsymbol{z}}$ がノルム空間の場合の ψ_z に対応する写像となる。あとは Väisälä による Mazur-Ulam の定理の証明と同様の議論で示せる。□

上の結果から次のことがわかる

系. T を gyrovector 空間 G_1 から gyrovector 空間 G_2 への gyrometric を保存する全射とする。T は次の性質を満たす T_0 を用いて $T = T(\mathbf{0}) \oplus T_0$ で表せる。

$$T_0(\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b}) = T_0(\boldsymbol{a}) \oplus T_0(\boldsymbol{b}) \quad \forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in G_1$$

$$T_0(\alpha \otimes \boldsymbol{a}) = \alpha \otimes T_0(\boldsymbol{a}) \quad \forall \boldsymbol{a} \in G_1, \alpha \in \mathbb{R}$$

参考文献

[1] A. A. Unger, *Analytic Hyperbolic Geometry and Albert Einstein's Special Theory of Relativity*, World Scientific, (2008)

[2] Michael A. Carchidi, *Generating exotic-looking vector spaces*, College Math. J., **29(4)** (1998), 304-308

[3] A. Vogt, *Maps which preserve equality of distance*, Studia Math., **45** (1973), 43-48

[4] J. Väisälä, *A Proof of the Mazur-Ulam Theorem*, Amer. Math. Monthly, **110** (2003), 102303

関数環上のある種のスペクトル保存写像の構造, II

新潟大学　　三浦　毅 (Takeshi Miura)

1　研究動機

Molnár [7] によって盛んになったと思われる乗法的スペクトル保存写像の研究は，最近の発展を除けば重複する事柄となるので詳細は割愛し，例えば昨年度の関数環研究集会報告集 pp.35–39 をご参照頂きたい．本報告の研究動機を簡単に述べれば，昨年度の報告結果には証明の技術的な問題のため本質的でない仮定を必要としたが，その仮定を取り除いたとしても類似の結果が得られるのではないか，という問題意識にある．昨年度の研究結果を再掲載するために必要な準備をする．

$C_0(K)$ により局所コンパクト Hausdorff 空間 K 上で定義された複素数値連続関数で，無限遠点で 0 になるもの全体を表す．$C_0(K)$ は各点での和・積・スカラー倍と $\|f\|_\infty = \sup_{k \in K} |f(k)|$ に関して可換 Banach 環となる．$C_0(K)$ の閉部分多元環 A が関数環とは，$\forall k_1, k_2 \in K$: $k_1 \neq k_2$ に対して $0 \neq f(k_1) \neq f(k_2)$ をみたす $f \in A$ が存在することである；特に K がコンパクトであるときには，A はさらに定数関数を含むことを仮定する．$f \in A$ に対し f の periphral spectrum $\sigma_\pi(f)$ を以下で定義する：

$$\sigma_\pi(f) = \{\lambda \in \sigma(f) : |\lambda| = \|f\|_\infty\}$$

ただし $\sigma(f)$ は f のスペクトルである．

以上の準備のもと，昨年度報告した結果を再掲載する．

定理 1 *F, A, B をそれぞれ局所コンパクト Hausdorff 空間上の関数環とする．全射 $S_n \colon F \to A$ 及び $T_n \colon F \to B$ $(n = 1, 2)$ が*

$$\|S_n(f)\|_\infty = \|T_n(f)\|_\infty \qquad (f \in F,\ n = 1, 2) \tag{1}$$

及び

$$\sigma_\pi(S_1(f)S_2(g)) \subset \sigma_\pi(T_1(f)T_2(g)) \qquad (f, g \in F)$$

をみたせば，連続写像 $\alpha \colon \mathrm{Ch}(B) \to \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ 及び同相写像 $\phi \colon \mathrm{Ch}(B) \to \mathrm{Ch}(A)$ が存在して

$$T_1(f)(y) = \alpha(y) S_1(f)(\phi(y)) \qquad (f \in F,\ y \in \mathrm{Ch}(B))$$

$$T_2(f)(y) = \overline{\alpha(y)} S_2(f)(\phi(y)) \qquad (f \in F,\ y \in \mathrm{Ch}(B))$$

が成り立つ．ただし $\mathrm{Ch}(A), \mathrm{Ch}(B)$ はそれぞれ A, B の Choquet 境界である．

2　主定理

冒頭に述べた『証明の技術的な問題のために必要とした仮定』が定理 1 の条件 (1) である．仮定 (1) を取り除いたとしても類似の結果が得られることは容易に想像されるが，それを可能とするための鍵が次の補題である．

補題 2 *F, A, B を局所コンパクト Hausdorff 空間上の関数環とし，全射 $S_n\colon F \to A,\ T_n\colon F \to B$ $(n = 1, 2)$ が*

$$\|S_1(f)S_2(g)\|_\infty = \|T_1(f)T_2(g)\|_\infty \qquad (\forall f, g \in F)$$

をみたすとする．$a, b \in F,\ n \in \{1, 2\}$ に対して $|S_n(a)(x)| \le |S_n(b)(x)|$ $(\forall x \in \mathrm{Ch}(A))$ が成り立てば $|T_n(a)(y)| \le |T_n(b)(y)|$ $(\forall y \in \mathrm{Ch}(B))$ となる．

定理 1 の条件 (1) を仮定しなければ，一般に $S_n(f)$ と $T_n(f)$ のノルムは異なり，$T_1(f)(y) = \alpha(y)S_1(f)(\phi(y))$ が成り立ったとしても $|\alpha(y)| = 1$ となることは期待出来ない．実際，条件 (1) を仮定しない場合も定理 1 と類似の結果が成り立つことが分かり，次が示された．

定理 3 *$F,\ A,\ B$ をそれぞれ局所コンパクト Hausdorff 空間上の関数環とする．全射 $S_n\colon F \to A$ 及び $T_n\colon F \to B$ $(n = 1, 2)$ が*

$$\sigma_\pi(S_1(f)S_2(g)) \subset \sigma_\pi(T_1(f)T_2(g)) \qquad (f, g \in F)$$

をみたせば，連続写像 $\alpha\colon \mathrm{Ch}(B) \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 及び同相写像 $\phi\colon \mathrm{Ch}(B) \to \mathrm{Ch}(A)$ が存在して

$$T_1(f)(y) = \alpha(y)S_1(f)(\phi(y)) \qquad (f \in F,\ y \in \mathrm{Ch}(B))$$

$$T_2(f)(y) = \frac{1}{\alpha(y)}S_2(f)(\phi(y)) \qquad (f \in F,\ y \in \mathrm{Ch}(B))$$

が成り立つ．

定理 3 はさらに抽象化される．その結果を述べるために若干の準備を必要とする．A を局所コンパクト Hausdorff 空間上の関数環とする．A の部分集合 $\mathcal{S}$ が乗法的であるとは任意の $f, g \in \mathcal{S}$ に対して $fg \in \mathcal{S}$ が成り立つことである，A の部分集合 $\mathcal{S}$ の weak peak point を関数環 A と同様に定義し，その全体を $p(\mathcal{S})$ で表す．このとき $p(A) = \mathrm{Ch}(A) \neq \emptyset$ であるが，一般に A の部分集合 $\mathcal{S}$ に対しては $p(\mathcal{S}) \neq \emptyset$ とは限らない．いま $p(\mathcal{S}) \neq \emptyset$ とする．$h \in \mathcal{S}$ が $\mathcal{S}$ の peaking function であるとは $\sigma_\pi(h) = \{1\}$ をみたすことである．$x \in p(\mathcal{S})$ に対して $h(x) = 1$ をみたす $\mathcal{S}$ の peaking function 全体を $P_{\mathcal{S}}(x)$ で表す．$\mathcal{S}$ が Bishop property をもつとは，$f(x) \neq 0$ をみたす任意の $x \in p(\mathcal{S}),\ f \in A$ に対して $\sigma_\pi(fh) = \{f(x)\}$ となる $h \in P_{\mathcal{S}}(x)$ が存在することである．

定理 4 *$\mathcal{F}$ を任意の集合とし，$A,\ B$ をそれぞれ局所コンパクト Hausdorff 空間上の関数環とする．$\mathcal{S} \subset A,\ \mathcal{T} \subset B$ は Bishop property をもち,，$p(\mathcal{S}) = \mathrm{Ch}(A),\ p(\mathcal{T}) = \mathrm{Ch}(B)$ をみたす乗法的部分集合とする．このとき全射 $S_1, S_2\colon \mathcal{F} \to \mathcal{S}$ 及び $T_1, T_2\colon \mathcal{F} \to \mathcal{T}$ が*

$$\sigma_\pi(S_1(a)S_2(b)) \subset \sigma_\pi(T_1(a)T_2(b)) \qquad (a, b \in \mathcal{F})$$

をみたせば，連続写像 $\alpha\colon \mathrm{Ch}(B) \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 及び同相写像 $\phi\colon \mathrm{Ch}(B) \to \mathrm{Ch}(A)$ が存在して

$$T_1(a)(y) = \alpha(y) S_1(a)(\phi(y)) \qquad (a \in \mathcal{F},\ y \in \mathrm{Ch}(B))$$

$$T_2(a)(y) = \frac{1}{\alpha(y)} S_2(a)(\phi(y)) \qquad (a \in \mathcal{F},\ y \in \mathrm{Ch}(B))$$

が成り立つ．

Bishop property をもち $p(\mathcal{S}) = \mathrm{Ch}(A)$ をみたす関数環 A の乗法的部分集合 $\mathcal{S}$ の例として A 自身，A の単位球 $\{f \in A : \|f\|_\infty \leq 1\}$，$1 \in A$ のとき $\exp A$ や Lipschitz algebra がある．定理 4 の特別な場合として $\mathcal{F} = \mathcal{S}$, $S_1 = S_2 = \mathrm{Id}$ を考えれば次が成り立つ．

系 5 *A, B をそれぞれ局所コンパクト Hausdorff 空間上の関数環とする．$\mathcal{S} \subset A$, $\mathcal{T} \subset B$ は Bishop property をもち,，$p(\mathcal{S}) = \mathrm{Ch}(A)$, $p(\mathcal{T}) = \mathrm{Ch}(B)$ をみたす乗法的部分集合とする．このとき全射 $U_1, U_2\colon \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ が*

$$\sigma_\pi(fg) \subset \sigma_\pi(U_1(f)U_2(g)) \qquad (f, g \in \mathcal{S})$$

をみたせば，連続写像 $\alpha\colon \mathrm{Ch}(B) \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 及び同相写像 $\phi\colon \mathrm{Ch}(B) \to \mathrm{Ch}(A)$ が存在して

$$U_1(f)(y) = \alpha(y) f(\phi(y)) \qquad (f \in \mathcal{S},\ y \in \mathrm{Ch}(B))$$

$$U_2(f)(y) = \frac{1}{\alpha(y)} f(\phi(y)) \qquad (f \in \mathcal{S},\ y \in \mathrm{Ch}(B))$$

が成り立つ．

系 5 は [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10] の結果の拡張である．その意味で系 5 を抽象的に述べた定理 4 は興味深いといえるが，一方において定理 4 は単なる抽象化になっていないかは考慮すべきであろう．実際，定理 4 の証明には本質的に関数環とその peaking functions が用いられており，peaking functions を豊富に含まないような可換 Banach 環に対して類似の結果が成り立つのかは筆者には不明である．このような状況で関数環と無関係な任意の集合 $\mathcal{F}$ を定義域とする写像について，その構造が解明されるのは逆におかしなこととも思えていた．このような漠然とした疑問を抱えていたが，系 5 から定理 4 を導くことが出来ればこの疑問は解決される．すなわち系 5 は定理 4 の特別な場合ではなく本質的な状況を端的に表していて，逆に系 5 を抽象的に表したものが定理 4 ではないだろうか．この考えが正しいことは次のようにして確かめられる．

注意 1 $S_1, S_2\colon \mathcal{F} \to \mathcal{S}$, $T_1, T_2\colon \mathcal{F} \to \mathcal{T}$ を定理 *4* の条件をみたす全射とする．このとき $a, b \in \mathcal{F}$ に対して $S_1(a) = S_1(b)$ ならば $T_1(a) = T_1(b)$ が成り立つことが示される．このことを用いて写像 $U_1\colon \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ を

$$U_1(f) = T_1(S_1^{-1}(f)) \qquad (f \in \mathcal{S})$$

により定めると U_1 は *well-defined* であることが分かる．同様にして $U_2\colon \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ を定義すると，T_1, T_2 が全射であるから U_1, U_2 も全射である．また $\sigma_\pi(S_1(a)S_2(b)) \subset \sigma_\pi(T_1(a)T_2(b))$ であるから，任意の $f, g \in \mathcal{S}$ に対して $a \in S_1^{-1}(f)$, $b \in S_2^{-1}(g)$ をとれば

$$\sigma_\pi(fg) = \sigma_\pi(S_1(a)S_2(g)) \subset \sigma_\pi(T_1(a)T_2(b)) = \sigma_\pi(U_1(f)U_2(g))$$

つまり $\sigma_\pi(fg) \subset \sigma_\pi(U_1(f)U_2(g))$ $(f, g \in \mathcal{S})$ が成り立つ．よって系 *5* より

$$U_1(f)(y) = \alpha(y)f(\phi(y)), \quad U_2(f)(y) = \frac{1}{\alpha(y)}f(\phi(y)) \qquad (f \in \mathcal{S},\, y \in \mathrm{Ch}(B))$$

をみたす連続写像 $\alpha\colon \mathrm{Ch}(B) \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 及び同相写像 $\phi\colon \mathrm{Ch}(B) \to \mathrm{Ch}(A)$ が存在する．最後に，任意の $a \in \mathfrak{F}$ に対して $S_1(a) = f$ とすれば $U_1(f) = T_1(a)$ であるから $T_1(a)(y) = \alpha(y)S_1(a)(\phi(y))$ が任意の $y \in \mathrm{Ch}(B)$ に対して成り立つ．同様にして $T_2(a)(y) = S_2(a)(\phi(y))/\alpha(y)$ を得る．以上により定理 *4* は系 *5* から導かれることが示された．

参考文献

[1] O. Hatori, T. Miura, H. Oka and H. Takagi, *Peripheral multiplicativity of maps on uniformly closed algebras of continuous functions which vanish at infinity*, Tokyo J. Math. **32** (2009), 91–104.

[2] O. Hatori, T. Miura and H. Takagi, *Characterizations of isometric isomorphisms between uniform algebras via nonlinear range-preserving property*, Proc. Amer. Math. Soc., **134** (2006), 2923–2930.

[3] D. Honma, *Surjections on the algebras of continuous functions which preserve peripheral spectrum*, Contemp. Math., **435** (2007), 199–205.

[4] J. Johnson and T. Tonev, *Spectral conditions for composition operators on algebras of functions*, Commun. Math. Appl., **3** (2012), 51–59.

[5] K. Lee and A. Luttman, *Generalizations of weakly peripherally multiplicative maps between uniform algebras*, J. Math. Anal. Appl. **375** (2011), 108–117.

[6] A. Luttman and T. Tonev, *Uniform algebra isomorphisms and peripheral multiplicativity*, Proc. Amer. Math. Soc., **135** (2007), 3589–3598.

[7] L. Molnár, *Some characterizations of the automorphisms of $B(H)$ and $C(X)$*, Proc. Amer. Math. Soc., **130** (2002), 111–120.

[8] N. V. Rao and A. K. Roy, *Multiplicatively spectrum-preserving maps of function algebras*, Proc. Amer. Math. Soc., **133** (2005), 1135–1142.

[9] N. V. Rao and A. K. Roy, *Multiplicatively spectrum-preserving maps of function algebras. II*, Proc. Edinburgh Math. Soc., **48** (2005), 219–229.

[10] T. Tonev, *Weak multiplicative operators on function algebras without units*, Banach Center Publ., **91** (2010), 411–421.

Singular inner functions and division problem in $H^\infty + C$

日本大学薬学部　　丹羽 典朗 (Norio NIWA)

以下の記号を用いる．

$D = \{z : |z| < 1\}$　：単位開円板

H^∞　：D 上の有界な正則関数からなる Banach 環

$M(H^\infty)$　：H^∞ の極大イデアル空間，H^∞ 上の (nonzero な) 乗法的な有界線形汎関数全体

D の各点は乗法的な有界線形汎関数とみる事ができるので，$D \subset M(H^\infty)$ である．また，D は $M(H^\infty)$ の open dense subset である事が知られている．$f \in H^\infty$ と，f の境界関数と，f の Gelfand 変換を同一視する．

$|\psi(e^{i\theta})| = 1$ a.e. を満たす $\psi \in H^\infty$ を inner function という．inner function は，絶対値 1 の定数を除いて，Blaschke 積と singular inner function の積に一意に分解する事ができる．

$$B(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{-z_n}{|z_n|} \frac{z - z_n}{1 - \bar{z}_n z} \qquad \text{：Blaschke 積}$$

$$\psi_\mu(z) = \exp\left(-\int_{\partial D} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\mu(\theta)\right) \qquad \text{：singular inner function}$$

ここで，$d\mu$ は ∂D 上の Lebesgue measure $d\theta$ に対して singular である．

$H^\infty + C$　：H^∞ を真に含む最小の Douglas 環

$M(H^\infty + C)$　：$H^\infty + C$ の極大イデアル空間

$M(H^\infty + C) = M(H^\infty) \setminus D$ である．$f \in H^\infty$ に対して，

$$\{|f| < 1\} := \{x \in M(H^\infty) \setminus D : |f(x)| < 1\}$$
$$Z(f) := \{x \in M(H^\infty) \setminus D : f(x) = 0\}$$

とおく．

Guillory and Sarason の論文 [3] では，$H^\infty + C$ における割り算の可能性について考察しており，5 つの open problems が載っている．定理の一つは次のようなものである．

Theorem. ψ を inner function とし，$f \in H^\infty$ とする．そのとき，次の条件は同値である．

(i) $f/\psi^n \in H^\infty + C, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$

(ii) $f\ (1 - |\psi|) = 0$ on $M(H^\infty + C)$

(iii) $\lim_{|z| \to 1} f(z)(1 - |\psi(z)|) = 0$

この定理は，$\{|\psi| < 1\} \subset Z(f) \implies f/\psi^n \in H^\infty + C\ (n = 1, 2, \cdots)$ と言っているので，$H^\infty + C$ における割り算の可能性を見るためには，$M(H^\infty) \setminus D$ における関数の絶対値が 1 より小さい値をとる集合 $\{|\cdot| < 1\}$ および零点集合 $Z(\cdot)$ を詳しく調べる必要がある事を示唆している．

5 つの open problems のうち，2 つを書き記しておく．

Problem 1. Can two distinct singular functions divide each other in H^∞ + C ?

Problem 2. Does there exists, for each inner functions ψ, a singular inner function which is divisible in $H^\infty + C$ by all positive powers of ψ ?

Problem 2 は 1984 年に Gorkin により肯定的に解決されている ([2])．Problem 1 は，

$$\frac{\psi_\nu}{\psi_\mu} \in H^\infty + C,\ \frac{\psi_\mu}{\psi_\nu} \in H^\infty + C$$

を満たす singular inner functions ψ_μ, ψ_ν は存在するか？と聞いている．私の知る限り，Problem 1 は open のままである．

M_s^+ ：$d\theta$ に関して singular であるような，∂D 上の finite positive measures の集合

$\mu \in M_s^+$ に対して，

$L_+^1(\mu) := \{\nu \in M_s^+ : \nu$ は μ に対して絶対連続, $\nu \neq 0\}$

Izuchi and Niwa の論文 [6] では，$\{|\psi_\nu| < 1\}$ や $Z(\psi_\nu)$ の，$\nu \in L_+^1(\mu)$ に関する合併集合について詳しく調べている．定理の一つは次の通りである．

Theorem (Izuchi and N., [6]).

$\mu \in M_s^+$ とし，$\mu = \mu_c + \mu_d$ とする．

ここで，μ_c は continuous measure，μ_d は discrete measure である．

$\mu_d = \sum_{n=1}^\infty a_n \delta_{e^{i\theta_n}}$ ($a_n > 0$ for $\forall n = 1, 2, 3, \cdots$) とする．

そのとき，次の条件は同値である．

(i) $\bigcup_{\nu \in L_+^1(\mu)} \{|\psi_\nu| < 1\} = \bigcup_{\nu \in L_+^1(\mu)} Z(\psi_\nu)$

(ii) $\forall n = 1, 2, 3, \cdots, \exists \nu_n \in L_+^1(\mu)$ s.t. $\{|\psi_{\delta_{e^{i\theta_n}}}| < 1\} \subset Z(\psi_{\nu_n})$

(iii) $\forall n = 1, 2, 3, \cdots, \exists \lambda_n \in M_s^+$ s.t. $\{|\psi_{\delta_{e^{i\theta_n}}}| < 1\} \subset Z(\psi_{\lambda_n})$

Izuchi の論文 [5] では，outer vanishing measure という概念を導入しており，それは Problem 1 の解決の糸口になるかもしれないと考えている．$\mu \in M_s^+$ とする．$\{|\psi_\mu| < 1\} \subset Z(\psi_\nu)$ を満たす $\nu \in L_+^1(\mu)$ が存在するとき，μ は outer vanishing measure を持つという．また，ν を outer vanishing measure for μ という．

Theorem (Izuchi, [5]).

$\mu \in M_s^+$ とする．$\exists \lambda \in L_+^1(\mu)$ s.t. $\mu \perp \lambda$, and ψ_μ and ψ_λ are codivisible in $H^\infty + C$

$\Longrightarrow \mu$ は outer vanising measure を持つ．

$H^\infty + C$ において codivisible である 2 つの singular inner functions が存在するかどうかを考えるためには，outer vanishing measure を持つような singular measure を考えなければならない．

参考文献

[1] J. Garnett, *Bounded Analytic Functions*, Academic Press, New York, 1981.

[2] P. Gorkin, *Singular functions and division in $H^\infty + C$*, Proc. Amer. Math. Soc. 92 (1984), 268–270.

[3] C. Guillory and D. Sarason, *Division in $H^\infty + C$*, Michigan Math. J. 28 (1981), 173–181.

[4] Kei-Ji Izuchi, *Singular inner functions of L^1-type II*, J. Math. Soc. Janpan, 53 (2001), 285–305.

[5] Kei-Ji Izuchi, *Outer and inner vanishing measures and division in $H^\infty + C$*, Rev. Mat. Iberoamericana, 18 (2002), 511–540.

[6] Kei-Ji Izuchi and N. Niwa, *Singular inner functions of L^1-type*, J. Korean Math. Soc. 36 (1999), 787–811.

WEIGHTED BERGMAN SPACES EMBEDDED IN THE HARDY SPACE OVER THE BIDISK

KEI JI IZUCHI, 新潟大学・フェロー

Abstract. Let $[z-w]$ be the smallest invariant subspace of $H^2(\mathbb{D}^2)$ containing the function $z-w$ and $\mathcal{K}_0 = H^2 \ominus [z-w]$. Let $S_z^{\mathcal{K}_0}$ be the compression operator of T_z on $\mathcal{K}_0$. Then it is known that $S_z^{\mathcal{K}_0}$ is unitary equivalent to the Bergman shift on the Bergman space $L_a^2(\mathbb{D})$. Let $\mathcal{K}_m = [(z-w)^m] \ominus [(z-w)^{m+1}]$ and let $S_z^{\mathcal{K}_m}$ be the compression operator of T_z on $\mathcal{K}_m$. It is proved that for $m = 1, 2$, $S_z^{\mathcal{K}_m}$ is unitary equivalent to the multiplication operator by z on the weighted Bergman space $L_a^{2,2m}(\mathbb{D})$.

1. Introduction

For $-1 < \alpha < \infty$. let $L_a^{2,\alpha}(\mathbb{D})$ be the weighted Bergman space on $\mathbb{D}$, that is, $L_a^{2,\alpha}(\mathbb{D})$ is the space of analytic functions $f(z)$ on $\mathbb{D}$ satisfying that

$$\|f\|_{L_a^{2,\alpha}} := \Big((\alpha+1)\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2(1-|z|^2)^\alpha \, dA(z)\Big)^{1/2} < \infty,$$

where $dA(z)$ is the normalized area measure on $\mathbb{D}$. Let $\mathcal{B}_\alpha$ be the multiplication operator on $L_a^{2,\alpha}(\mathbb{D})$ by z. When $\alpha = 0$, We write $L_a^2(\mathbb{D}) = L_a^{2,0}(\mathbb{D})$. Then $L_a^2(\mathbb{D})$ is the classical Bergman space and $\mathcal{B}_0$ is the Bergman shift (see [2]).

Let $H^2 = H^2(\mathbb{D}^2)$ be the Hardy space over the bidisk $\mathbb{D}^2$ with variables z, w. We denote by T_z, T_w the multiplication operators on H^2 by z, w. A nonzero closed subspace M of H^2 is said to be invariant if $T_zM \subset M$ and $T_wM \subset M$.

Let $\mathcal{K}_0 = H^2 \ominus [z-w]$, where $[E]$ is the smallest invariant subspace of H^2 containing E. For $n \ge 0$, let

$$\theta_{0,n} = \sum_{i=0}^{n} z^{n-i}w^i \quad \text{and} \quad \Theta_{0,n} = \frac{\theta_{0,n}}{\sqrt{n+1}}.$$

Then it is known that $\{\Theta_{0,n}\}_{n\ge0}$ is an orthonormal basis of $\mathcal{K}_0$. Let

$$e_{0,n} = \frac{z^n}{\sqrt{n+1}}, \quad n \ge 0.$$

Then $\{e_{0,n}\}_{n\geq 0}$ is an orthonormal basis of $L^2_a(\mathbb{D})$. Let

$$U_0 : L^2_a(\mathbb{D}) \ni f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^n \to \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Theta_{0,n} \in \mathcal{K}_0.$$

Then $U_0 : L^2_a(\mathbb{D}) \to \mathcal{K}_0$ is a unitary operator and $U_0 1 = 1$. It is also known that $S_z^{\mathcal{K}_0} = S_w^{\mathcal{K}_0}$ and $U_0\mathcal{B}_0 = S_z^{\mathcal{K}_0}U_0$ (see [1, 3]). So $[z-w]$ is one of the interesting invariant subspaces in H^2.

As a generalization, For each integer $m \geq 1$, let

$$\mathcal{K}_m = [(z-w)^m] \ominus [(z-w)^{m+1}]$$

and $S_z^{\mathcal{K}_m} f = P_{\mathcal{K}_m} zf$ for $f \in \mathcal{K}_m$. In Section 2, we shall show that $S_z^{\mathcal{K}_1}$ on $\mathcal{K}_1$ is unitarily equivalent to $\mathcal{B}_2$ on $L^{2,2}_a(\mathbb{D})$. This is an unexpected fact. In Section 3, we shall also show that there is a unitary operator $U_2 : L^{2,4}_a(\mathbb{D}) \to \mathcal{K}_2$ satisfying $U_2\mathcal{B}_4 = S_z^{\mathcal{K}_2}U_2$. So the structure of $S_z^{\mathcal{K}_2}$-invariant subspaces of $\mathcal{K}_2$ has the same structure of $\mathcal{B}_4$-invariant subspaces of $L^{2,4}_a(\mathbb{D})$. We conjecture that for every $m \geq 3$, the structure of $S_z^{\mathcal{K}_m}$-invariant subspaces of $\mathcal{K}_m$ has the same structure of $\mathcal{B}_{2m}$-invariant subspaces of $L^{2,2m}_a(\mathbb{D})$.

2. $S_z^{\mathcal{K}_1}$-invariant subspaces of $\mathcal{K}_1$

We have

$$[z-w] = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-1} z^{n-1-j} w^j (z-w).$$

Then $z[z-w] + w[z-w]$ is closed and

$$[z-w] \ominus \big(z[z-w] + w[z-w]\big) = \mathbb{C} \cdot (z-w).$$

For each positive integer n, let

$$[z-w]_n = \sum_{j=0}^{n-1} z^{n-1-j} w^j (z-w).$$

Then $[z-w] = \bigoplus_{n=1}^{\infty} [z-w]_n$. We have also

$$[(z-w)^2] = \bigoplus_{n=2}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-2} z^{n-2-j} w^j (z-w)^2.$$

Then $z[(z-w)^2] + w[(z-w)^2]$ is closed and

$$[(z-w)^2] \ominus \big(z[(z-w)^2] + w[(z-w)^2]\big) = \mathbb{C} \cdot (z-w)^2.$$

Let

$$\mathcal{K}_1 = [z-w] \ominus [(z-w)^2].$$

We shall study the structure of $\mathcal{K}_1$.

For $n \geq 2$, we have $\sum_{j=0}^{n-2} z^{n-2-j}w^j(z-w)^2 \subset [z-w]_n$ and

$$dim \sum_{j=0}^{n-2} z^{n-2-j}w^j(z-w)^2 = n-1 < n = dim\, [z-w]_n.$$

Then we may write

$$[z-w]_n \ominus \sum_{j=0}^{n-2} z^{n-2-j}w^j(z-w)^2 = \mathbb{C}\cdot\theta_{1,n}, \quad n \geq 2$$

for some $\theta_{1,n} \in [z-w]$ with $\theta_{1,n}(z,0) = z^n$ and

$$[z-w] \ominus [(z-w)^2] = \mathbb{C}\cdot(z-w) \oplus \bigoplus_{n=2}^{\infty} \mathbb{C}\cdot\theta_{1,n}.$$

We set $\theta_{1,1} = z - w$. Then

$$\mathcal{K}_1 = [z-w] \ominus [(z-w)^2] = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{C}\cdot\theta_{1,n}.$$

By some calculation, we have

$$\theta_{1,n} = z^n + \sum_{j=1}^{n} a_{n,j} z^{n-j} w^j, \quad n \geq 1, \tag{2.1}$$

where

$$a_{n,j} = \frac{n-2j}{n}, \quad 1 \leq j \leq n. \tag{2.2}$$

Put $a_{n,0} = 1$. We note that $a_{n,n} = -1$,

$$a_{n,j} = -a_{n,n-j} \quad \text{for } 0 \leq j \leq n \tag{2.3}$$

and

$$a_{n,n/2} = 0 \quad \text{if } n/2 \text{ is a positive integer.} \tag{2.4}$$

By (2.1) and (2.2), we have

$$\|\theta_{1,n}\|^2 = \frac{(n+1)(n+2)}{3n}, \quad n \geq 1.$$

Let

$$\Theta_{1,n} = \frac{\theta_{1,n}}{\|\theta_{1,n}\|} = \frac{\sqrt{3n}}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}\,\theta_{1,n}, \quad n \geq 1.$$

Then $\{\Theta_{1,n}\}_{n\geq 1}$ is an orthonormal basis of $\mathcal{K}_1$.

We have

$$\begin{aligned} S_z^{\mathcal{K}_1}\theta_{1,n} &= P_{\mathcal{K}_1} z\theta_{1,n} = \langle z\theta_{1,n}, \theta_{1,n+1}\rangle \frac{\theta_{1,n+1}}{\|\theta_{1,n+1}\|^2} \\ &= \Big(\sum_{j=0}^{n} a_{n,j}a_{n+1,j}\Big)\frac{\theta_{1,n+1}}{\|\theta_{1,n+1}\|^2} \\ &= \Big(\sum_{j=0}^{n} a_{n,n-j}a_{n+1,n+1-j}\Big)\frac{\theta_{1,n+1}}{\|\theta_{1,n+1}\|^2} \\ &= \Big(\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}a_{n+1,k+1}\Big)\frac{\theta_{1,n+1}}{\|\theta_{1,n+1}\|^2} = S_w^{\mathcal{K}_1}\theta_{1,n}. \end{aligned}$$

Hence $S_z^{\mathcal{K}_1} = S_w^{\mathcal{K}_1}$. Here we have

$$\sum_{j=0}^{n} a_{n,j}a_{n+1,j} = \sum_{j=0}^{n} \frac{n-2j}{n}\,\frac{n+1-2j}{n+1} = \frac{n+2}{3}.$$

Therefore

$$\begin{aligned} S_z^{\mathcal{K}_1}\Theta_{1,n} &= \frac{\sqrt{3n}}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}\, S_z^{\mathcal{K}_1}\theta_{1,n} \\ &= \frac{\sqrt{3n}}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}\,\frac{n+2}{3}\,\frac{\sqrt{3(n+1)}}{\sqrt{(n+2)(n+3)}}\,\Theta_{1,n+1} \\ &= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+3}}\,\Theta_{1,n+1}. \end{aligned}$$

This fact shows that $S_z^{\mathcal{K}_1} : \mathcal{K}_1 \to \mathcal{K}_1$ is one to one and has closed range. We write the above equation as a lemma.

Lemma 2.1. $S_z^{\mathcal{K}_1}\Theta_{1,n} = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+3}}\,\Theta_{1,n+1}$ *for every* $n \geq 1$.

For any nonnegative integer n, let

$$e_{2,n}(z) = \sqrt{\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}}\, z^n.$$

Then $\{e_{2,n}\}_{n\geq 0}$ is an orthonormal basis of $L_a^{2,2}(\mathbb{D})$. We have

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_2 e_{2,n}(z) &= \sqrt{\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}}\, z^{n+1} \\ &= \cdot\sqrt{\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}} \\ &\qquad\qquad \times\sqrt{\frac{6}{(n+2)(n+3)(n+4)}}\, e_{2,n+1}(z) \\ &= \sqrt{\frac{n+1}{n+4}}\, e_{2,n+1}(z).\end{aligned}$$

Let $U_1 : L_a^{2,2}(\mathbb{D}) \to \mathcal{K}_1$ be the operator defined by

$$U_1 e_{2,n}(z) = \Theta_{1,n+1}, \quad n \geq 0.$$

Then U_1 is a unitary operator. By Lemma 2.1, we have

$$\begin{aligned}U_1\mathcal{B}_2 e_{2,n}(z) &= \sqrt{\frac{n+1}{n+4}}\, U_1 e_{2,n+1}(z) = \sqrt{\frac{n+1}{n+4}}\, \Theta_{1,n+2} \\ &= S_z^{\mathcal{K}_1}\Theta_{1,n+1} = S_z^{\mathcal{K}_1} U_1 e_{2,n}(z).\end{aligned}$$

Hence

$$U_1\mathcal{B}_2 = S_z^{\mathcal{K}_1} U_1 \quad \text{on } \; L_a^{2,2}(\mathbb{D}). \tag{2.5}$$

Therefore we have the following.

Theorem 2.2. *The structure of $S_z^{\mathcal{K}_1}$-invariant subspaces of $\mathcal{K}_1$ has the same structure of $\mathcal{B}_2$-invariant subspaces of $L_a^{2,2}(\mathbb{D})$.*

3. $S_z^{\mathcal{K}_2}$-invariant subspaces of $\mathcal{K}_2$

For each $n \geq 1$, we write $\theta_{1,n} = (z-w)\widetilde{\theta}_{1,n}$. We have that for $k \geq 1$,

$$\begin{aligned}\theta_{1,2k} &= (z-w)\sum_{j=0}^{k-1}\frac{k-j}{k} z^j w^j \sum_{i=1}^{2(k-j)} z^{2(k-j)-i} w^{i-1} \\ &= (z-w)\sum_{j=0}^{k-1}\frac{k-j}{k}\sum_{i=1}^{2(k-j)} z^{2k-j-i} w^{j+i-1} \\ &= (z-w)\sum_{\ell=0}^{2k-1}\frac{(\ell+1)(2k-\ell)}{2k} z^{2k-1-\ell} w^{\ell}\end{aligned}$$

and for $k \geq 0$,

$$\begin{aligned} \theta_{1,2k+1} &= (z-w)\sum_{j=0}^{k}\frac{2k+1-2j}{2k+1}z^j w^j \sum_{i=0}^{2(k-j)} z^{2(k-j)-i}w^i \\ &= (z-w)\sum_{j=0}^{k}\frac{2(k-j)+1}{2k+1}\sum_{i=0}^{2(k-j)} z^{2k-j-i}w^{j+i} \\ &= (z-w)\sum_{\ell=0}^{2k}\frac{(\ell+1)(2k+1-\ell)}{2k+1}z^{2k-\ell}w^{\ell}. \end{aligned}$$

Hence

$$\widetilde{\theta}_{1,2k} = \sum_{\ell=0}^{2k-1}\frac{(\ell+1)(2k-\ell)}{2k}z^{2k-1-\ell}w^{\ell}$$

and

$$\widetilde{\theta}_{1,2k+1} = \sum_{\ell=0}^{2k}\frac{(\ell+1)(2k+1-\ell)}{2k+1}z^{2k-\ell}w^{\ell}.$$

As a result, for every $n \geq 1$ we have

$$\widetilde{\theta}_{1,n} = \sum_{\ell=0}^{n-1}\frac{(\ell+1)(n-\ell)}{n}z^{n-1-\ell}w^{\ell}.$$

Put

$$\widetilde{\theta}_{1,n} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^{n-1-j}w^j.$$

By the above equalities, we have

$$a_0 = a_{n-1} = 1, \;\; a_j > 0 \text{ and } \;\; a_j = a_{n-1-j} \tag{3.1}$$

for every $0 \leq j \leq n-1$. We have

$$\begin{aligned} (T_z^* - T_w^*)\theta_{1,n} &= \sum_{j=0}^{n-1}\Big(\frac{n-2j}{n} - \frac{n-2j-2}{n}\Big)z^{n-1-j}w^j \\ &= \sum_{j=0}^{n-1}\frac{2}{n}z^{n-1-j}w^j = \frac{2}{\sqrt{n}}\,\Theta_{0,n-1}, \end{aligned}$$

$$(T_z^* - T_w^*)zw\widetilde{\theta}_{1,n} = w\widetilde{\theta}_{1,n} - z\widetilde{\theta}_{1,n} = -\theta_{1,n}$$

and $(T_z^* - T_w^*)\Theta_{0,n} = 0$.

For $n \geq 2$, let

$$\begin{aligned} \theta_{2,n} &= zw\widetilde{\theta}_{1,n-1} - \langle zw\widetilde{\theta}_{1,n-1}, \Theta_{0,n}\rangle\Theta_{0,n} - \langle zw\widetilde{\theta}_{1,n-1}, \Theta_{1,n}\rangle\Theta_{1,n} \\ &\in [z-w]_n. \end{aligned}$$

Then $\theta_{2,n} \in [(z-w)^2]$ and

$$\begin{aligned}(T_z^* - T_w^*)\theta_{2,n} &= -\theta_{1,n-1} - \frac{\langle zw\widetilde{\theta}_{1,n-1}, \Theta_{1,n}\rangle}{\|\theta_{1,n}\|} \frac{2}{\sqrt{n}} \Theta_{0,n-1} \\ &\in H^2 \ominus [(z-w)^2].\end{aligned}$$

Hence $\theta_{2,n} \neq 0$ and $\theta_{2,n} \in [(z-w)^2] \ominus [(z-w)^3]$ for $n \geq 2$. We have

$$\|\widetilde{\theta}_{1,n-1}\|^2 = \|\theta_{2,n}\|^2 + |\langle zw\widetilde{\theta}_{1,n-1}, \Theta_{0,n}\rangle|^2 + |\langle zw\widetilde{\theta}_{1,n-1}, \Theta_{1,n}\rangle|^2.$$

Here

$$\begin{aligned}|\langle zw\widetilde{\theta}_{1,n-1}, \Theta_{1,n}\rangle|^2 &= \frac{|\langle zw\widetilde{\theta}_{1,n-1}, (z-w)\widetilde{\theta}_{1,n}\rangle|^2}{\|\theta_{1,n}\|^2} \\ &= \frac{|\langle \theta_{1,n-1}, \widetilde{\theta}_{1,n}\rangle|^2}{\|\theta_{1,n}\|^2} \\ &= 0 \qquad \text{by (2.3), (2.4) and (3.1),}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\langle zw\widetilde{\theta}_{1,n-1}, \Theta_{0,n}\rangle|^2 &= \frac{1}{n+1}\Big|\Big\langle zw\widetilde{\theta}_{1,n-1}, \sum_{i=0}^{n} z^{n-i}w^i\Big\rangle\Big|^2 \\ &= \frac{1}{n+1}\Big|\Big\langle \widetilde{\theta}_{1,n-1}, \sum_{i=0}^{n-2} z^{n-2-i}w^i\Big\rangle\Big|^2 \\ &= \frac{1}{n+1}\Big(\sum_{\ell=0}^{n-2}\frac{(\ell+1)(n-\ell)}{n-1}\Big)^2 = \frac{n^2(n+1)}{36}\end{aligned}$$

and

$$\|\widetilde{\theta}_{1,n}\|^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{\ell=0}^{n-1}(\ell+1)^2(n-\ell)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(n^2+2n+2)}{30n}.$$

Hence

$$\theta_{2,n} = zw\widetilde{\theta}_{1,n-1} - \langle zw\widetilde{\theta}_{1,n-1}, \Theta_{0,n}\rangle\Theta_{0,n}$$

and

$$\|\theta_{2,n}\|^2 = \|\widetilde{\theta}_{1,n-1}\|^2 - |\langle zw\widetilde{\theta}_{1,n-1}, \Theta_{0,n}\rangle|^2 = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{180n}.$$

Let

$$\mathcal{K}_2 = [(z-w)^2] \ominus [(z-w)^3] \quad \text{and} \quad \Theta_{2,n} = \frac{\theta_2, n}{\|\theta_{2,n}\|}, \quad n \geq 2.$$

Then $\{\Theta_{2,n}\}_{n\geq 2}$ is an orthonormal basis of $\mathcal{K}_2$. Let $S_z^{\mathcal{K}_2} f = P_{\mathcal{K}_2} z f$ for $f \in \mathcal{K}_2$. We have

$$S_z^{\mathcal{K}_2}\Theta_{2,n} = \frac{\langle z\theta_{2,n}, \theta_{2,n+1}\rangle}{\|\theta_{2,n}\|\|\theta_{2,n+1}\|}\,\Theta_{2,n+1}.$$

Put $A_n = \langle zw\widetilde{\theta}_{1,n-1}, \Theta_{0,n}\rangle$. Then

$$\begin{aligned}
&\langle z\theta_{2,n}, \theta_{2,n+1}\rangle \\
&= \Big\langle z^2 w\widetilde{\theta}_{1,n-1} - A_n z\Theta_{0,n}, zw\widetilde{\theta}_{1,n} - A_{n+1}\Theta_{0,n+1}\Big\rangle \\
&= \langle z\widetilde{\theta}_{1,n-1}, \widetilde{\theta}_{1,n}\rangle - A_{n+1}\langle z^2 w\widetilde{\theta}_{1,n-1}, \Theta_{0,n+1}\rangle - A_n\langle \Theta_{0,n}, w\widetilde{\theta}_{1,n}\rangle \\
&\qquad\qquad\qquad + A_n A_{n+1}\langle z\Theta_{0,n}, \Theta_{0,n+1}\rangle \\
&= \langle z\widetilde{\theta}_{1,n-1}, \widetilde{\theta}_{1,n}\rangle - \frac{A_{n+1}}{\sqrt{n+2}}\Big\langle \widetilde{\theta}_{1,n-1}, \sum_{\ell=0}^{n-2} z^{n-2-\ell}w^{\ell}\Big\rangle \\
&\qquad - \frac{A_n}{\sqrt{n+1}}\Big\langle \sum_{\ell=0}^{n-1} z^{n-1-\ell}w^{\ell}, \widetilde{\theta}_{1,n}\Big\rangle + \frac{A_n A_{n+1}}{\sqrt{n+1}\sqrt{n+2}}(n+1) \\
&= \langle z\widetilde{\theta}_{1,n-1}, \widetilde{\theta}_{1,n}\rangle - \frac{A_{n+1}}{\sqrt{n+2}}\sum_{\ell=0}^{n-2}\frac{(\ell+1)(n-1-\ell)}{n-1} \\
&\qquad - \frac{A_n}{\sqrt{n+1}}\sum_{\ell=0}^{n-1}\frac{(\ell+1)(n-\ell)}{n} + \frac{A_n A_{n+1}\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}} \\
&= \langle z\widetilde{\theta}_{1,n-1}, \widetilde{\theta}_{1,n}\rangle - \frac{A_{n+1}n(n+1)}{6\sqrt{n+2}} - \frac{A_n(n+1)(n+2)}{6\sqrt{n+1}} \\
&\qquad\qquad\qquad + \frac{A_n A_{n+1}\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}} \\
&= \langle z\widetilde{\theta}_{1,n-1}, \widetilde{\theta}_{1,n}\rangle - \frac{A_{n+1}n(n+1)}{6\sqrt{n+2}} - \frac{A_n\sqrt{n+1}(n+2)}{6} \\
&\qquad\qquad\qquad + \frac{A_n A_{n+1}\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}}.
\end{aligned}$$

Since $A_n = n\sqrt{n+1}/6$, we have

$$\langle z\theta_{2,n}, \theta_{2,n+1}\rangle = \langle z\widetilde{\theta}_{1,n-1}, \widetilde{\theta}_{1,n}\rangle - \frac{n(n+1)(n+2)}{36}.$$

Here

$$
\begin{aligned}
&\langle z\widetilde{\theta}_{1,n-1}, \widetilde{\theta}_{1,n}\rangle \\
&= \Big\langle \sum_{\ell=0}^{n-2} \frac{(\ell+1)(n-1-\ell)}{n-1} z^{n-1-\ell} w^{\ell}, \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{(\ell+1)(n-\ell)}{n} z^{n-1-\ell} w^{\ell} \Big\rangle \\
&= \sum_{\ell=0}^{n-2} \frac{(\ell+1)^2(n-1-\ell)(n-\ell)}{(n-1)n} \\
&= \frac{2n^3+7n^2+7n+2}{60}.
\end{aligned}
$$

Hence

$$\langle z\theta_{2,n}, \theta_{2,n+1}\rangle = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{180}.$$

Therefore

$$\frac{\langle z\theta_{2,n}, \theta_{2,n+1}\rangle}{\|\theta_{2,n}\|\|\theta_{2,n+1}\|} = \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+4}}.$$

We note also that $S_z^{\mathcal{K}_2} = S_w^{\mathcal{K}_2}$ on $\mathcal{K}_2$. Hence we have the following.

Theorem 3.1. $S_z^{\mathcal{K}_2}\Theta_{2,n} = \dfrac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+4}}\,\Theta_{2,n+1}$ *for every* $n \geq 2$.

This shows that $S_z^{\mathcal{K}_2} : \mathcal{K}_2 \to \mathcal{K}_2$ is one to one and has closed range. For any nonnegative integer n, let

$$e_{4,n}(z) = \sqrt{\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}{120}}\, z^n.$$

Then $\{e_{4,n}\}_{n\geq 0}$ is an orthonormal basis of $L_a^{2,4}(\mathbb{D})$ (see [2]). We have

$$\mathcal{B}_4 e_{4,n}(z) = \sqrt{\frac{n+1}{n+6}}\, e_{4,n+1}(z).$$

Let $U_2 : L_a^{2,4}(\mathbb{D}) \to \mathcal{K}_2$ be the operator defined by $U_2 e_{4,n}(z) = \Theta_{2,n+2}$ for $n \geq 0$. Then U_2 is a unitary operator and

$$
\begin{aligned}
U_2\mathcal{B}_4 e_{4,n}(z) &= \sqrt{\frac{n+1}{n+6}}\, U_2 e_{4,n+1}(z) = \sqrt{\frac{n+1}{n+6}}\,\Theta_{2,n+3} \\
&= S_z^{\mathcal{K}_2}\Theta_{2,n+2} = S_z^{\mathcal{K}_2} U_2 e_{4,n}(z).
\end{aligned}
$$

Hence we have the following.

Theorem 3.2. $U_2\mathcal{B}_4 = S_z^{\mathcal{K}_2} U_2$ *on* $L_a^{2,4}(\mathbb{D})$.

Therefore we have the following.

Theorem 3.3. *The structure of* $S_z^{\mathcal{K}_2}$*-invariant subspaces of* $\mathcal{K}_2$ *has the same structure of* $\mathcal{B}_4$*-invariant subspaces of* $L_a^{2,4}(\mathbb{D})$.

4. Conjecture

For $n \geq 3$, we write $\theta_{2,n-1} = (z-w)\widetilde{\theta}_{2,n-1}$. Since $\theta_{2,n-1} \in [(z-w)^2]$, $\widetilde{\theta}_{2,n-1} \in [z-w]$. Let

$$\begin{aligned}\theta_{3,n} &= zw\widetilde{\theta}_{2,n-1} - \langle zw\widetilde{\theta}_{2,n-1}, \Theta_{1,n}\rangle \Theta_{1,n} - \langle zw\widetilde{\theta}_{2,n-1}, \Theta_{2,n}\rangle \Theta_{2,n} \\ &\in [z-w]_n.\end{aligned}$$

Then $\theta_{3,n} \in [(z-w)^3]$ and

$$\begin{aligned}(T_z^* - T_w^*)\theta_{3,n} &= -\theta_{2,n-1} - \langle zw\widetilde{\theta}_{2,n-1}, \Theta_{1,n}\rangle (T_z^* - T_w^*)\Theta_{1,n} \\ &\quad - \langle zw\widetilde{\theta}_{2,n-1}, \Theta_{2,n}\rangle (T_z^* - T_w^*)\Theta_{2,n} \\ &\in H^2 \ominus [(z-w)^3].\end{aligned}$$

Hence $\theta_{3,n} \neq 0$ and $\theta_{3,n} \in [(z-w)^3] \ominus [(z-w)^4]$ for $n \geq 3$. We write $\Theta_{3,n} = \theta_{3,n}/\|\theta_{3,n}\|$. Then $\{\Theta_{3,n}\}_{n\geq 3}$ is an orthonormal basis of $\mathcal{K}_3$ and $S_z^{\mathcal{K}_3}$ is a weighted shift.

Inductively, for $4 \leq m \leq n$ we may define $\theta_{m-1,n-1} = (z-w)\widetilde{\theta}_{m-1,n-1}$ and

$$\theta_{m,n} = zw\widetilde{\theta}_{m-1,n-1} - \sum_{i=m-2}^{m-1} \langle zw\widetilde{\theta}_{m-1,n-1}, \Theta_{i,n}\rangle \Theta_{i,n} \in [z-w]_n.$$

Then $\theta_{m,n} \in [(z-w)^m]$ and

$$\begin{aligned}(T_z^* - T_w^*)\theta_{m,n} &= -\theta_{m-1,n-1} - \sum_{i=m-2}^{m-1} \langle zw\widetilde{\theta}_{m-1,n-1}, \Theta_{i,n}\rangle (T_z^* - T_w^*)\Theta_{i,n} \\ &\in H^2 \ominus [(z-w)^m].\end{aligned}$$

Hence $\theta_{m,n} \neq 0$ and $\theta_{m,n} \in [(z-w)^m] \ominus [(z-w)^{m+1}]$ for $n \geq m$. We write $\Theta_{m,n} = \theta_{m,n}/\|\theta_{m,n}\|$. Then $\{\Theta_{m,n}\}_{n\geq m}$ is an orthonormal basis of $\mathcal{K}_m$ and $S_z^{\mathcal{K}_m}$ is a weighted shift.

Conjecture 4.1. *$S_z^{\mathcal{K}_m}$ on $\mathcal{K}_m$ is unitarily equivalent to $\mathcal{B}_{2m}$ on $L_a^{2,2m}(\mathbb{D})$.*

References

[1] K. Guo, S. Sun, D. Zheng and C. Zhong, Multiplication operators on the Bergman space via the Hardy space of the bidisk, J. Reine. Angew. Math. **628** (2009), 129–168.

[2] H. Hedenmalm, B. Korenblum and K. Zhu, Theory of Bergman spaces, Grad. Texts Math. 199, Springer, New York, 2000.

[3] S. Sun, D. Zheng and C. Zhong, Classification of reducing subspaces of a class of multiplication operators on the Bergman space via the Hardy space of the bidisk, Canad. J. Math. **62** (2010), 415–438.

不定値内積空間を経由した不変部分空間の表現について

島根大学総合理工学部　　瀬戸　道生 (Michio Seto)

1　Beurling の定理再訪

H^2 を単位円板上の通常の Hardy 空間とし，T_z を z 掛け算に対応する Toeplitz 作用素とする．H^2 の非自明な閉部分空間で，T_z の作用で不変なものは単に不変部分空間とよばれる．

定理 1.1 (Beurling) H^2 の任意の不変部分空間 $\mathcal{M}$ に対し，$\mathcal{M} = qH^2$ となる *inner function* q が存在する．

この定理は関数環論だけでなくヒルベルト空間上の作用素論においても有名である．私が知っている範囲で次の 5 通り証明法がある．

1. inner-outer factorization
   元祖 Beurling の証明， inner-outer factorization の系として証明を与えている．

2. Helson-Lowdenslager method
   Hoffman 等の多くの教科書に採用されている有名な方法である．

3. Helson's cocycle-coboundary argument
   Gamelin の本で紹介されている．院生の頃に勉強したきりだが，この原稿を準備している時に complete Pick kernel との関連を調べてみようと思った．

4. Wold decomposition
   作用素論系の多くの教科書に採用されている方法であり，直観的にもっとも理解しやすいと思われるが，シフト作用素の性質に強く依存しているので今後の発展は難しいか（？）．

5. complete Pick kernel technique
   作用素論的に抽象化しやすいという意味で非常にうまくできた方法（概念）だと思う．

さて，ここではもう一つの証明方法（とはいってもこれまでに知られていることの組み合わせに過ぎないが）を提案したい．

（新しい（？）証明）
大して難しいものではないのだが，後の説明の都合のために証明を 4 段階に分ける．

(Step 1) $\exists q \in \mathcal{M}$ s.t. inner and $\mathcal{M} \ominus z\mathcal{M} = \mathbb{C}q$ を示す．ここは従来の方法と同じであるので詳細は省略する．

(Step 2) $k_\lambda^{\mathcal{M}}$ を $\mathcal{M}$ 上の λ 代入に対応する再生核とする．簡単な計算で $k_\lambda^{\mathcal{M}} = (\overline{q(\lambda)}q)/(1-\overline{\lambda}z)$ がわかる．また，$R_z = T_z P_{\mathcal{M}}$ とおき（$P_{\mathcal{M}}$ は $\mathcal{M}$ への直交射影），R_z を $\mathcal{M}$ 上の作用素として扱う．このとき $R_z^* = P_{\mathcal{M}} T_z^*|_{\mathcal{M}}$ となることに注意すると

$$(I_{\mathcal{M}} - R_z R_z^*)k_\lambda^{\mathcal{M}} = (1-\overline{\lambda}z)k_\lambda^{\mathcal{M}} = \overline{q(\lambda)}q.$$

最右辺は $\mathbb{C}q$ に 1 次元再生核ヒルベルト空間の構造を入れたときの再生核である．

(Step 3) 再生核ヒルベルト空間としてのテンソル積 $\mathbb{C}q \otimes H^2$ に対し，$D : \mathbb{C}q \otimes H^2 \to \mathcal{M}$, $q(z) \otimes f(w) \mapsto q(z)f(z)$ という写像を考える．関数のテンソルは二変数化と同じことであるが，D はそれの対角成分を与える写像である．明らかに $\operatorname{ran} D = qH^2$ である（ただし inner function の性質を使って $\operatorname{ran} D$ が閉であることを示す必要がある）．

(Step 4) $D : \overline{q(\lambda)}q \otimes k_\lambda \mapsto \overline{q(\lambda)}qk_\lambda = k_\lambda^{\mathcal{M}}$ であるから $\operatorname{ran} D$ は $\mathcal{M}$ の中で稠密であり，(Step 3) から $\mathcal{M} = \operatorname{ran} D = qH^2$ となる．

（証明終）

以上，少々大げさな道具を用いたが，(Step 2)，(Step 3)，(Step 4) に相当することを多変数 Hardy 空間を含むかなり広い範囲の再生核ヒルベルト空間でも考えることができる．これがこの「新しい（？）方法」の利点である．次の節では多重円板上の Hardy 空間を例にそれを述べる．

2 不定値内積空間を経由した不変部分空間の表現

以下，多重円板 $\mathbb{D}^2$ 上の Hardy 空間 $H^2(\mathbb{D}^2)$ の場合に得られた結果を紹介するが，適当な条件をみたす他の再生核ヒルベルト空間でもだいたい同じように述べられる．$\mathcal{M}$ を $H^2(\mathbb{D}^2)$ の不変部分空間とし，T_f を $H^2(\mathbb{D}^2)$ 上の Toeplitz 作用素とする．前節の (Step 2) で用いた $I_{\mathcal{M}} - R_z R_z^*$ に対応する作用素 Δ を次で定義する．

$$\Delta = P_{\mathcal{M}} - T_z P_{\mathcal{M}} T_z^* P_{\mathcal{M}} - T_w P_{\mathcal{M}} T_w^* P_{\mathcal{M}} + T_{zw} P_{\mathcal{M}} T_{zw}^* P_{\mathcal{M}}.$$

Δ は $H^2(\mathbb{D}^2)$ の再生核の逆数をとると現れる多項式に対応している（Agler の functional calculus）．

まずは，比較的扱いやすい場合を述べる．

定理 2.1 Δ が有限階かつ $\operatorname{ran}\Delta \subset H^\infty$ ならば次をみたす再生核 *Krein* 空間 $\mathcal{K}$ が存在する．

$$\mathcal{M} = \overline{\{F \circ d : F \in \mathcal{K} \otimes H^2\}}.$$

ここで d は $(f \otimes g) \circ d(z) = f(z)g(z)$ で定義される写像である．

前節の (Step 2) で $\mathbb{C}q$ に再生核ヒルベルト空間の構造を入れたが，これに対応するのが $\mathcal{K}$ である．再生核が complete Pick ならば $\mathcal{K}$ は正定値になるが，一般の再生核に対しては正定値とは限らない．また，$DF = F \circ d$ と考えれば (Step 3) での D に対応する．定理 2.1 では D は有界作用素であるが，この D が一般の場合に非有界になる．このことを以下で正確に述べよう．
まず，

$$D : \mathcal{K} \otimes H^2 \to \mathcal{M}, \quad (u, v) \otimes z_1^i z_2^j \mapsto ((u, v) \otimes z_1^i z_2^j) \circ d = (u - v) z_1^i z_2^j$$

とおく．Krein 空間は正の空間と負の空間との直和 $\mathcal{K} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$ に分けられるので，$\mathcal{K}$ のベクトルを (u, v) と表した．なお，D は有界とは限らないので定義域として

$$\operatorname{dom} D = \{F \in \mathcal{K} \otimes H^2 : DF \in \mathcal{M}\}$$

を選び固定しておく．

定理 2.2 D は稠密な定義域と値域をもつ閉作用素である．従って，

$$\mathcal{M} = \overline{\{DF : F \in \operatorname{dom} D\}}$$

が成り立つ．さらに $p \in \mathbb{C}[z_1, z_2]$ に対し，$F \in \operatorname{dom} D$ ならば $pF \in \operatorname{dom} D$ であり，$D(pF) = pDF$ をみたすという意味で D は準同型写像である．

証明の詳細は現在準備中の論文で与えられている．これからは次の問題を考えたい．

問題 2.1 $\mathcal{M}_1$，$\mathcal{M}_2$ を $H^2(\mathbb{D}^2)$ の不変部分空間とする．次の図式が可換になる作用素 U と T が存在する場合，$\mathcal{M}_1$ と $\mathcal{M}_2$ に対し，何がいえるか？またそのような作用素 U, T は一体どのようなものか？

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{K}_1 \otimes H^2 & \xrightarrow{U \otimes I} & \mathcal{K}_2 \otimes H^2 \\
{\scriptstyle D_1}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle D_2} \\
\mathcal{M}_1 & \xrightarrow[T]{} & \mathcal{M}_2.
\end{array}$$

この問題に何らかの解答が得られれば，それを不変部分空間の分類に利用することができると思われる．

Löwner 関数による値域のある性質について

茨城大学工学部　　平澤　剛 (Go Hirasawa)

1　序

$(H,(\cdot,\cdot))$ を無限次元な可分・複素ヒルベルト空間とする。$(\cdot,\cdot)$ は内積である。記号 $\mathcal{B}(H)$ で有界線形作用素の全体集合を表す。$A \in \mathcal{B}(H)$ に対して、正値 $A \geq 0$ であるとは、$(Ax,x) \geq 0$ $(\forall x \in H)$ が成り立つことである。下記の文献 [2] によれば, 次のような主旨のことが記載されている。文献 [1] の結果を用いると、 $A \geq 0$ に対して

$$T(AH) \subseteq AH \implies T(A^pH) \subseteq A^pH \quad (0 < p < 1) \quad \cdots \quad (*)$$

が成り立つと。我々は、この $(*)$ を [1] を用いたフォローはできていない。実は、$(*)$ はもっと一般に Löwner 関数に対しても言えるらしい。すなわち、それを $\phi(\cdot)$ とおくと、$T(AH) \subseteq AH$ から $T(\phi(A)H) \subseteq \phi(A)H$ が成り立つそうである。ここで、AH は値域 $\{Au : u \in H\}$ のことであり、$\phi(A)H$ も $\phi(A)$ の値域のことである。また、よく知られていることだが、$AH \subseteq A^pH$ $(0 < p < 1)$ である。本報告で登場する有界作用素 A は、すべて正値である。有界作用素の値域を論じるとき、必ず正値作用素の値域と考えることができるからである。今後、断らないで A の正値性を仮定する。

[1] W. F. Donoghue, Jr., *The Interpolation of Quadratic Norms* , *Acta Math.* vol.118 (1967) 251-270.

[2] Leiba Rodman, Nahum Zobin, *Linear Preservers of Isomorphic Types of Lattices of Invariant Operator Ranges* , *Proc. Amer. Math. Soc.* vol.129 (2001) 2981-2986.

さて、本報告では上記の $(*)$ を [1] から導く代わりに、de Branges 空間論の手法を用いて $(*)$ にアプローチしてみたい。結論から申し上げると、$p = 1/2$ のケースでは証明することができたが、それ以外のケース $(0 < p < 1, p \neq 1/2)$ ではまだよくわからず、経過報告となる。

2　特別なケース $p = 1/2$

仮定:$T(AH) \subseteq AH$ のもとで、$T(A^{\frac{1}{2}}H) \subseteq A^{\frac{1}{2}}H$ を示していく。まずは、Douglas's majorization 定理を用いると、仮定は次と同値。$TA = AW$ および $\ker W^* \supseteq \ker A$ を満たす $W \in \mathcal{B}(H)$ が一意に存在する。この W の存在を用いて、$T(A^{\frac{1}{2}}H) \subseteq A^{\frac{1}{2}}H$ を示して行きたいのである。示すべきこの目的の式の特徴付けを与えておく。

Lemma 1 以下の 3 条件は互いに同値である。

(1) $T(A^{\frac{1}{2}}H) \subseteq A^{\frac{1}{2}}H$. つまり, $\exists V$ $s.t.$ $TA^{\frac{1}{2}} = A^{\frac{1}{2}}V$.

(2) $A^{\frac{1}{2}}T^*/A^{\frac{1}{2}} : A^{\frac{1}{2}}u \to A^{\frac{1}{2}}T^*u$ *is bounded in* H. $(u \in H)$

(3) $AT^*/A : Au \to AT^*u$ *is bounded in* $\mathcal{M}(A^{\frac{1}{2}})$. $(u \in H)$

Remark 1 $\mathcal{M}(A^{\frac{1}{2}})$ というのは、$A^{\frac{1}{2}}$ の値域 $A^{\frac{1}{2}}H$ に、H の内積とは別の内積を付随させた連続的に埋め込まれたヒルベルト空間のことである。つまり、$\mathcal{M}(A^{\frac{1}{2}}) := (A^{\frac{1}{2}}H, \|\cdot\|_{A^{\frac{1}{2}}})$. ただし、$(A^{\frac{1}{2}}u, A^{\frac{1}{2}}v)_{A^{\frac{1}{2}}} := (Pu, Pv)$, $(u, v \in H)$. P は $(\ker A)^{\perp}$ への直交射影作用素。

（Lemma 1 の証明の概略）

$$TA^{\frac{1}{2}} = A^{\frac{1}{2}}V \iff A^{\frac{1}{2}}T^*/A^{\frac{1}{2}} \subseteq V^* \iff \sup_{u\in H} \frac{\|A^{\frac{1}{2}}T^*u\|}{\|A^{\frac{1}{2}}u\|} < \infty \iff \sup_{u\in H} \frac{\|AT^*u\|_{A^{\frac{1}{2}}}}{\|Au\|_{A^{\frac{1}{2}}}} < \infty.$$

□

上記の補題より我々は、W の存在のもとで、Lemma 1 (3) ：AT^*/A is bounded in $\mathcal{M}(A^{\frac{1}{2}})$, 換言すれば、

$$\|AT^*u\|_{A^{\frac{1}{2}}} \le c\|Au\|_{A^{\frac{1}{2}}} \text{ for some } c > 0$$

を証明すればよい。仮定 $TA = AW$ のもとで、

$$\begin{aligned}
\|AT^*u\|^2_{A^{\frac{1}{2}}} &= (AT^*u, AT^*u)_{A^{\frac{1}{2}}} = (A^{\frac{1}{2}}T^*u, A^{\frac{1}{2}}T^*u) \\
&= (AT^*u, T^*u) = (W^*Au, T^*u) = (Au, WT^*u) \\
&\le (Au, u)^{\frac{1}{2}}(AWT^*u, WT^*u)^{\frac{1}{2}} = \|A^{\frac{1}{2}}u\|(TAT^*u, WT^*u)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|A^{\frac{1}{2}}u\|(AT^*u, T^*WT^*u)^{\frac{1}{2}} = \|A^{\frac{1}{2}}u\|(W^*Au, T^*WT^*u)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|A^{\frac{1}{2}}u\|(Au, WT^*WT^*u)^{\frac{1}{2}} = \|A^{\frac{1}{2}}u\|(Au, (WT^*)^2u)^{\frac{1}{2}} \\
&\le \|A^{\frac{1}{2}}u\|(Au, u)^{\frac{1}{4}}(A(WT^*)^2u, (WT^*)^2u)^{\frac{1}{4}} \\
&= \|A^{\frac{1}{2}}u\|^{1+\frac{1}{2}}(A(WT^*)^2u, (WT^*)^2u)^{\frac{1}{4}} \\
&\cdots \\
&\le \|A^{\frac{1}{2}}u\|^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}(A(WT^*)^4u, (WT^*)^4u)^{\frac{1}{8}} \\
&\cdots \\
&\le \|A^{\frac{1}{2}}u\|^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+(\frac{1}{2})^n}(A(WT^*)^{2^n}u, (WT^*)^{2^n}u)^{(\frac{1}{2})^{n+1}} \\
&= \|A^{\frac{1}{2}}u\|^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+(\frac{1}{2})^n}\|A^{\frac{1}{2}}(WT^*)^{2^n}u\|^{(\frac{1}{2})^n} \\
&\le \|A^{\frac{1}{2}}u\|^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+(\frac{1}{2})^n}\|A^{\frac{1}{2}}\|^{(\frac{1}{2})^n}\|(WT^*)^{2^n}\|^{(\frac{1}{2})^n}\|u\|^{(\frac{1}{2})^n} \\
&= \|Au\|_{A^{\frac{1}{2}}}^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+(\frac{1}{2})^n}\|A^{\frac{1}{2}}\|^{(\frac{1}{2})^n}\|(WT^*)^{2^n}\|^{(\frac{1}{2})^n}\|u\|^{(\frac{1}{2})^n}
\end{aligned}$$

すなわち、

$$\|AT^*u\|^2_{A^{\frac{1}{2}}} \leq \|Au\|^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+(\frac{1}{2})^n}_{A^{\frac{1}{2}}} \|A^{\frac{1}{2}}\|^{(\frac{1}{2})^n} \|(WT^*)^{2^n}\|^{(\frac{1}{2})^n} \|u\|^{(\frac{1}{2})^n}$$

従って、

$$\|AT^*u\|^2_{A^{\frac{1}{2}}} \leq \gamma(WT^*)\ \|Au\|^2_{A^{\frac{1}{2}}}, \quad (\gamma(\cdot) \text{ is a spectral radius}).$$

以上から,

$$\sup \frac{\|AT^*u\|_{A^{\frac{1}{2}}}}{\|Au\|_{A^{\frac{1}{2}}}} \leq \sqrt{\gamma(WT^*)} < \infty.$$

これは Lemma 1 (3) が成り立つことを意味する。すなわち、$T(A^{\frac{1}{2}}H) \subseteq A^{\frac{1}{2}}H$ が示せた。

□

3 一般のケース $0 < p < 1$

$$T(AH) \subseteq AH \implies T(A^pH) \subseteq A^pH \quad (0 < p < 1) \quad \cdots \quad (*)$$

さて、この命題を一般の $0 < p < 1$ に対して前節と同様な方法を試みて証明しようとしても、すぐに無理であることに気が付く。詳細は述べないが、$p = 1/2$ の特殊性を利用していたのである。一般の $0 < p < 1$ では証明はできていないが、ここでは途中経過という形で報告したいと思う。

示したい条件式 $T(A^pH) \subseteq A^pH$ の特徴付けが次の補題である。

Lemma 2 $0 < p < 1$ とする。以下の 3 条件は互いに同値である。

(4) *$T(A^pH) \subseteq A^pH$. つまり, $\exists V_p$ s.t. $TA^p = A^pV_p$.*

(5) *A^pT^*/A^p is bounded in H.*

(6) *AT^*/A is bounded in $\mathcal{M}(A^{1-p})$.*

（証明の概略）

$$TA^p = A^pV_p \Longleftrightarrow A^pT^*/A^p \subseteq V_p^* \Longleftrightarrow \sup \frac{\|A^pT^*u\|}{\|A^pu\|} < \infty \Longleftrightarrow \sup \frac{\|AT^*u\|_{A^{1-p}}}{\|Au\|_{A^{1-p}}} < \infty.$$

□

一般の $0 < p < 1$ において, Lemma 2 (6) AT^*/A is bounded in $\mathcal{M}(A^{1-p})$ を示すのは難しいように思える。$p = 1/2$ で証明できたのはその特殊性のおかげかもしれない。そこで、仮定条件 $T(AH) \subseteq AH$ ($\Leftrightarrow TA = AW$) も加味・考慮して、次の条件 (7) を考える。すると、(4) ～ (6) と (7) は（仮定条件のもとで）同値となる。

(7) TA/A is bounded in $\mathcal{M}(A^p)$. つまり、ある定数 $c_p > 0$ が存在して

$$\|Tx\|_{A^p} \leq c_p \|x\|_{A^p},\ x \in AH\ (\subseteq A^p H)$$

が成り立つ。

Remark 2 条件 (7) は、仮定 $T(AH) \subseteq AH$ のもと $p = 1$ でも成立する。つまり、$T(AH) \subseteq AH$ ならば $T \in \mathcal{B}(\mathcal{M}(A))$ である。（このことは以下の $p_n = 1/2^n$, $n = 0$ で使用している。）

さてここでは、仮定 $T(AH) \subseteq AH$ ($\Leftrightarrow TA = AW$) のもとで、(4) $\Leftarrow$ (7) の証明を与えておく ((4) $\Rightarrow$ (7) の証明は省略)。

((4) $\Leftarrow$ (7) の証明) 次の式は (7) の言い換えである。

$$\|T\|_{A^p} := \sup_u \frac{\|TAu\|_{A^p}}{\|Au\|_{A^p}} = \sup_u \frac{\|AWu\|_{A^p}}{\|Au\|_{A^p}} = \sup_u \frac{\|A^{1-p}Wu\|}{\|A^{1-p}u\|} \leq c_p < \infty.$$

これは、作用素商 $A^{1-p}W/A^{1-p}$ が有界であることを意味する。よって、定義域を閉包まで拡張して、その直交補空間をゼロと定義することで得られる自然な拡張 V_p が存在する: $A^{1-p}W/A^{1-p} \subseteq V_p$, $\ker V_p \supseteq (A^{1-p}H)^\perp$. 換言すると、$A^{1-p}W = V_p A^{1-p}$, $\ker V_p \supseteq (A^{1-p}H)^\perp = \ker A$. よって、左から A^p を掛けて、$A^p \cdot A^{1-p}W = A^p \cdot V_p A^{1-p}$ となり、$AW = TA = A^p V_p A^{1-p}$ となる。さらに、分解して $TA^p \cdot A^{1-p} = A^p V_p A^{1-p}$ から $A^{1-p}(A^p T^* - V_p^* A^p) = 0$ なので $(A^p T^* - V_p^* A^p)H \subseteq \ker A$ を得る。一方、$(A^p T^* - V_p^* A^p)H \subseteq \overline{A^p H} + V_p^* H \subseteq (\ker A)^\perp$ なので、$A^p T^* - V_p^* A^p = 0$, i.e., $TA^p = A^p V_p$. これは (4) を示したことを意味する。

□

$p = \frac{1}{2}$ に対する前節の結果を繰り返し適用すると以下のようになる。$T(AH) \subseteq AH$ ならば

$$T(A^{p_n}H) \subseteq A^{p_n}H \quad (p_n = \frac{1}{2^n},\ n = 0, 1, 2, \cdots) \quad \cdots \quad (**)$$

従って、任意の $0 < p < 1$ に対して、$n \geq 0$ が存在して、

$$p_{n+1} < p < p_n \quad \text{and} \quad AH \subseteq A^{p_n}H \subseteq A^p H \subseteq A^{p_{n+1}}H$$

をみたす。すると、$(**)$ および (4) $\sim$ (6) と (7) の $T(AH) \subseteq AH$ のもとでの同値性より,

- $\|Tx\|_{A^{p_n}} \leq c_{p_n} \|x\|_{A^{p_n}}, \quad x \in AH$
- $\|Tx\|_{A^{p_{n+1}}} \leq c_{p_{n+1}} \|x\|_{A^{p_{n+1}}}, \quad x \in AH$

が成り立つことがわかる。Remark 2 より、仮定 $T(AH) \subseteq AH$ から $T \in \mathcal{B}(\mathcal{M}(A))$ となっているので、ある定数 $c > 0$ について、$\|Tx\|_A \leq c \|x\|_A$, $x \in AH$ が成り立っている（$n = 0$）。

この状況のもと我々が示したいのは、$A^{p_n}H$ と $A^{p_{n+1}}H$ との間に挟まれた $A^p H$ での有界性である。つまり、

$$\|Tx\|_{A^p} \leq c_p \|x\|_{A^p}, \quad x \in AH$$

を示したい。両側の空間での有界性が成立しているときに、挟まれている空間での有界性を示したい。しかし、これ以上の考察の進展は何も得られていない。補空間理論を適用すれば何かわかるのではないか、と期待している程度である。

4　関連事項

この節では、個人的興味に基づき、前節までの内容に関連する話をしてみる。

無限次元な複素ヒルベルト空間 H の部分空間 M が半閉であるとは、あるヒルベルトノルム $\|\cdot\|_M$ が存在して $(M, \|\cdot\|_M) \hookrightarrow H$ となることである。半閉部分空間と有界作用素の値域は同値であることはよく知られている。
M と N を $M \subsetneq N \subsetneq H$ を満たす H で稠密な半閉部分空間とする。このとき、M と N が S-鎖の関係にある（a relation of S-chain）とは、ある正値な有界作用素 $A \geq 0$ と p $(0 < p < 1)$ が存在して、$M = AH, N = A^p H$ となることで定義する。このとき、「１．序」における $(*)$ が成り立つと認めたとすると、明らかに有界作用素 T について $TM \subseteq M$ ならば $TN \subseteq N$ である。

Remark 3 「S-鎖の関係」というネーミングは今のところここだけのものであるが、$H = L^2(\mathbb{R}^d)$ $(d \geq 1)$ で、$A = (I - \Delta)^{-\frac{1}{2}}$ のとき、$N = A^p H$ は p 次のソボレフ（Sobolev）空間になっている。つまり、ソボレフ空間と de Branges 空間 $\mathcal{M}(A^p)$ が等距離同型となる。S-鎖と名付けた理由はここにある。

さて、この S-鎖に関して基本的な問題を提起する。以下における L, M, N は H と異なる稠密な半閉部分空間とする。

Ｑ１．$M \subsetneq N$ を満たす任意の M と N は S-鎖の関係にあるか？つまり、$M = AH, N = A^p H$ となる $A \geq 0$ と $0 < p < 1$ は存在するか？

Ｑ２．M を任意に与える。このとき、$M \subsetneq N$ を満たしかつ M と N はS-鎖の関係にある N の全体集合を特徴付けよ。

Ｑ３．もし $L \subsetneq M$ かつ $M \subsetneq N$ が S-鎖の関係にあるならば、$L \subsetneq N$ は S-鎖の関係にあるか？

Ｑ４．もし $M \subsetneq N$ が S-鎖の関係にあるとき、代数的次元 $\dim N/M$ は有限か無限か？

以上の問題に対して、Ｑ１．およびＱ４．への考察を報告する。

まず、Ｑ１．については「No」である。理由は次の通りである。$M \subsetneq N$ の包含関係のあるうち、$TM \subseteq M$ であるが $TN \subseteq N$ でない $T \in \mathcal{B}(H)$ が存在する状況を考える。このときの M と N はS-鎖の関係にはなっていない。なっていたとすると、$TN \subseteq N$ となってしまうので。

次にＱ4. について、以下の結果が得られた。

Proposition 3 もし $M \subsetneq N$ が S-鎖の関係にあるならば代数的次元 $\dim N/M = \infty$ である。

(証明の概略) $M = AH$ と $N = A^p H$ を満たす $A \geq 0$ と $0 < p < 1$ が存在したとする。このとき、詳細の証明は省略するが次の 2 つの事実が成り立つ。

- AH は $\mathcal{M}(A^p)$ で稠密である。
- M は $\mathcal{M}(A^p)$ においても半閉である。

これらより、$\dim N/M = \dim A^p H/AH = \dim \mathcal{M}(A^p)/M = \infty$ となることがわかる。もし右辺が有限、すなわち余次元有限とすると、ヒルベルト空間 $\mathcal{M}(A^p)$ において半閉部分空間 M は閉となる。稠密性から結局 $N = \mathcal{M}(A^p) = M$ を得る。これは矛盾である。

□

参加者名簿

氏名 (敬称略)	所　属
阿部 修也	新潟大学自然科学研究科
阿部 敏一	新潟大学自然科学研究科
石井 透	新潟大学 理学部
泉池 敬司	新潟大
大井 志穂	新潟大学 理学部
大和田 智義	静岡大
春日 一浩	工学院大学 学習支援センター
川村 一宏	筑波大 数理物質系数学域
Hong Oh Kim	KAIST, 韓国
神保 敏弥	奈良教育大 EP
関川 武	新潟大学自然科学研究科
瀬戸 道生	島根大
高木 啓行	信州大 理
田中 純一	早大教育
鶴見 和之	
富山 淳	都立大 E.P.
丹羽 典朗	日本大・薬
野川 達也	新潟大学自然科学研究科
羽鳥 理	新大 自然科学系
濱田 裕康	九州大学 マス・フォアインダストリ研究所
平澤 剛	茨城大学 工学部
福田 暢大	新潟大学自然科学研究科
三浦 大志	新潟大学 理学部
三浦 毅	新潟大学 自然科学系
山本 隆範	北海学園大学・工
吉本 頒平	島根大学 総合理工研究科
渡邉 恵一	新潟大学 自然科学系