2012年度 関数環研究集会

報　告　集

2013年 10月

2012 年度の関数環研究集会は，日本大学理工学部（駿河台キャンパス）にて，2012 年 11 月 12 日 (月)・13 日 (火) の 2 日間，開催されました。大勢の方々にご参加いただき，9 の講演が行われました。2 日間，有意義な情報交換や活発な討論ができ，充実した集会になりました。ご講演くださった皆様をはじめ，ご参加くださった皆様，そして，集会にご協力くださいました皆様に，心よりお礼申し上げます。

講演者の方々には報告原稿をお書きいただきましたので，ここに取りまとめ，報告集といたします。

世話人：御前　憲広（日本大学理工学部）
丹羽　典朗　（日本大学薬学部）
三浦　毅　（山形大学）

2012年度 関数環研究集会 プログラム

11月12日（月）

11月13日（火）

特殊直交群上の等距離写像

新潟大学大学院自然科学研究科　　阿部　敏一 (Tosikazu Abe)

1 Introduction

行列による線形空間上の等距離写像については様々な結果が知られているが、行列による群の上の等距離写像にも興味がある。本報告は特殊直交群 $SO(n)$ 上の等距離写像についての結果である。なおこの内容は羽鳥理先生、秋山茂樹先生との共同研究の結果である。

2 特殊直交群上の等距離写像

零ベクトルでない $\mathbb{R}^n$ の元 $(x_1, \ldots, x_n)$ で $x_1 \geq \cdots \geq x_n \geq 0$ を満たすもの全体を $\mathbb{R}^n_{+\downarrow}$ と書く。$\mathfrak{c} = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n_{+\downarrow}$ に対して、

$$\|A\|_{\mathfrak{c}} = \sum_{i=1}^{n} c_i \sigma_i(A) \ (\forall A \in M_n(\mathbb{R}))$$

によって定めた $M_n(\mathbb{R})$ 上のノルム $\|\cdot\|_{\mathfrak{c}}$ を $M_n(\mathbb{R})$ 上の c-spectral norm という。ここで $\sigma_1(A) \geq \cdots \geq \sigma_n(A)$ は A の特異値 (singular value) とする。このノルムによって定まる距離によって特殊直交群 $SO(n)$ 上の距離を考える。このとき、以下の結果を得た。ここで n 次単位行列を E_n、n 次実交代行列全体を $K_n(\mathbb{R})$、$A \in K_4(\mathbb{R})$ に対してその $(1,4)$ 成分と $(2,3)$ 成分及び $(4,1)$ 成分と $(3,2)$ 成分を入れ替えたものを $\widetilde{A}$ と書く。

Theorem 1. T は $SO(n)$ から $SO(n)$ への等距離写像とする。このとき T は以下のいずれかの形で表すことが出来る。

(a) $T(X) = T(E_n)OXO^{-1}$ $(\forall X \in SO(n))$,

(b) $T(X) = T(E_n)OX^{-1}O^{-1}$ $(\forall X \in SO(n))$,

(c) $n = 4$, $T(X) = T(E_4)O(\exp(\widetilde{A}))O^{-1}$ $(\forall X \in SO(n)$, 但し $\exp(A) = X, A \in K_4(\mathbb{R}))$,

(d) $n = 4$, $T(X) = T(E_4)O(\exp(-\widetilde{A}))O^{-1}$ $(\forall X \in SO(n)$, 但し $\exp(A) = X, A \in K_4(\mathbb{R}))$.

証明の概略. $T_0(\cdot) = (T(E_n))^{-1}T(\cdot)$ とすると T_0 は $T_0(E_n) = E_n$ を満たす $SO(n)$ 上の全射等距離写像で Jordan triple を保存する。そのことから $A \in K_n(\mathbb{R})$ に対して $S_A(t) = T_0(\exp(tA))$ とすると、S_A は $SO(n)$ 上の one-parameter group である。したがって、リー群の one-parameter group の表現から $S_A(t) = \exp(tf(A))$ となる $f(A) \in K_n(\mathbb{R})$ が一意に存在する。これは任意の $A \in K_n(\mathbb{R})$ に対していえるので、これによって $K_n(\mathbb{R})$ から $K_n(\mathbb{R})$ への写像 f が定まる。f は全射で $f(0) = 0$ である。また、$\|e^{tf(A)} - e^{tf(B)}\|_{\mathfrak{c}} = \|T_0(e^{tA}) - T_0(e^{tB})\|_{\mathfrak{c}} = \|e^{tA} - e^{tB}\|_{\mathfrak{c}}$ $(\forall t \in \mathbb{R})$ より

$$\|f(A) - f(B)\|_{\mathfrak{c}} = \lim_{t\to 0} \|\frac{e^{tf(A)} - e^{tf(B)}}{t}\|_{\mathfrak{c}} = \lim_{t\to 0} \|\frac{e^{tA} - e^{tB}}{t}\|_{\mathfrak{c}} = \|A - B\|_{\mathfrak{c}}.$$

よって f は等距離写像であり、Mazur-Ulam theorem より実線形写像である。したがって [8] より以下のいずれかを満たすような n 次直交行列 O が存在する。

(aa) $f(A) = OAO^{-1}$ $(\forall A \in K_n(\mathbb{R}))$;
(bb) $f(A) = -OAO^{-1}$ $(\forall A \in K_n(\mathbb{R}))$;
(cc) $n = 4$, $f(A) = O\widetilde{A}O^{-1}$ $(\forall A \in K_4(\mathbb{R}))$;
(dd) $n = 4$, $f(A) = -O\widetilde{A}O^{-1}$ $(\forall A \in K_4(\mathbb{R}))$.

ここで f が (aa) の形をしている場合、任意の $X \in SO(n)$ と $\exp(A) = X, A \in K_4(\mathbb{R})$ に対して

$$T_0(X) = \exp(f(A)) = \exp(OAO^{-1}) = O\exp(A)O^{-1} = OXO^{-1}$$

より、T は (a) の形で得られる。同様に (bb) から (b)、(cc) から (c)、(dd) から (d) が得られる。 □

以下 $\|\cdot\|$ を $M_n(\mathbb{R})$ 上の unitarily invariant norm とし、そのノルムによって定まる距離によって特殊直交群 $SO(n)$ 上の距離を考える。このとき、Theorem2 が成り立つ。特に c-spectral norm は unitarily invariant norm である。

Theorem 2. *Theorem1 の (a),(b),(c),(d) の形で表される T は $SO(n)$ 上の等距離写像である。*

証明の概略. (a),(b) は明らかであるので (c) について考える。任意の $A, B \in K_4(\mathbb{R})$ に対して $\|exp(A) - exp(B)\| = \|exp(\widetilde{A}) - exp(\widetilde{B})\|$ であることを示せば充分。[3] では $C, D \in K_4(\mathbb{R})$ に対して $exp(C)exp(D) = exp(BCH(C, D))$ となる $BCH(C, D) \in K_4(\mathbb{R})$ を決定している。その結果を用いて $BCH(C, D)$ の固有多項式を計算すると、$BCH(A, -B)$ の固有多項式と $BCH(\widetilde{A}, \widetilde{-B})$ の固有多項式は一致することがわかる。よって $exp(BCH(A, -B)) - E_4$ の固有多項式と $exp(BCH(\widetilde{A}, \widetilde{-B})) - E_4$ の固有多項式が一致する。また、$exp(BCH(A, -B)) - E_4$ と $exp(BCH(\widetilde{A}, \widetilde{-B})) - E_4$ は正規 (normal) であるのでこれらの特異値は全て一致する。ここで $\|\cdot\|$ は unitarily invariant norm であったので特異値が全て一致すればノルムの値も等しい。したがって $\|exp(A) - exp(B)\| = \|exp(BCH(A, -B) - E_4)\| = \|exp(BCH(\widetilde{A}, \widetilde{-B}) - E_4)\| = \|exp(\widetilde{A}) - exp(\widetilde{B})\|$ である。(d) はこのことから明らか。 □

Thorem1、Theorem2 より $SO(n)$ 上で c-spectral norm によって定まる距離を考えたときの $SO(n)$ から $SO(n)$ への等距離写像の形は完全に決定されたが、一般の unitarily invariant norm によって定まる距離を考えた場合に (a),(b),(c),(d) 以外の等距離写像が存在するかと言う問題が残っている。なお、$T(exp(A)) = exp(\widetilde{A})$ $(\forall A \in K_4(\mathbb{R}))$ によって定まる写像 T は同型写像でもアンチ同型写像でもない。

参考文献

[1] M. Brešar and Š. Špenko, *Determining elements in Banach algebras through spectral properties*, J. Math. Anal. Appl., **393** (2012), 144–150

[2] M. Brin and G. Stuck, *Introduction to dynamical systems*, Cambridge Univ. Press, 2002

[3] K. Fujii and T. Suzuk, *On the magic matrix by Makhlin and the B-C-H formula in SO(4)*, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys., **4** (2007), 897–905

[4] O. Hatori, G. Hirasawa, T. Miura and L. Molnár, *Isometries and maps compatible with inverted Jordan triple products on groups*, Tokyo J. Math., to appear.

[5] O. Hatori, S. Lambert, A. Luttman, T. Miura, T. Tonev and R. Yates, *Spectral preservers in commutative Banach algebras*, in Function Spaces in Modern Analysis, K. Jarosz, Edt. Contemp. Math., **547**, Amer. Math. Soc., (2011),103–124

[6] O. Hatori and L. Molnár, *Isometries of the unitary group*, Proc. Amer. Math. Soc., **140** (2012), 2127–2140

[7] O. Hatori and L. Molnár, *Isometries of substructures of general linar groups of C^*-algebras*, preprint

[8] Chi-Kwong Li and Nam-Kiu Tsing, *Duality between some linear preserver problems. III. c-spectral norms and (skew)-symmetric matrices with fixed singular values*, Linear Algebra Appl., **143** (1991), 67–97.

[9] L. Molnár, *Some characterizations of the automorphisms of $B(H)$ and $C(X)$*, Proc. Amer. Math. Soc., **130**(2002), 111-120

[10] S. Sakai, *On the group isomorphism of unitary groups in AW^*-algebras*, Tohoku Math. J., **7** (1955), 87–95.

Norm-preserving surjections on the space of invertible elements in $C^1_{\mathbb{R}}[0,1]$

信州大学アソシエイト研究員　　古清水 大直 (Hironao Koshimizu)

保存問題：「ある空間からある空間への写像が, ある構造・集合・値を保存するとき,
他にどんな構造・集合・値を保存するのか.」

この問題は様々な分野で考えられていて非常に重要である. ここでは, この問題の一つを考える. 実数値連続微分可能関数からなる空間の可逆元全体の集合の間のあるノルムを保存する全射の写像を考える. この写像が inverted Jordan triple product を保存することを示すことにより, 荷重合成作用素の形をしていることを突き止めた.

1 Introduction

ノルム空間の間の等距離写像に関して, 次の重要な定理がある.

Mazur-Ulam の定理.

A, B をノルム空間とする. T を A から B への全射の等距離写像で $T0 = 0$ とする. このとき, T は実線形写像である.

この定理の証明の重要な部分は, ノルム空間における代数的中点とを距離的中点を利用し,

$$T\left(\frac{f+g}{2}\right) = \frac{Tf+Tg}{2} \qquad (f, g \in A)$$

を導くことである.

この代数的中点の概念を群 G の上で考える. $f, g \in G$ に対して, $g = hf^{-1}h$ となる $h \in G$ を f と g の algebraic midpoint という. しかし, これは空間によって, 一意的でない場合や存在しない場合がある. 例えば, circle 群 $\mathbb{T}$ や実数の乗法群 $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ などがそうである.

一方, 2003 年に Väisälä は Mazur-Ulam の定理を簡潔に証明した ([8]). その証明のアイデアは, ノルム空間の 2 元 f, g に対して, $2g - f$ という元を考える方法であった. これは, g を中心として f と対称な点である. この考えを群上で考えられたものが inverted Jordan triple product である. 群 G の 2 元 f, g に対して, $gf^{-1}g$ を inverted Jordan triple product という. これは, もちろん一意的に存在し, さらに, f と $gf^{-1}g$ の algebraic midpoint が g になっていて非常に扱いやすいものである.

さて, 群の間の写像がどのような条件を満たせば, inverted Jordan triple product を保存するのかについて考えてみる. これについて, Hatori, Hirasawa, Miura and Molnár はいくつかの結果を得ている ([2]). ここでは, 連続微分可能関数からなる空間の可逆元全体の群の間のあるノルム保存写像について, この結果を利用することを考える. その前にいくつか知られている結果を述べる.

2　知られた結果

連続関数からなる空間の部分集合の間のあるノルム保存写像に関して, いくつかの結果が知られている.

X をコンパクト Hausdorff 空間とし, $C(X)$ を X 上の複素数値連続関数全体の Banach 環とする. ただし, ノルムは

$$\|f\|_\infty = \sup\bigl\{|f(x)| : x \in X\bigr\} \qquad (f \in C(X))$$

で与えられる. E を $C(X)$ の実線形部分空間とし, $\exp E = \bigl\{\exp u : u \in E\bigr\}$ とする. $\exp E$ の間の写像に関して, inverted Jordan triple product を保存する条件が知られている.

定理 A (Hatori, Hirasawa, Miura and Molnár [2]). $\exp E$ から $\exp E$ への全射の写像 T が,

$$\max\left\{\left\|\frac{Tf}{Tg}-1\right\|_\infty, \left\|\frac{Tg}{Tf}-1\right\|_\infty\right\} = \max\left\{\left\|\frac{f}{g}-1\right\|_\infty, \left\|\frac{g}{f}-1\right\|_\infty\right\} \qquad (\forall f, g \in \exp E)$$

を満たすとする. このとき, $T(gf^{-1}g) = (Tg)(Tf)^{-1}(Tg) \quad (f, g \in \exp E)$ となる.

定理 A を使い, 次の特徴づけが知られている. X 上の絶対値 1 の連続関数からなる群を $\exp iC_{\mathbb{R}}(X)$ とかく.

定理 B (Hatori, Hirasawa, Miura and Molnár [2]). $\exp iC_{\mathbb{R}}(X)$ から $\exp iC_{\mathbb{R}}(X)$ への全射の写像 T が,

$$\|Tf - Tg\|_\infty = \|f - g\|_\infty \qquad (\forall f, g \in \exp iC_{\mathbb{R}}(X))$$

を満たすとする. このとき, X の開かつ閉集合 K と X から X への同相写像 φ を用いて,

$$(Tf)(x) = (T1)(x) \times \begin{cases} f(\varphi(x)) & (x \in K) \\ \overline{f(\varphi(x))} & (x \in X \setminus K) \end{cases} \qquad (f \in \exp iC_{\mathbb{R}}(X))$$

と表せる.

また, 関数環に関して次のことが知られている. A を X 上の関数環とする. また, A^{-1} を A の可逆元全体とし, $\exp A = \{\exp u : u \in A\}$ とする.

定理 C (Miura, Honma and Shindo [7]). $\mathcal{G}_A = A^{-1}$ または $\exp A$ とする. $\mathcal{G}_A$ から $\mathcal{G}_A$ への全射の写像 T が,

$$\left\|\frac{Tf}{Tg}-1\right\|_\infty = \left\|\frac{f}{g}-1\right\|_\infty \qquad (\forall f,\, g \in \mathcal{G}_A)$$

を満たすとする. このとき, A の Choquet 境界 $\mathrm{Ch}(A)$ の開かつ閉集合 K と $\mathrm{Ch}(A)$ の間の同相写像 φ を用いて,

$$(Tf)(x) = (T1)(x) \times \begin{cases} f(\varphi(x)) & (x \in K) \\ \overline{f(\varphi(x))} & (x \in \mathrm{Ch}(A) \setminus K) \end{cases} \qquad (f \in \mathcal{G}_A)$$

と表せる.

3　得られた結果

閉区間 $[0,1]$ 上の実数値連続微分可能関数全体の線形空間を $C^1_{\mathbb{R}}[0,1]$ とかくことにする. $C^1_{\mathbb{R}}[0,1]$ を Banach 環にするノルムはいくつか考えられるが, 例えば次の 2 つのノルムがある.

$$\begin{aligned} \|f\|_\Sigma &= \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \\ \|f\|_C &= \max\bigl\{|f(x)| + |f'(x)| : x \in [0,1]\bigr\} \end{aligned} \qquad (f \in C^1_{\mathbb{R}}[0,1])$$

また, $C^1_{\mathbb{R}}[0,1]$ の可逆元全体の集合を $(C^1_{\mathbb{R}})^{-1}$ とかく.

定理. $N \in \{\Sigma, C\}$ とする. $(C^1_{\mathbb{R}})^{-1}$ から $(C^1_{\mathbb{R}})^{-1}$ への全射の写像 T が,

$$\left\| \frac{Tf}{Tg} - 1 \right\|_N = \left\| \frac{f}{g} - 1 \right\|_N \quad \bigl(\forall f,\, g \in (C^1_{\mathbb{R}})^{-1}\bigr)$$

を満たすとする. このとき,

$$(Tf)(x) = (T1)(x) f(\varphi(x)) \qquad \bigl(x \in [0,1], f \in (C^1_{\mathbb{R}})^{-1}\bigr)$$

と表せる. ただし, $\varphi(x) = x$ $(x \in [0,1])$ または $\varphi(x) = 1 - x$ $(x \in [0,1])$ である.

証明の概略. $N = C$ の場合は, $N = \Sigma$ の場合と同様の議論で示せるので, $N = \Sigma$ の場合だけを考える. また, $\widetilde{T}(\cdot) = (T1)^{-1} T(\cdot)$ を考えればよいので, $T1 = 1$ として考える.

[Step 1]　$T(gf^{-1}g) = (Tg)(Tf)^{-1}(Tg)$ $(f > 0, g > 0)$ を示す.

$$d(f,g) = \left\| \frac{f}{g} - 1 \right\|_\Sigma + \left\| \frac{g}{f} - 1 \right\|_\Sigma \qquad \bigl(f,\, g \in (C^1_{\mathbb{R}})^{-1}\bigr)$$

とおけば, T は $(C^1_{\mathbb{R}})^{-1}$ から $(C^1_{\mathbb{R}})^{-1}$ への全単射で $d(Tf, Tg) = d(f,g)$ $(f, g \in (C^1_{\mathbb{R}})^{-1})$ となる写像になる. そして, [2, Collorary 3.9, Lemma 4.2] を使うことにより, $T(gf^{-1}g) = (Tg)(Tf)^{-1}(Tg)$ $(f > 0, g > 0)$ が示せる.

[Step 2]　$Tf = f \circ \varphi$ $(f > 0)$ を示す. ただし, $\varphi(x) = x$ $(x \in [0,1])$ または $\varphi(x) = 1 - x$ $(x \in [0,1])$ である.

任意に $u \in C^1_{\mathbb{R}}[0,1]$ をとる. $S(t) = T(\exp tu)$ $(t \in \mathbb{R})$ と定めると, [Step 1] の結果より, S は $C^1_{\mathbb{R}}[0,1]$ の continuous one-parameter group になる. よって, $S(t) = \exp t f_u$ $(t \in \mathbb{R})$ となる $f_u \in C^1_{\mathbb{R}}[0,1]$ が存在する. このとき, $F : C^1_{\mathbb{R}}[0,1] \ni u \mapsto f_u \in C^1_{\mathbb{R}}[0,1]$ は全射の等距離写像で $F0 = 0$ となる. Mazur-Ulam の定理より, F は $C^1_{\mathbb{R}}[0,1]$ 上の全射, 線形, 等距離写像になる. さらに, Jarosz and Pathak の結果 ([5]) より, $Fu = u \circ \varphi$ または $Fu = -u \circ \varphi$ となる. ただし, $\varphi(x) = x$ $(x \in [0,1])$ または $\varphi(x) = 1 - x$ $(x \in [0,1])$ である. ノルムの条件を考慮すれば, $Fu = u \circ \varphi$ の場合しか起こらないことがわかる. このとき, $Tf = f \circ \varphi$ $(f > 0)$ である.

[Step 3]　[Step 1], [Step 2] と同様の議論をして, $Tf = f \circ \psi$ $(f < 0)$ を示す. ただし, $\psi(x) = x$ $(x \in [0,1])$ または $\psi(x) = 1 - x$ $(x \in [0,1])$ である.

[Step 4]　$\varphi = \psi$ を示す.

$\varphi(x) = x, \psi(x) = 1 - x$ と仮定する. $f = x + 1, g = -(x+1)$ とおけば,

$$\left\| \frac{f}{g} - 1 \right\|_\Sigma = \left\| \frac{x+1}{-(x+1)} - 1 \right\|_\Sigma = \| -1 - 1 \|_\Sigma = 2$$

となる. 一方, $f>0$, $g<0$ だから, [Step 2] と [Step 3] より

$$\left\|\frac{Tf}{Tg}-1\right\|_\Sigma=\left\|\frac{T(x+1)}{T(-(x+1))}-1\right\|_\Sigma=\left\|\frac{x+1}{x-2}-1\right\|_\Sigma=\left\|\frac{3}{x-2}\right\|_\Sigma=6$$

となり, 矛盾する. よって, $\varphi=\psi$ である.

こうして, $Tf=f\circ\varphi$ $\bigl(f\in(C^1_{\mathbb{R}})^{-1}\bigr)$ が成り立つ. $\square$

参考文献

[1] R.J. Fleming and J.E. Jamison, *Isometries on Banach spaces : function spaces*, Chapman & Hall/CRC Monographs and Surveys in pure and Applied Mathematics, 2003.

[2] O. Hatori, G. Hirasawa, T. Miura and L. Molnár, *Isometries and maps compatible with inverted Jordan triple product on groups*, preprint.

[3] O. Hatori, K. Kobayashi, T. Miura and S.-E. Takahasi, *Reflections and a generalization of the Mazur-Ulam theorem*, Rocky Mountain J. Math., **42** (2012), 117–150.

[4] D. Honma, *Norm-preserving surjections on algebras of continuous functions*, Rocky Mountain J. Math., **39** (2009), 1517–1531.

[5] K. Jarosz and V.D. Pathak, *Isometries between function spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **305** (1988), 193–206.

[6] S. Mazur and S. Ulam, *Sur les transformationes isométriques d'espaces vectoriels normés*, C. R. Acad. Sci. Paris, **194** (1932), 946–948.

[7] T. Miura, D. Honma and R. Shindo, *Divisibly norm-preserving maps between commutative Banach algebras*, Rocky Mountain J. Math., **41** (2011), 1677–1699.

[8] J. Väisälä, *A proof of the Mazur-Ulam theorem*, Amer. Math. Monthly, **110** (2003), 633–635.

Operator theory induced by the Dirichlet space over the unit disk

島根大学総合理工学部　　瀬戸　道生 (Michio Seto) [1]

この原稿はとある雑誌に投稿したのですが残念ながらリジェクトされてしまったものです．レフェリーからは専門家の間では知られている内容であるとのレポートを受け取りましたので，御蔵入りにしようかと思っていたのですが，このテーマを勉強するためのノートとして読むこともできると思いますので，三浦先生の許可を得た上で関数環研究集会の報告集に掲載することにしました．せっかく勉強したということもあり，この分野でも論文を書きたいのですが,「有界作用素と一変数解析関数」という設定ではなかなか新しいことはできないようです．作用素を非有界にすれば一変数の設定でもまだいろいろ考えることができそうです（多変数の場合，言葉は違いますが，実は以前から研究しています）．その際は Segal-Bargmann 空間，de Branges 空間等が候補となりそうです．非有界の場合にも何か興味を惹くと思われる結果を得ることがありましたら，また関数環研究集会で報告させていただきたく思います．

概 要

We study operators induced by the reproducing kernel of the Dirichlet space over the unit disk. A new class of bounded linear operators which contains contractions and the Dirichlet shift is suggested. We discuss its basic theory, especially a model theorem, von Neumann's inequality and a dilation theorem are shown.

2010 Mathematical Subject Classification: Primary 47B32; Secondary 47A45
keywords: reproducing kernels, Dirichlet space, contractions

1 Introduction

Let T be a contraction acting on a Hilbert space. Then $I-TT^*$ and $I-T^*T$ are called the defect operators of T, which play important role in abstract Hilbert space operator theory. Especially, if the strong limit of T^n is 0, then T can be represented as a restriction of the adjoint of Toeplitz operator T_z to some invariant subspace in a vector valued Hardy space. This is the first step toward the celebrated theory of Sz.-Nagy and Foias. Now, as one of its generalization, Agler pointed out that defect operator $I-TT^*$ corresponds to the reciprocal of Szegö kernel, and established his abstract model theorem from this point of view (see Chapter 14 in Agler-McCarthy [1]). In this paper, we are going to study operators corresponding to the reciprocal of the reproducing kernel of the Dirichlet space over the unit disk.

[1]The author was supported by Grant-in-Aid for Young Scientists (B) (23740106).

Let $\mathbb{D}$ denote the open unit disk, that is, we set $\mathbb{D} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$. The Dirichlet space over $\mathbb{D}$ will be denoted by $\mathcal{D}$, that is, we set

$$\mathcal{D} = \left\{ f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 \, dxdy < +\infty \right\}.$$

We give a norm on $\mathcal{D}$ as follows:

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)|c_n|^2 \quad \left(f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \right).$$

Then $\mathcal{D}$ is a Hilbert space having the following reproducing kernel:

$$\begin{aligned} k_\lambda(z) &= \frac{1}{\overline{\lambda} z} \log \left(\frac{1}{1 - \overline{\lambda} z} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} \overline{\lambda} z + \frac{1}{3} \overline{\lambda}^2 z^2 + \cdots , \end{aligned}$$

and $\{z^n/\sqrt{n+1}\}_{n \geq 0}$ is an orthonormal basis of $\mathcal{D}$, which will be called the canonical basis. D will denote the multiplication operator by the coordinate function z, which is called the Dirichlet shift. D is a weighted shift which has the following matrix representation with respect to the canonical basis:

$$D \cong \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1}} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}} & 0 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Now, we set

$$F(w) = w / \log \left(\frac{1}{1-w} \right),$$

which is holomorphic in $\mathbb{D}$ and has a branch point at $w = 1$. The nth Taylor coefficient of F will be denoted by d_n, that is, we set

$$F(w) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n w^n.$$

Then d_n is negative for all $n \geq 1$ by Kaluza's theorem (see Lemma 7.38 in [1]). In addition, we need the following:

Lemma 1.1 $\sum_{n=0}^{\infty} d_n = 0$ and $\sum_{n=0}^{\infty} n d_n = -\infty$.

Proof For $0 < r < 1$, it is easy to see that $F(r)$ converges to 0 as r tends to 1. Then, simultaneously, by the monotone convergence theorem, $\sum_{n=0}^{\infty} d_n r^n$ converges to $\sum_{n=0}^{\infty} d_n$. Thus we have that $\sum_{n=0}^{\infty} d_n = 0$. Applying the same argument to F', we have the latter part.

Our main interest is the following formal operator series:

$$\Delta_T = \sum_{n=0}^{\infty} d_n T^n T^{*n},$$

which is obtained formally by Agler's hereditary functional calculus as in the case of the Szegö kernel. It is known that Δ_T for a strict contraction T can be treated by Agler's abstract model theorem. Hence, it is reasonable to expect that Δ_T will play an important role in a certain class of operators if it converges. In fact, we will give a new class of operators called Dirichlet contractions (see Definition 4.1) and its basic operator theory. We also should mention that our approach has been influenced by the work of Yang and his collaborators (see Guo-Yang [4] for Hardy space over the bidisk and Yang-Zhu [7] for Bergman space over the unit disk).

This paper has been divided into four sections. In Section 2, we deal with Dirichlet shift D, and we show that Δ_D converges strongly. In Section 3, we study Δ_T for restrictions of the Dirichlet shift to invariant subspaces. Some properties of Δ_T similar to those in [4] and [7] are given, and Δ_T for compressions of the Dirichlet shift into quotient spaces of invariant subspaces are discussed. In Section 4, we suggest a new class of operators called Dirichlet contractions and study its basic theory. A model theorem, von Neumann's inequality and a dilation theorem for Dirichlet contractions are given.

2 The Dirichlet shift

In this section, we deal with Dirichlet shift D. We shall show that Δ_D converges strongly, which is the fundamental fact in this paper.

Lemma 2.1 $\Delta_n k_\lambda$ converges to 1 strongly, where we set $\Delta_n = \sum_{k=0}^{n} d_k D^k D^{*k}$.

Proof In order to prove the statement, we shall use the norm $|h(0)|^2 + \|h'\|_{L_a^2}^2$ equivalent to $\|h\|^2$, where $\|\cdot\|_{L_a^2}$ denotes the norm of the Bergman space over $\mathbb{D}$. We set $f = 1/k_\lambda$ and $f_n = \sum_{j=0}^{n} d_j \overline{\lambda}^j z^j$. Then it is easy to see that f is in the multiplier algebra of $\mathcal{D}$. Hence we have that

$$\begin{aligned}
&\|\Delta_n k_\lambda - 1\|^2 \\
&= \|f_n k_\lambda - k_\lambda / k_\lambda\|^2 \\
&\sim |(f_n(0) - f(0))k_\lambda(0)|^2 + \|(f_n' - f')k_\lambda + (f_n - f)(k_\lambda)'\|_{L_a^2}^2 \\
&\le |(f_n(0) - f(0))k_\lambda(0)|^2 + (\|(f_n' - f')k_\lambda\|_{L_a^2} + \|(f_n - f)(k_\lambda)'\|_{L_a^2})^2.
\end{aligned}$$

Since f_n converges to f in some neighborhood of the closure of $\mathbb{D}$, we have the conclusion.

Let P_0 denote the orthogonal projection from $\mathcal{D}$ onto $\mathbb{C}$.

Theorem 2.1 Δ_D converges strongly, and $\Delta_D = P_0$.

Proof Trivially, $\{\Delta_n\}_n$ is a monotone decreasing sequence of self-adjoint operators, and I is an upper bound of $\{\Delta_n\}_n$. Let $\mathcal{V}$ denote the set of all finite linear combinations of reproducing kernels. Then Lemma 2.1 implies that

$$\langle P_0 h, h\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle \Delta_n h, h\rangle \le \langle \Delta_n h, h\rangle$$

for any h in $\mathcal{V}$. Since $\mathcal{V}$ is a dense subspace of $\mathcal{D}$, we have that

$$P_0 \le \Delta_{n+1} \le \Delta_n \le I.$$

Hence Δ_D converges strongly and $P_0 \le \Delta_D$. Moreover, we have that $\Delta_D = P_0$, because $\Delta_D = P_0$ on $\mathcal{V}$. This concludes the proof.

Remark 2.1 Let H^2 be the Hardy space over $\mathbb{D}$, and let T_z be the Toeplitz operator of coordinate function z acting on H^2. Then $I - T_z T_z^*$ is the orthogonal projection from H^2 onto $\mathbb{C}$. Theorem 2.1 exactly corresponds to this fact. Some results similar to Theorem 2.1 are known in other reproducing kernel Hilbert spaces (see Arveson [2], Guo-Yang [4] and Yang-Zhu [7]).

Remark 2.2 Δ_{D^*} does not converge as a bounded linear operator. Indeed, by Lemma 1.1,

$$1 - \langle \Delta_{D^*}1, 1\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}|d_n|\|D^n 1\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|d_n|\|z^n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|d_n|(n+1) = +\infty.$$

3 Restrictions and compressions of the Dirichlet shift

Let $\mathcal{M}$ be a submodule of $\mathcal{D}$, that is, $\mathcal{M}$ is a closed invariant subspace of $\mathcal{D}$ under the action of the Dirichlet shift D, and let $\mathcal{N}$ denote the quotient space $\mathcal{D}/\mathcal{M} = \mathcal{D}\ominus\mathcal{M}$. We set $R = P_{\mathcal{M}}D|_{\mathcal{M}}$ (resp. $S = P_{\mathcal{N}}D|_{\mathcal{N}}$), where $P_{\mathcal{M}}$ (resp. $P_{\mathcal{N}}$) denotes the orthogonal projection onto $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{N}$). We deal with R and S as operators acting on $\mathcal{M}$ and $\mathcal{N}$, respectively. In this section, we are going to study Δ_R and Δ_S. From the point of view suggested by Guo-Yang [4] and Yang-Zhu [7], we expect that Δ_R and Δ_S will encode the data of $\mathcal{M}$ and $\mathcal{N}$.

Theorem 3.1 Let $\mathcal{M}$ be a submodule of $\mathcal{D}$. Then

(i) Δ_R converges strongly, and is non-negative,

(ii) Δ_S converges strongly, and $\Delta_S = P_{\mathcal{N}}P_0P_{\mathcal{N}}$.

Proof We set $\Delta_{R,n} = \sum_{k=0}^{n} d_k\ R^k R^{*k}$. Let f be any function in $\mathcal{M}$. Identifying $R^k R^{*k}$ with $D^k P_{\mathcal{M}} D^{*k} P_{\mathcal{M}}$, we have that

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} d_k \langle R^k R^{*k} f, f\rangle &= \sum_{k=0}^{n} d_k \langle D^k P_{\mathcal{M}} D^{*k} P_{\mathcal{M}} f, f\rangle \\ &= \sum_{k=0}^{n} d_k \langle P_{\mathcal{M}} D^{*k} f, P_{\mathcal{M}} D^{*k} f\rangle \\ &\geq \sum_{k=0}^{n} d_k \langle D^{*k} f, D^{*k} f\rangle \\ &= \sum_{k=0}^{n} d_k \langle D^k D^{*k} f, f\rangle.\end{aligned}$$

Therefore we have that $P_{\mathcal{M}} \Delta_{D,n} P_{\mathcal{M}} \leq \Delta_{R,n}$. By Theorem 2.1, $P_{\mathcal{M}} \Delta_{D,n} P_{\mathcal{M}}$ converges to $P_{\mathcal{M}} \Delta_D P_{\mathcal{M}}$ strongly, and $P_{\mathcal{M}} \Delta_D P_{\mathcal{M}}$ is a lower bound of $\{\Delta_{R,n}\}_n$. Since $\Delta_{R,n}$ is monotone decreasing, $\Delta_{R,n}$ converges strongly. This concludes the proof of (i). Similar calculation on S implies (ii).

We give two comments as corollaries of Theorem 3.1.

Corollary 3.1 Let $\mathcal{M}_1$ and $\mathcal{M}_2$ be submodules of $\mathcal{D}$, and let R_1 and R_2 denote restrictions of D to $\mathcal{M}_1$ and $\mathcal{M}_2$, respectively. If $\mathcal{M}_1$ is contained in $\mathcal{M}_2$ then $\langle \Delta_{R_2} f, f\rangle \leq \langle \Delta_{R_1} f, f\rangle$ for any f in $\mathcal{M}_1$.

Corollary 3.2 If there exists a unitary module map from $\mathcal{M}_1$ onto $\mathcal{M}_2$, then $\Delta_{R_2} = U \Delta_{R_1} U^*$.

Example 3.1 We consider the submodule generated by coordinate function z. Then, we have that

$$\begin{aligned}\Delta_R z^n &= (I + d_1 R R^* + \cdots + d_{n-1} R^{n-1} R^{*n-1}) z^n \\ &= (I + d_1 D(I - P_0) D^* + \cdots + d_{n-1} D^{n-1} (I - P_0) D^{*n-1}) z^n \\ &= (I + d_1 D D^* + \cdots + d_{n-1} D^{n-1} D^{*n-1}) z^n \\ &= (1 + d_1 \frac{n+1}{n} + \cdots + d_{n-1} \frac{n+1}{2}) z^n \\ &= -(n+1) d_n z^n\end{aligned}$$

for $n \geq 1$. Therefore z^n is the eigenfunction with respect to eigenvalue $-(n+1)d_n$ for every $n \geq 1$. Since $\{z^n/\sqrt{n+1}\}_{n\geq 1}$ is an orthonormal basis of $\mathcal{M}$, this gives the spectral resolution of Δ_R.

Theorem 3.2 Let $\mathcal{M}$ be a submodule of $\mathcal{D}$. Then $\ker(I_{\mathcal{M}} - \Delta_R) = \mathcal{M} \ominus R\mathcal{M}$.

Proof Let ψ be a non-zero function in $\ker(I_{\mathcal{M}} - \Delta_R)$. Then, by Theorem 3.1, we have that

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} (-d_n) \| R^{*k} \psi \|^2 = \langle (I_{\mathcal{M}} - \Delta_{R,n}) \psi, \psi \rangle \to \langle (I_{\mathcal{M}} - \Delta_R) \psi, \psi \rangle \quad (n \to \infty),$$

which implies that $R^* \psi = 0$, because d_n is negative for any $n \geq 1$. Hence ψ belongs to $\mathcal{M} \ominus R\mathcal{M}$. Conversely, if ψ is a non-zero function in $\mathcal{M} \ominus R\mathcal{M}$, then we have that $(I_{\mathcal{M}} - \Delta_R)\psi = 0$ by Theorem 3.1. This concludes the proof.

Remark 3.1 Some results similar to Theorem 3.2 are known (see [4] and [7]). Further, it is well known that $\dim(\mathcal{M} \ominus R\mathcal{M}) = 1$ (Richter-Shields [6]) and any non-zero function in $\mathcal{M} \ominus R\mathcal{M}$ is cyclic for R (Richter [5]).

4 Dirichlet contractions

We would like to suggest a new class of operators in view of results obtained in Section 3.

Definition 4.1 Let T be a bounded linear operator acting on a Hilbert space $\mathcal{H}$. T is called a Dirichlet contraction if

$$\Delta_T = \sum_{n \geq 0} d_n T^n T^{*n}$$

converges strongly and is non-negative. Trivially, this definition is equivalent to that

$$\sum_{n \geq 0} d_n \|T^{*n} x\|^2$$

converges and is non-negative for any x in $\mathcal{H}$.

We have seen that restrictions and compressions of the Dirichlet shift are Dirichlet contractions. Especially, the Dirichlet shift is a non-contractive Dirichlet contraction. It is easy to see that any contraction is also a Dirichlet contraction (then Δ_T converges in the operator norm topology).

First, we shall show a property of spectra of general Dirichlet contractions.

Theorem 4.1 Let T be a Dirichlet contraction. Then $\sigma(T) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$.

Proof Let λ be an approximate point spectrum of T^*. Then there exists a sequence $\{x_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{H}$ such that $(T^* - \lambda I)x_l \to 0$ $(l \to \infty)$ and $\|x_l\| = 1$ $(l \in \mathbb{N})$. Then it is easy to see that $(T^{*n} - \lambda^n I)x_l \to 0$ and $\|T^{*n} x_l\| \to |\lambda|^n$ $(l \to \infty)$. Hence we have that

$$\begin{aligned}
\|x_l\|^2 &\geq \liminf_{l \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} |d_n| \|T^{*n} x_l\|^2 \\
&\geq \sum_{n=1}^{\infty} \liminf_{l \to \infty} |d_n| \|T^{*n} x_l\|^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} |d_n| |\lambda|^{2n}
\end{aligned}$$

by Fatou's lemma. Therefore we have that $|\lambda| \leq 1$. Since $\partial\sigma(T^*) \subseteq \sigma_{\mathrm{ap}}(T^*)$, we have that $\sigma(T^*) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$. This concludes the proof.

Setting $a_n = 1/(n+1)$, we have that

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n = \frac{1}{w} \log\left(\frac{1}{1-w}\right).$$

Then, by the definition of d_n's, we have that

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} d_n w^n\right) = 1.$$

This identity implies that

$$\begin{cases} a_0 d_0 = 1 \\ a_0 d_l + a_1 d_{l-1} + \cdots + a_l d_0 = 0 \quad (l \geq 1). \end{cases} \tag{4.1}$$

Next, We shall show a model theorem, that is, we will see that any Dirichlet contraction satisfying a certain condition can be represented by $D \otimes I$ acting on some vector valued Dirichlet space $\mathcal{D} \otimes \mathcal{H}$. Throughout this section, $D \otimes I$ will be denoted by D if no confusion occurs, and trivially $D \otimes I$ is also a Dirichlet contraction.

Lemma 4.1 Let T be a Dirichlet contraction. If $\sum_{n\geq 0} a_n \|T^{*n}x\|^2$ is finite for some x in $\mathcal{H}$. Then $\sum_{n\geq 0, k\geq 1} a_n |d_k| \|T^{*n+k}x\|^2$ is finite.

Proof Since we have that

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=1}^{\infty} |d_k| \|T^{*n+k}x\|^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\|T^{*n}x\|^2 - \|\sqrt{\Delta_T}T^{*n}x\|^2) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \|T^{*n}x\|^2 - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \|\sqrt{\Delta_T}T^{*n}x\|^2 \\ &< +\infty,\end{aligned}$$

we have the conclusion by Fubini's theorem.

Remark 4.1 $\{x \in \mathcal{H} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n \|T^{*n}x\|^2 < +\infty\}$ is a subspace.

Theorem 4.2 Let T be a Dirichlet contraction. If $\Delta_T \neq 0$ and there exists some dense subspace $\mathcal{V}$ of $\mathcal{H}$ such that

$$\sum_{n\geq 0} a_n \|T^{*n}x\|^2 < +\infty$$

for any x in $\mathcal{V}$, then there exists an isometry V from $\mathcal{H}$ into $\mathcal{D} \otimes \overline{\mathrm{ran}}\Delta_T$ which intertwines T^* and D^*. Moreover, $V^*(f \otimes x) = f(T)\sqrt{\Delta_T}x$ for any f in $\mathbb{C}[z]$ and any x in $\mathcal{H}$.

Proof Let $\{e_n\}_n$ be the canonical basis of $\mathcal{D}$, and we set

$$Vx = \sum_{n\geq 0} e_n \otimes \sqrt{a_n \Delta_T} T^{*n} x$$

for any x in $\mathcal{V}$, where we note that V is a densely defined linear operator from $\mathcal{V}$ into $\mathcal{D} \otimes \overline{\mathrm{ran}}\Delta_T$ by the assumption. Then, we have that

$$\begin{aligned}
\|Vx\|^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \|\sqrt{a_n \Delta_T} T^{*n} x\|^2 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \langle \Delta_T T^{*n} x, T^{*n} x \rangle \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\|T^{*n} x\|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k \|T^{*n+k} x\|^2) \\
&= \sum_{n \geq 0} a_n \|T^{*n} x\|^2 + \sum_{n \geq 0, k \geq 1} a_n d_k \|T^{*n+k} x\|^2 \\
&= \sum_{n \geq 0} a_n \|T^{*n} x\|^2 + \sum_{l \geq 1} \sum_{n+k=l, n \geq 0, k \geq 1} a_n d_k \|T^{*l} x\|^2 \\
&= \sum_{n \geq 0} a_n \|T^{*n} x\|^2 - \sum_{l \geq 1} a_l \|T^{*l} x\|^2 \\
&= \|x\|^2
\end{aligned}$$

by Lemma 4.1, Fubini's theorem and (4.1). Therefore V can be extended to an isometry from $\mathcal{H}$ into $\mathcal{D} \otimes \overline{\mathrm{ran}}\Delta_T$, uniquely.

Next, we shall show that $D^* V = V T^*$. For any x in $\mathcal{V}$, we have that

$$\begin{aligned}
D^* V x &= D^* \sum_{n=0}^{\infty} e_n \otimes \sqrt{a_n \Delta_T} T^{*n} x \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} e_{n-1} \otimes \frac{\sqrt{\Delta_T}}{\sqrt{n+1}} T^{*n} x \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} e_{n-1} \otimes \sqrt{a_{n-1} \Delta_T} T^{*n-1} T^* x \\
&= V T^* x.
\end{aligned}$$

Since $\mathcal{V}$ is a dense subset of $\mathcal{H}$, this concludes the proof.

Corollary 4.1 Let T be a Dirichlet contraction. If $\sigma(T) \subset \mathbb{D}$, then T is unitarily equivalent to $\oplus D^*$ restricted to an invariant subspace.

Proof Let $r(T)$ denote the spectral radius of T. For any $0 < \varepsilon < 1 - r(T)$, by the spectral radius formula, there exists a number N in $\mathbb{N}$ such that $\|T^n\|^{1/n} < r(T) + \varepsilon < 1$ for any $n \geq N$. Hence we have that

$$\begin{aligned}
\sum_{n=N}^{\infty} a_n \|T^{*n} x\|^2 &\leq \sum_{n=N}^{\infty} a_n \|T^n\|^2 \|x\|^2 \\
&\leq \sum_{n=N}^{\infty} a_n (r(T) + \varepsilon)^{2n} \|x\|^2 \\
&< +\infty.
\end{aligned}$$

Furthermore, let λ be an approximate point spectrum of T^*. Then there exists a sequence $\{x_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{H}$ such that $(T^* - \lambda I)x_l \to 0$ $(l \to \infty)$ and $\|x_l\| = 1$ $(l \in \mathbb{N})$. If $\Delta_T = 0$, then we would have that

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{l\to\infty} \langle \Delta_T x_l, x_l \rangle \\ &= \lim_{l\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} d_n \|T^{*n} x_l\|^2 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{l\to\infty} d_n \|T^{*n} x_l\|^2 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} d_n |\lambda|^{2n} \\ &= F(|\lambda|^2) \end{aligned}$$

by the Lebesgue dominated convergence theorem. However, this is a contradiction. Therefore we have that $\Delta_T \neq 0$. Thus we have the conclusion.

Remark 4.2 Corollary 4.1 is known as one of consequences of Agler's abstract model theorem (Theorem 14.43 in [1]).

We shall give the following definition for the sake of convenience:

Definition 4.2 A Dirichlet contraction T is said to be pure if $\Delta_T \neq 0$ and

$$\mathcal{V} = \{x \in \mathcal{H} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n \|T^{*n} x\|^2 < +\infty\}$$

is a dense subspace of $\mathcal{H}$.

Remark 4.3 The Dirichlet shift is pure, because $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{D}}$ is a dense subset of $\mathcal{D}$ and

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \|D^{*n} k_\lambda\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n |\lambda|^{2n} \|k_\lambda\|^2 < +\infty.$$

Trivially, every co-isometry is a non-pure Dirichlet contraction.

It will be worth while mentioning the following two facts on pure Dirichlet contractions, which have been shown in the proofs of Theorem 4.2 and Corollary 4.1, already.

Theorem 4.3 Let T be a pure Dirichlet contraction. Then

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n \Delta_T T^{*n} = I.$$

Theorem 4.4 Let T be a Dirichlet contraction. If $\sigma(T) \subset \mathbb{D}$ then T is pure. Especially, ρT is pure for any $0 < \rho < 1$.

As an application of Theorems 4.2 and 4.4, we have the following:

Theorem 4.5 (von Neumann's inequality) Let T be a Dirichlet contraction. Then

$$\|p(T)\| \leq \|p\|_{\mathrm{mult}}$$

for any p in $\mathbb{C}[z]$, where $\|p\|_{\mathrm{mult}}$ denotes the multiplier norm of p on $\mathcal{D}$.

Proof Since ρT is a pure Dirichlet contraction for any $0 < \rho < 1$ by Theorem 4.4, we have that $\|p(\rho T)\| \leq \|p\|_{\mathrm{mult}}$ by Theorem 4.2. As $\rho \to 1$, we have the conclusion.

The rest of this section is a slight modification on Section 8 in Arveson [2] (see also Theorem 14.33 in [1]).

Lemma 4.2 Let $\mathcal{A}$ denote the commutative algebra generated by D and I. Then Δ_D is not contained in span $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$.

Proof If $\Delta_D = \sum c_{mn} D^m D^{*n}$ (a finite sum), then we would have that

$$\langle \Delta_D k_\lambda, k_\lambda \rangle = \sum c_{mn} \overline{\lambda}^n \lambda^m k_\lambda(\lambda).$$

Since $\Delta_D = P_0$ and $1/k_\lambda(\lambda)$ is not a polynomial, this is a contradiction.

We set $\mathcal{S} = \operatorname{span} \mathcal{A}\mathcal{A}^* \oplus \mathbb{C}\Delta_D$. Then $\mathcal{S}$ is an operator system.

Theorem 4.6 Let T be a Dirichlet contraction on $\mathcal{H}$. Then there exists a completely positive linear map φ from $\mathcal{S}$ to $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ such that $\varphi(p(D)q(D)^*) = p(T)q(T)^*$ for any p, q in $\mathbb{C}[z]$ and $\varphi(\Delta_D) = \Delta_T$.

Proof First, we show the statement for a pure Dirichlet contraction T. Let V be the isometry in Theorem 4.2 such that $VT^* = D^*V$. We set $\varphi(X) = V^*(X \otimes I)V$ for X in $\mathcal{S}$. Then it is easy to see that $\varphi(p(D)q(D)^*) = p(T)q(T)^*$ for any p, q in $\mathbb{C}[z]$ and $\varphi(\Delta_D) = \Delta_T$.

Next, assume that T is a general Dirichlet contraction. Since ρT is pure for $0 < \rho < 1$ by Theorem 4.4, there exists a completely positive linear map φ_ρ from $\mathcal{S}$ to $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ such that $\varphi_\rho(p(D)q(D)^*) = p(\rho T)q(\rho T)^*$ for any p, q in $\mathbb{C}[z]$ and $\varphi_\rho(\Delta_D) = \Delta_{\rho T}$ by the previous argument. Then we have that $\varphi_\rho(p(D)q(D)^*) \to p(T)q(T)^*$ and $\varphi_\rho(\Delta_D) \to \Delta_T$ as $\rho \to 1$. Thus we have the desired completely positive linear map $\varphi = \lim_{\rho \to 1} \varphi_\rho$ from $\mathcal{S}$ to $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Finally, we shall show a dilation theorem for general Dirichlet contractions.

Theorem 4.7 Let T be a Dirichlet contraction on $\mathcal{H}$. Then there exist a separable Hilbert space $\mathcal{K}$, an isometry W from $\mathcal{H}$ to $\mathcal{K}$ and a unitary operator U such that $T^n = W^*(U^n \oplus \sum \oplus D^n)W$ and $\Delta_T = W^*(0 \oplus \sum \oplus \Delta_D)W$.

Proof Since $\mathcal{S}$ is an operator system contained in $\mathcal{B}(D)$, applying Arveson's extension theorem and Stinespring's dilation theorem to the completely positive map φ obtained in Theorem 4.6, there exist a separable Hilbert space $\mathcal{K}$, a unital $*$-homomorphism π from $\mathcal{B}(\mathcal{D})$ to $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ and an isometry W from $\mathcal{H}$ to $\mathcal{K}$ such that $T^n = W^*\pi(D^n)W$ and $\Delta_T = W^*\pi(\Delta_D)W$. Taking a minimal Stinespring representation π in the above argument, we may assume that π is a non-degenerate representation of $\mathcal{B}(\mathcal{D})$. Let $\mathfrak{K}$ denote the set of all compact operators. Since $\pi|_{\mathfrak{K}}$ is a representation of $\mathfrak{K}$, by Theorems I.9.14 and I.10.8 in [3], π is unitarily equivalent to $\pi_1 \oplus \pi_2$, where π_1 is a representation vanishing on $\mathfrak{K}$, and π_2 is the direct sum of copies of the identity representation. Since π is non-degenerate, we have the conclusion.

参考文献

[1] Agler J. and McCarthy J. E., *Pick interpolation and Hilbert function spaces*, Graduate Studies in Mathematics, 44. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[2] Arveson W., *Subalgebras of* C**-algebras* III: *Multivariable operator theory*, Acta Math. **181** (1998), no. 2, 159–228.

[3] Davidson K. R., C**-algebras by example*, Fields Institute Monographs, 6. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.

[4] Guo K. and Yang R., *The core function of submodules over the bidisk*, Indiana Univ. Math. J. **53** (2004), no. 1, 205–222.

[5] Richter S., *Invariant subspaces of the Dirichlet shift*, J. Reine Angew. Math. **386** (1988), 205–220.

[6] Richter S. and Shields A., *Bounded analytic functions in the Dirichlet space*, Math. Z. **198** (1988), no. 2, 151–159.

[7] Yang R. and Zhu K., *The root operator on invariant subspaces of the Bergman space*, Illinois J. Math. **47** (2003), no. 4, 1227–1242.

グランドフルタ不等式が成立するパラメータの範囲について

新潟大学理学部　　渡邉　恵一 (Keiichi Watanabe)

作用素 A について, どのベクトル h に対しても $0 \leq (Ah, h)$ であるとき $0 \leq A$ と表し, さらに可逆であるとき $0 < A$ と書く. 同じ空間に作用する自己共役作用素 A, B に対して, $B \leq A$ は $0 \leq A - B$ によって定義する.

行列の関数. m 次正方行列 A に対して, $A^*A = AA^*$ であることとユニタリ行列で対角化できることは同値である. そのとき, U が存在して

$$U^*AU = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_m \end{pmatrix}.$$

$A^*A = AA^*$ ならば, $0 < A$ と $0 < a_1, \cdots, a_m$ は同値であり, そのとき, 実数 p に対して

$$A^p = U \begin{pmatrix} a_1^p & & & \\ & a_2^p & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_m^p \end{pmatrix} U^*$$

が定義される（対角化のユニタリ行列には依存しないことが分かる. より一般に, 正規作用素とそのスペクトルの上で連続な関数に対して $f(A)$ が積分を用いて定義される）.

次の定理は, 作用素および行列単調関数についての Löwner 理論が含むものの一部であり, 幾度か再発見されたようで, 証明も何通りか知られている.

Theorem (Löwner '34, Heinz '51). $0 \leq p \leq 1$ とする. $0 \leq B \leq A$ ならば $B^p \leq A^p$.

$1 < p$ に対しては, $0 \leq B \leq A$ であっても $B^p \leq A^p$ とは限らない. 次の定理は, これに関するものとして画期的であった.

Theorem (Furuta '87). $0 \leq p$, $1 \leq q$, $0 \leq r$ とし, さらに $p + r \leq (1 + r)q$ とする. $0 \leq B \leq A$ ならば,

$$\left(A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1}{q}} \leq A^{\frac{p+r}{q}}$$

が成り立つ.

次の定理は, パラメータがすべて正である限り, 範囲

$$p+r \le (1+r)q \quad \text{かつ} \quad 1 \le q$$

が最良であることを述べている. **定理を 2 つの場合に分けて考え得ることを強調しても良いだろう**.

Theorem (Tanahashi '96). $0 < p,\, q,\, r$ とする. もし (**I**)$(1+r)q < p+r$ または (**II**)$0 < q < 1$ ならば, $0 < B \le A$ であるが

$$\left(A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1}{q}} \le A^{\frac{p+r}{q}}$$

でない 2×2 行列の組 A, B が存在する.

Proposition (I). $0 < p,\, 0 \le r$ とする. もし $1 < \alpha$ ならば, $0 < B \le A$ であるが

$$\left(A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1+r}{p+r}\alpha} \le A^{(1+r)\alpha}$$

でない 2×2 行列の組 A, B が存在する.

略証. $q = \dfrac{p+r}{(1+r)\alpha}$ とおく. これは, 場合 (**I**) に対応している.

Proposition (II). $0 < p < 1,\, 0 < r$ ならば, $0 < B \le A$ であるが

$$\left(A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1+r}{p+r}} \le A^{1+r}$$

でない 2×2 行列の組 A, B が存在する.

略証. $q = \dfrac{p+r}{1+r}$ とおく. これは, 場合 (**II**) に対応している.

ところで, 古田は, フルタ不等式と log majorization による安藤-日合の不等式を統一拡張したグランドフルタ不等式を示した.

Theorem (Furuta '95). $1 \le p,\ 1 \le s,\ 0 \le t \le 1,\ t \le r$ とする. もし $0 \le B \le A$ で $0 < A$ ならば,

$$\left\{A^{\frac{r}{2}} \left(A^{-\frac{t}{2}} B^p A^{-\frac{t}{2}}\right)^s A^{\frac{r}{2}}\right\}^{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}} \le A^{1-t+r}$$

が成り立つ.

棚橋は, この不等式の外側の冪が最良であることを示した. なお, 以下では原論文のものと違う形で述べるが, 簡単な言い換えに過ぎない（ともに α が現れるが, その意味は異なる）. 言い換えは Proposition (I) と対比する便宜のために行うものである.

Theorem (Tanahashi '00). $1 \le p,\ 1 \le s,\ 0 \le t \le 1,\ t \le r$ とする. もし $1 < \alpha$ ならば, $0 < B \le A$ であるが

$$\left\{A^{\frac{r}{2}} \left(A^{-\frac{t}{2}} B^p A^{-\frac{t}{2}}\right)^s A^{\frac{r}{2}}\right\}^{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}\alpha} \le A^{(1-t+r)\alpha}$$

でない 2×2 行列の組 A, B が存在する.

これは, Proposition (I) の発展型であると見るのが自然だろう. 実際, $t=0$, $s=1$ とすると, Proposition (I) で $1\le p$ と制限したものを得る. 一方, Theorem (Tanahashi '96) と異なり, パラメータをすべて正に限っても, 範囲

$$1\le p,\ \ 1\le s,\ \ 0\le t\le 1,\ \ t\le r$$

が最良であることを示したわけではない. このように, グランドフルタ不等式については, " フルタ不等式の最良性 " に相当するものの解明は, まだ充分ではない. すなわち, 次の D を決定する問題である:

$$D=\left\{(p,s,t,r);\quad 0<B\le A\Longrightarrow\left\{A^{\frac{r}{2}}\left(A^{-\frac{t}{2}}B^pA^{-\frac{t}{2}}\right)^sA^{\frac{r}{2}}\right\}^{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}}\le A^{1-t+r}\right\}.$$

これを一挙に決定できれば良い定理となるだろうが, 私には難しく思える. そこで, D の補集合を幾つか知って積み重ねるのが平凡なアプローチの 1 つである. Proposition (II) に対応する α 無しの結果を期待することは自然であろう. 次の定理は, このような観点による試みから得られた.

Theorem (KW '12). $0<p,\ \ 0<s,\ \ 0<t\le 1,\ \ t\le r$ とする. さらにもし

$$t<p\quad \text{かつ}\quad \frac{1-t+r}{(p-t)s+r}\cdot sp<1\qquad\cdots(*)$$

ならば, $0<B\le A$ であるが

$$\left\{A^{\frac{r}{2}}\left(A^{-\frac{t}{2}}B^pA^{-\frac{t}{2}}\right)^sA^{\frac{r}{2}}\right\}^{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}}\le A^{1-t+r}$$

でない 2×2 行列の組 A, B が存在する.

Remark.

(a) パラメータが Theorem (Furuta '95) の仮定を満たす, すなわち $1\le p$, $1\le s$, $0\le t\le 1$, $t\le r$ ならば,

$$\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}\le 1\le\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}\cdot sp$$

となる. 当然ながら, $(*)$ は満たされない.

(b) $0<p$, $0<s<1$, $sp<1$, $0<t\le r$ ならば, $(*)$ の第 2 式が満たされる.

単純には $1\le p$, $0<s<\dfrac{1}{p}$, $0<t\le r$ ならば $(*)$ の第 2 式が満たされるので, 上述の定理の仮定を満たすパラメータの組み合わせはたくさんあるが, s の上限が $\dfrac{1}{p}$ というのは強すぎる仮定のように思える. 次の定理は, $0<s<1$ を仮定として良いことが特徴であり, Proposition (II) に対応するとみなすことができる.

Theorem 1(W). $1<p,\ \ 0<s<1,\ \ 0<t<1+r,\ \ ts<r$ ならば, $0<B\le A$ であるが

$$\left\{A^{\frac{r}{2}}\left(A^{-\frac{t}{2}}B^pA^{-\frac{t}{2}}\right)^sA^{\frac{r}{2}}\right\}^{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}}\le A^{1-t+r}$$

でない 2×2 行列の組 A, B が存在する.

Theorem 2(W). 次の (1) と (2) のいずれかを仮定する:

(1) $1 < p,\ \ 1 < s,\ \ 0 < t < 1$ かつ $0 < r < \dfrac{(p-1)s}{ps-1} \cdot t,$

(2) $0 < p < 1,\ \ 1 < s,\ \ 1 < t < 1 + r$ かつ $0 < (p-t)s + r.$

このとき, $0 < B \leq A$ であるが

$$\left\{ A^{\frac{r}{2}} \left(A^{-\frac{t}{2}} B^p A^{-\frac{t}{2}} \right)^s A^{\frac{r}{2}} \right\}^{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}} \leq A^{1-t+r}$$

でない 2×2 行列の組 A, B が存在する.

Theorem (KW '12), Theorem 1(W) および Theorem 2(W) の証明は, 方法としては棚橋の議論に基づく. ただし, パラメータの仮定が活かされるように, また計算可能なように A, B を選ばなければならず, オーダーもより高階まで計算する必要が生じる. そして, パラメータに関する仮定によって証明中の計算や議論が変わることに注意しなければならない（例えば Theorem 1(W) で s の仮定を $1 \leq s$ と変更すれば, $t \leq 1$ に対しては不等式が成立してしまうのだから）.

現在分かっていること.

次の表で, p, s, t, r はすべて正とする. $s = 1$ はフルタ不等式に帰着するので省いた. 空欄は報告者にはまだ分かっていない.

$0 < p < 1$	$0 < s < 1$	$0 < t < 1$	$t < p,\ \ t \leq r$ ならば成立させない A, B がある.
		$t = 1$	
		$1 < t < 1 + r$	
	$1 < s$	$0 < t < 1$	
		$t = 1$	
		$1 < t < 1 + r$	$0 < (p-t)s + r$ ならば成立させない A, B がある.
$p = 1$	$0 < s < 1$	$0 < t < 1$	成立させない A, B がある.
		$t = 1$	不等式が退化して成り立つ.
		$1 < t < 1 + r$	
	$1 < s$	$0 < t < 1$	$t \leq r$ の場合はグランドフルタ.
		$t = 1$	不等式が退化して成り立つ.
		$1 < t < 1 + r$	成立させない A, B がある.
$1 < p$	$0 < s < 1$	$0 < t < 1$	$ts < r$ ならば成立させない A, B がある.
		$t = 1$	
		$1 < t < 1 + r$	
	$1 < s$	$0 < t < 1$	$r < \frac{(p-1)s}{ps-1} \cdot t$ ならば成立させない A, B がある。
		$t = 1$	$t \leq r$ の場合はグランドフルタ.
		$1 < t < 1 + r$	

References

[1] T. Ando and F. Hiai, *Log majorization and complementary Golden-Thompson type inequalities*, Linear Algebra Appl. 197/198 (1994), 113–131.

[2] W. F. Donoghue, Jr., Monotone Matrix Functions and Analytic Continuation, Springer-Verlag, 1974.

[3] T. Furuta, *$A \geq B \geq 0$ assures $(B^r A^p B^r)^{1/q} \geq B^{(p+2r)/q}$ for $r \geq 0$, $p \geq 0$, $q \geq 1$ with $(1+2r)q \geq p+2r$*, Proc. Amer. Math. Soc. 101 (1987), no. 1, 85–88.

[4] T. Furuta, *Extension of the Furuta inequality and Ando-Hiai log-majorization*, Linear Algebra Appl. 219 (1995), 139–155.

[5] E. Heinz, *Beiträge zur Störungstheorie der Spektralzerlegung*, Math. Ann. 123 (1951), 415–438.

[6] T. Koizumi and K. Watanabe, *Another consequence of Tanahashi's argument on best possibility of the grand Furuta inequality*, Cent. Eur. J. Math. 11(2) (2013), 368–375.

[7] K. Löwner, *Über monotone Matrixfunktionen*, Math. Z. 38 (1934), 177–216.

[8] K. Tanahashi, *Best possibility of the Furuta inequality*, Proc. Amer. Math. Soc. 124 (1996), 141–146.

[9] K. Tanahashi, *The best possibility of the grand Furuta inequality*, Proc. Amer. Math. Soc. 128 (2000), 511–519.

[10] K. Watanabe, *On the range of the parameters for the grand Furuta inequality to be valid*, preprint.

[11] K. Watanabe, *On the range of the parameters for the grand Furuta inequality to be valid II*, preprint.

Schauder 基底と basic sequence

島根大学大学院　総合理工学研究科　大井　誠丈　藤本　義弘

2012 年度の関数環研究集会において紹介させていただいた Schauder 基底と basic sequence についての定義などである.

1　Schauder 基底

以下, X を可分な実 Banach 空間とする.

定義 1.1 任意の $x \in X$ に対して,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n, \text{ つまり, } \left\| x - \sum_{n=1}^{k} a_n e_n \right\| \to 0 \ (k \to \infty)$$

となる $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ が唯一つ存在するとき, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ は X の **基底** であるという.

定義 1.2 X 上の列 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して,

$$e_k^*(e_j) = \begin{cases} 1 & (j = k) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

を満たす $\{e_n^*\}_{n=1}^{\infty} \subset X^*$ が存在するとき, $\{e_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ を $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ の biorthogonal functional という.

定義 1.3 X の中の列 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, biorthogonal functional $\{e_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ が存在し,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} e_n^*(x) e_n. \text{ つまり, } \left\| x - \sum_{n=1}^{k} e_n^*(x) e_n \right\| \to 0 \ (k \to \infty)$$

となるとき, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ は X の Schauder **基底**と呼ばれる.

定理 1.1 Banach 空間において, 基底はすべて Schauder 基底となる.

以下, Schauder 基底を単に基底と呼ぶ. ここで $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ を基底としたとき,

$$S_0 = 0, \ S_n \left(\sum_{k=1}^{\infty} e_k^*(x) e_k \right) = \sum_{k=1}^{n} e_k^*(x) e_k \ (n \geq 1)$$

と定義する. この S_n を partial sum operator という.

定理 1.2 X から X への有界線形な作用素として,

(i) $\dim S_n(X) = n$,

(ii) $S_n S_m = S_m S_n = S_{\min\{m,n\}}$ $({}^\forall n, m \in \mathbb{N})$,

(iii) $S_n x \to x$ $({}^\forall x \in X)$,

となる S_n が存在したとする. このとき, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

- $e_1 \in S_1(X)$,
- $e_k \in S_k(X) \cap \ker S_{k-1}$,

と選んでくれば, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ は X の基底で S_n は partial sum operator となる.

証明 $0 \neq e_1$ を $S_1(X)$ からとってきて, $e_1^* : X \to \mathbb{R}$ を $e_1^*(x)e_1 = S_1(x)$ で定義する.
次に $0 \neq e_2$ を $S_2(X) \cap \ker S_1$ からとってきて, $e_2^* : X \to \mathbb{R}$ を $e_2^*(x)e_2 = S_2(x) - S_1(x)$ で定義する. これを繰り返して, $0 \neq e_n$ を $S_n(X) \cap \ker S_{n-1}$ からとってきて, $e_n^* : X \to \mathbb{R}$ を $e_n^*(x)e_n = S_n(x) - S_{n-1}(x)$ で定義する. そのとき,

$$
\begin{aligned}
\|e_n^*(x)e_n\| &= \|S_n(x) - S_{n-1}(x)\|, \\
|e_n^*(x)|\|e_n\| &= \|S_n(x) - S_{n-1}(x)\|, \\
|e_n^*(x)| &= \|S_n(x) - S_{n-1}(x)\|\|e_n\|^{-1} \\
&\leq \{\|S_n(x)\| + \|S_{n-1}(x)\|\}\|e_n\|^{-1} \\
&\leq 2\sup_n \|S_n\|\|e_n\|^{-1}\|x\|,
\end{aligned}
$$

となるので $e_n^* \in X^*$ である. また, $e_k^*(e_j)$ について考えていく.
$k = j$ のとき,
ここで $e_j = S_j(x)$ を満たす $x \in X$ をとると (ii) の条件より, $S_k(e_j) = S_k S_j(x) = S_k(x) = e_k$ となる. そして $e_k \in S_k(X) \cap \ker S_{k-1}$ より, $S_{n-1}(e_j) = 0$ である. よって,

$$
e_k^*(e_j)e_k = S_k(e_j) - S_{n-1}(e_j) = e_k - 0
$$

となるので, $e_k^*(e_j) = 1$ である.

$k \neq j$ のとき,
$j < k$ とすると,

(ii) の条件より $S_k(e_j) = S_kS_j(x) = S_j(x) = e_j$. また $S_{k-1}(e_j) = S_{k-1}S_j(x) = S_j(x) = e_j$ となるので,

$$e_k^*(e_j)e_k = S_k(e_j) - S_{k-1}(e_j) = e_j - e_j = 0.$$

$j > k$ とすると,
(ii) の条件より, $S_k(e_j) = S_kS_{j-1}(e_j) = S_k(0) = 0$. また $S_{k-1}(e_j) = S_{k-1}S_{j-1}(e_j) = S_{k-1}(0) = 0$ となるので,

$$e_k^*(e_j)e_k = S_k(e_j) - S_{k-1}(e_j) = 0 - 0 = 0.$$

よって, $e_k^*(e_j) = \delta_{kj}$ となっている.
さらに, $S_0(x) = 0$ とすると,

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n}(S_k(x) - S_{k-1}(x)) = \sum_{k=1}^{n} e_k^*(x)e_k$$

(iii) の条件より, これは x に収束しているので基底の定義より $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ は X の基底となる.

これより, partial sum operator S_n をうまく定めることができれば, 基底を作ることができる.

2 basic sequence

定義 2.1 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ を基底とする. このとき,

$$K = \sup_n \|S_n\|$$

とおく. この K を basis constant という. 特に $K = 1$ のとき, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ を monotone basis という.

定義 2.2 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ に対して, $[e_n]_n$ を次のように定義する.

$$[e_n]_n := \overline{\left\{\sum_{k=1}^{N} a_ke_k : N \in \mathbb{N}, a_k \in \mathbb{R}\right\}}.$$

このとき $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $[e_n]_n$ の基底となっているとき, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ を basic sequence という.

定義 2.3 Banach 空間 X, Y に対して, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ をそれぞれの基底とする. このとき, 任意の実数列 $\{a_n\}_n$ に対して, $\sum_{n=1}^{\infty} a_nx_n$ が収束することと, $\sum_{n=1}^{\infty} a_ny_n$ が収束することが同値であるとき, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ は equivalent といい, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ と書く.

定義 2.4 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ を X の基底とする. このとき, $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $p_0 = 0$ を始めとする自然数の単調増加列, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を実数列とする. このとき $u_n \neq 0$ を次のようにおく.

$$u_n = \sum_{j=p_{n-1}+1}^{p_n} a_j e_j.$$

この列 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ を block basic sequence と呼ぶ.

定理 2.1 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ を basic constant K を持つ X の基底とし, $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ の block basic sequence とする. このとき, $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ は K 以下の basis constant を持つ basic sequence である.

証明 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ の block basic sequence とする. 更に, $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ をスカラー, m, $n \in \mathbb{N}$ $(m \leq n)$ とする.

$$\begin{aligned}
\Big\|\sum_{k=1}^{m} b_k u_k\Big\| &= \Big\|\sum_{k} b_k \sum_{j=p_{k-1}+1}^{p_k} a_j e_j\Big\| \\
&= \|\sum_{k}\sum_{j} b_k a_j e_j\| \\
&= \Big\|\sum_{j=1}^{p_m} c_j e_j\Big\| \quad (c_j = a_j b_k) \\
&\leq K\Big\|\sum_{j=1}^{p_n} c_j e_j\Big\| \\
&= K\Big\|\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=p_{k-1}+1}^{p_k} c_j e_j\Big\| \\
&= K\|\sum_{k}\sum_{j} a_j b_k e_j\| \\
&= K\Big\|\sum_{k=1}^{n} b_k u_k\Big\|.
\end{aligned}$$

よって basic sequence となる.

定義 2.5 2 つの列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X,\ \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Y$ に対して, $Tx_n = y_n$ となる X から Y への可逆な作用素が存在するとき, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ は congruent という.

定理 2.2 X が可分であるとき, X^* の閉単位球 B_{X^*} は $*$ 弱位相でコンパクトで距離付け可能である.

証明　定理の証明の前にまず, 次のことを確認する.
K をある位相 τ でコンパクト集合とし, τ' を K 上の任意のハウスドルフ位相で τ よりも弱い位相とする. このとき, τ と τ' は同じ位相となる.
これは A を K の τ 閉部分集合とする. このとき, A は τ コンパクトで, (K, τ') 上の写像の連続な像がコンパクトである. すなわち, A は τ' コンパクトである. よって τ' はハウスドルフであるから, A は τ' 閉部分集合となる.
ここで元の証明について考える. まず $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を X の単位球 B_X で稠密であるとする. X^* 上の位相 ρ を以下の近傍系により定める. 任意の $\varepsilon > 0,\ N \in \mathbb{N},\ x_1, \ldots, x_N \in X$ に対して,

$$V_\varepsilon(x_0^* : x_1, \ldots, x_N) = \{x^* \in X^* : |x^*(x_n) - x_0^*(x_n)| < \varepsilon, n = 1, \ldots, N\}.$$

この位相は,

$$\forall x^*,\ y^* \in X^* \text{に対して} \quad d(x^*,\ y^*) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \min(1,\ |x^*(x_n) - y^*(x_n)|)$$

と距離を定義することにより距離付け可能となる. すると, ρ はハウスドルフで $*$ 弱位相より弱い位相となり, 更に $*$ 弱コンパクト集合 B_{X^*} 上の $*$ 弱位相と同じ位相となる.

定理 2.3 (Banach-Mazur) 可分な Banach 空間 X は, $C[0,1]$ に等距離に埋め込まれる. すなわち,

$$\exists T : X \to C[0,1] \text{ linear s.t. } \|Tx\| = \|x\| \ (x \in X)$$

証明　この証明を行うのに 2 つの事実を用いる.

(i) X が可分な Banach 空間であるとき, $\exists K$:コンパクトな距離空間 s.t.X は $C(K)$ に等距離に埋め込まれる.

(ii) K がコンパクトな距離空間であるとき, $C(K)$ は $C[0,1]$ に等距離に埋め込まれる.

(i) について, 集合 $K = B_{X^*}$ は $*$ 弱位相をもつとする. X が可分であるとき, 定理 2.2 より B_{X^*} はコンパクトで距離付け可能となる. X が $C(B_{X^*})$ に等距離に埋め込まれるのは, 任意の $x^* \in B_{X^*}$ に対して, $f_x(x^*) = x^*(x)$ となる写像 $x \mapsto f_x$ が等距離同型であることより明らか.
(ii) については, 2 段階に分けて考える.

(a) K がコンパクトで距離付け可能な空間であるとき, K は位相同型で $[0,1]^{\mathbb{N}}$ に埋め込まれる.

(b) E を $[0,1]$ の閉部分集合としたとき, $C(E)$ は $C[0,1]$ に等距離に埋め込まれる.

まず, (a) を確かめる. K をコンパクトで距離付け可能とし可算で稠密な集合 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ を含む. ここで K 上の距離を ρ とする. これを $0 \leq \rho \leq 1$ としても一般性を失わない. 今, K から $[0,1]^{\mathbb{N}}$ への写像 θ を $\theta(x) = \{\rho(x, s_n)\}_{n=1}^{\infty}$ と定義する. θ の連続性は写像 ρ の連続性より明らか. 単射性は任意の異なる K の 2 点 x, y に対して, $\rho(x, s_n) < \rho(y, s_n)$ (もしくはその逆) が成り立つ s_n が存在するから, $\theta(x)$ と $\theta(y)$ は異なる. よって, K はコンパクトで $[0,1]^{\mathbb{N}}$ はハウスドルフであることより, θ は K をその像へと位相同型なまま写す.
次に (b) を確かめる. まず, $C(E)$ から $C[0,1]$ への norm-one 線形写像を任意の $C(E)$ の元 f に対して, $Af|_E = f$ と定義する. このとき $E\backslash[0,1]$ は開区間の互いに素な可算和集合となる. f を区間内部から $[0,1]$ への拡張とし, 任意の $[0,1]$ の端点を含む区間の定数とする. これは線形拡張作用素となる.

以上の 2 つの事実を用いて定理を証明する. まず, ψ をカントール集合 Δ から $[0,1]^{\mathbb{N}}$ への連続な全射とし, K を $[0,1]^{\mathbb{N}}$ の閉部分集合として考える. $E = \psi^{-1}(K)$ であるとき, E は $[0,1]$ の閉部分集合と同相となる. そのとき, $C(E)$ は $C[0,1]$ に等距離に埋め込まれる. 更に写像 $f \to f \circ \psi$ は $C(K)$ を $C(E)$ に等距離に埋め込む. よって $C(K)$ は $C[0,1]$ に等距離に埋め込まれる.

定理 2.4 (Bessaga-Pelczyński Selection Principle)
$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ を X の基底とし, X の列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が以下の 2 条件を満たすとする.

(i) $\inf_n \|x_n\| > 0$,

(ii) $\lim_{n\to\infty} e_k^*(x_n) = 0$ for all $k \in \mathbb{N}$.

このとき, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ の block basic sequence $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ と congruent である $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ が存在する.

証明 $\alpha = \inf_n \|x_n\| > 0$, K を $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ の basis constant とする. 更に $0 < \nu < 1/4$ とする. まず $n_1 = 1$, $r_0 = 0$ ととる. このとき

$$\|x_{n_1} - S_{r_1} x_{n_1}\| < \frac{\nu\alpha}{2K}$$

となる $r_1 \in \mathbb{N}$ が存在する. このとき, $\lim_{n\to\infty} \|S_{r_1} x_n\| = \lim_{n\to\infty} \|\sum_{k=1}^{r_1} e_k^*(x_n) e_k\| = 0$. このとき,

$$\|S_{r_1} x_{n_2}\| < \frac{\nu^2\alpha}{2K}$$

となる $n_2 > n_1$ が存在する. 次に

$$\|x_{n_2} - S_{r_2} x_{n_2}\| < \frac{\nu^2 \alpha}{2K}$$

となる $r_2 > r_1$ が存在する. これも同様に $\lim_{n\to\infty} \|S_{r_2} x_n\| = 0$ となり,

$$\|S_{r_2} x_{n_3}\| < \frac{\nu^3 \alpha}{2K}$$

となる $n_3 > n_2$ が存在する. これを繰り返すと,

$$\|S_{r_{k-1}} x_{n_k}\| < \frac{\nu^k \alpha}{2K}, \quad \|x_{n_k} - S_{r_k} x_{n_k}\| < \frac{\nu^k \alpha}{2K}$$

となる $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ と実数列 $\{r_k\}_{r=0}^{\infty}$ $(r_0 = 0)$ を得る. 任意の自然数 k に対して, $y_k = S_{r_k} x_{n_k} - S_{r_{k-1}} x_{n_k}$ と定める. この $\{y_k\}$ は $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ の block basic sequence となる. 定理 2.3 より, $\{y_k\}$ は basic sequence となる. 任意の自然数 k に対して,

$$\begin{aligned}
\|y_k - x_{n_k}\| &= \|S_{r_k} x_{n_k} - S_{r_{k-1}} x_{n_k} - x_{n_k}\| \\
&\leq \|x_{n_k} - S_{r_k} x_{n_k}\| + \|S_{r_{k-1}} x_{n_k}\| \\
&< \frac{\nu^k \alpha}{K}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|y_k\| &= \|S_{r_k} x_{n_k} - S_{r_{k-1}} x_{n_k}\| \\
&\geq \|S_{r_k} x_{n_k}\| - \|S_{r_{k-1}} x_{n_k}\| \\
&> \|S_{r_k} x_{n_k}\| - \frac{\nu^k \alpha}{2K} \\
&> \|x_{n_k}\| - \frac{\nu^k \alpha}{2K} - \frac{\nu^k \alpha}{2K} \\
&= \|x_{n_k}\| - \frac{\nu^k \alpha}{K} \\
&\geq \inf \|x_{n_k}\| - \frac{\nu^k \alpha}{K} \\
&\geq \alpha - \frac{\nu \alpha}{K} \\
&\geq (1 - \nu)\alpha.
\end{aligned}$$

このとき,

$$\begin{aligned}
2K \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|y_k - x_{n_k}\|}{\|y_k\|} &< 2(1-\nu)^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \nu^k \\
&= 2\nu(1-\nu)^{-2} \\
&< \frac{8}{9}.
\end{aligned}$$

よって, $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ と $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ は congruent.

定理 2.5 任意の可分な無限次元 Banach 空間は basic sequence をもつ.

証明 定理 2.3 より, X は $C[0,1]$ に等距離に埋め込まれているので, $X \subset C[0,1]$ として考える. このとき, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $C[0,1]$ の基底とする. X は無限次元であるから,

$$\|f_n\| = 1 \text{ かつ } e_k^*(f_n) = 0 \text{ for } 1 \leq k \leq n$$

となるような $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を X からとれる. そのためには, $e_k^*(f_n') = 0$ $(1 \leq k \leq n)$ かつ $f_n' \neq 0$ をみたす $\{f_n'\}$ を X からよればよい. なぜなら, $f_n'/\|f_n'\| = f_n$ とすると, $e_k^*(f_n) = 0$ となり, $\|f_n\| = 1$. e_1^*は X から $\mathbb{R}$ への作用素であるから, 準同型定理より, $\mathbb{R} \cong X/\ker e_1^*$. よって $f_1' \in \ker e_1^* \backslash \{0\}$ がとれる. 次に $(e_1^*,\ e_2^*)$ は X から $\mathbb{R}^2$ への作用素であるから, $\mathbb{R}^2 \cong X/(\ker e_1^* \cap \ker e_2^*)$. よって $f_2' \in \ker e_1^* \cap \ker e_2^* \backslash \{0\}$ がとれる. これを繰り返すと求めたい f_n' を得る. ここで定理 2.4 より, $\{f_{n_k}\}_k$ と $\{y_k\}_k$ が congruent となるような $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ と $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ の block basic sequence$\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ が存在する. 定理 2.1 より $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ は basic sequence となる.

参考文献

[1] Robert E. Megginson. An Introduction to Banach Space Theory. Springer, 1991.

[2] Fernando Albiac, Nigel J. Kalton. Topics in Banach space theory. Springer, 2006.

[3] 竹之内 脩 函数解析 (朝倉書店, 1968)

Bounded Composition Operators From The Bergman Space To The Hardy Space

工学院大学学習支援センター 春日一浩 (Kazuhiro Kasuga)
北星学園大学経済学部 中路貴彦 (Takahiko Nakazi)

1. 導入

D を複素平面の単位開円板とする．$H(D)$ で D 上の正則関数全体を表すものとする．L_a^2 を D 上の Bergman 空間とする．すなわち

$L_a^2 = \{f \in H(D) : \int_D |f(re^{i\theta})|^2 r dr d\theta/\pi < \infty\}$.

H^2: D 上の Hardy 空間とする．すなわち

$H^2 = \{f \in H(D) : \|f\|_2^2 = \sup_{0\le r<1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta/2\pi < \infty\}$.

この時 $H^2 \subsetneqq L_a^2$ である．ここで $\frac{1}{\sqrt{1-z}} \in L_a^2, \frac{1}{\sqrt{1-z}} \notin H^2$ に注意する．また $H^\infty = \{f \in H(D) : \|f\|_\infty = \sup_{z\in D}|f(z)| < \infty\}$ と表す．ϕ を D から D への正則写像とする．関数 $f \in H(D)$ に対して合成作用素 C_ϕ を次のように定義する．$(C_\phi f)(z) = f(\phi(z)) \quad (z \in D)$．また $N_\phi(w) = \sum_{\phi(z)=w} \log \frac{1}{|z|} \quad (w \in D\backslash\{\phi(0)\})$ は ϕ の Nevanlinna counting function と呼ばれている．

Bergman 空間 L_a^2 と Hardy 空間 H^2 は可分 Hilbert 空間である． したがって L_a^2 から H^2 への等距離同型が存在する．しかし等距離合成作用素は存在しない (2 節参照)．したがって L_a^2 から H^2 の合成作用素の有界性について述べる（3 節, 4 節参照).

定義 1.1. $\phi \in H^\infty, \|\phi\|_\infty = 1$ に対し ϕ が H^2 で Rudin's orthogonal function であるとは $\{\phi^n : n = 0, 1, 2, \cdots\}$ が H^2 で直交関数の集合である時にいう．

例 1.2. ϕ は内関数で $\phi(0) = 0$ を満たす $\Rightarrow$ ϕ は H^2 で Rudin's orthogonal function.
一方, 内関数でない Rudin's orthogonal function が存在する ([1], [7] 参照).

2. L_a^2 から H^2 への等距離合成作用素

定理 2.1. **([5])** $C_\phi : L_a^2 \to H^2$ 等距離合成作用素

$\Leftrightarrow N_\phi(w) = \int_{|w|}^1 \log \frac{r}{|w|} r dr d\theta/\pi$ (nearly all $w \in D\backslash\{0\}$).

定理 2.2. L_a^2 から H^2 への等距離合成作用素 C_ϕ は存在しない.

証明の概略 C_ϕ は L_a^2 から H^2 への等距離合成作用素とする．定理 2.1 と ([3] 定理 1) より ϕ は H^2 で Rudin's orthogonal function になる．計算により $C_\phi(L_a^2) \not\subset H^2$ である．ゆえに結果が成立する．

3. L_a^2 から H^2 への有界合成作用素

定理 3.1.([6]) ϕ を D から D への正則写像とする. この時, $C_\phi : L_a^2 \to H^2$ が有界合成作用素 $\Leftrightarrow N_\phi(z) = O((\log \frac{1}{|z|})^2) \quad (|z| \to 1)$.

定理 3.2. ϕ を Rudin's orthogonal function からなる多項式とし $\|\phi\|_\infty = 1$ を満たすとする $\Rightarrow$ $C_\phi : L_a^2 \to H^2$ は有界でない.

証明の概略 $\|\phi\|_\infty = 1$ と仮定する. ϕ_0 を Rudin's orthogonal function とし p を多項式で $\phi(z) = p(\phi_0(z))$, ここで $\|p\|_\infty = 1$ とする. C_ϕ を L_a^2 から H^2 への合成作用素とする. $1-\phi(z) = \prod_{j=1}^{n}(\phi_0(z) - a_j)g(\phi_0(z))$ が成り立つ. 関数 $\frac{1}{\sqrt{1-z}}$ を考えて

$\infty > \|(1-\phi_0)^{-\frac{1}{2}}\|_2^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \left| \binom{-\frac{1}{2}}{j} \right|^2 = \|(1-z)^{-\frac{1}{2}}\|_2^2 = \infty.$

よって矛盾.

4. W.Smith の定理の系

ここで W.Smith の定理とは定理 3.1 を指している.

補題 4.1.([3] 参照) nearly all $w \in D$ に対して,

$N_\phi(w) = \int_0^{2\pi} \log \left| \frac{w-\phi(e^{i\theta})}{1-\bar{w}\phi(e^{i\theta})} \right| d\theta/2\pi - \log \left| \frac{w-\phi(0)}{1-\bar{w}\phi(0)} \right|.$

系 4.2. $\phi = \frac{1+q^n}{2}, \ n \in \mathbb{N}, \quad q = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$, ただし $|a| < 1$ とする.

$\Rightarrow C_\phi : L_a^2 \to H^2$ は有界でない.

証明の概略 補題 4.1 より nearly all $re^{i\alpha}$ に対して

$N_\phi(re^{i\alpha}) = \int_0^{2\pi} \log \left| (2re^{i\alpha}-1) - \left(\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right)^n \right| d\theta/2\pi - \log|2re^{i\alpha} - 1 - (-a)^n|.$

$s_1, s_2, \ldots s_n$ を相異なる s の n 乗根とする, ただし $|s| < 1$ の時 $s = 2re^{i\alpha} - 1$ と置く. さらに $b_j = \frac{s_j + a}{1+\bar{a}s_j} \quad (1 \leq j \leq n)$ と置く.

$|b_j| < 1 \ (1 \leq j \leq n)$ だから, Jensen の公式より

$\int_0^{2\pi} \log \left| (2re^{i\alpha}-1) - \left(\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right)^n \right| d\theta/2\pi = \sum_{j=1}^{n} \log \frac{1}{|b_j|} + \log|(2re^{i\alpha}-1) - (-a)^n|.$

ゆえに nearly all $re^{i\alpha}$ に対して

$$N_\phi(re^{i\alpha}) = \begin{cases} -\sum_{j=1}^{n} \log|b_j| & (|2re^{i\alpha}-1| < 1) \\ 0 & (|2re^{i\alpha}-1| \geq 1) \end{cases}.$$

計算により $\limsup_{r \to 1, |s|<1} \frac{N_\phi(re^{i\alpha})}{(\log r)^2} = \infty$. ゆえに定理 3.1 より C_ϕ は有界でない.

次の問題が考えられる.

問題 4.3. $q = \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\cdot\dfrac{z-b}{1-\bar{b}z}$ $(z \in D,\ |a|<1$ かつ $|b|<1)$, $\phi = \dfrac{1+q}{2}$
$\Rightarrow C_\phi : L_a^2 \to H^2$ は有界でないか?

この問題に対して, 次の 2 つの結果を得た.

系 4.4. $\phi = \dfrac{1+q}{2},\quad q = \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\cdot\dfrac{z+a}{1+\bar{a}z}$, ただし $|a|<1$ とする
$\Rightarrow C_\phi : L_a^2 \to H^2$ は有界でない.

証明の概略　系 4.2 のように補題 4.1 と Jensen の公式と定理 3.1 より導かれる.

系 4.5. $\phi = \dfrac{1+q}{2},\quad q = \dfrac{z-a}{1-az}\cdot\dfrac{z-b}{1-bz}$, ただし $-1<a<1$ かつ $-1<b<1$ とする
$\Rightarrow C_\phi : L_a^2 \to H^2$ は有界でない.

証明の概略 系 4.2 のように補題 4.1 と Jensen の公式と定理 3.1 より導かれる.

参考文献

[1] C. Bishop, *Orthogonal functions in H^∞*, Pacific J.Math.**220**(2005),1-31.

[2] J. Moorhouse and C. Toews, *Differences of Composition Operators*, Contemporary Mathematics,**321**(2003)207-213.

[3] T. Nakazi, *The Nevanlinna counting functions for Rudin's orthogonal functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **131**(2003),1267-1271.

[4] T. Nakazi and T. Watanabe, *Properties of a Rudin's orthogonal function which is a linear combination of two inner functions*, Sci. Math. Japonicae. **57**(2003),413-418.

[5] T. Nakazi, *Isometric composition operators between two weighted Hardy spaces*, Nihonkai Math. J. **17**(2006), 111-124.

[6] W. Smith, *Composition operators between Bergman and Hardy spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **348**(1996),2331-2348.

[7] C. Sundberg, *Measures induced by analytic functions and a problem of Walter Rudin*, J. Amer. Math. Soc. **16:I**(2003),69-90.

関数環上のある種のスペクトル保存写像の構造

山形大学　　三浦　毅 (Takeshi Miura)

1　乗法的スペクトル保存写像

Banach 環論において，スペクトルを保存する線形写像の研究は古くからなされているが，Molnár [14] の結果が発表されて以降，ある種のスペクトルを保存する写像の構造が盛んに研究されるようになり，特に線形性は定理の仮定ではなく帰結として述べられる結果が数多く発表されている．最近のこの流れを創り出したといえるのが，下に述べる Molnár による定理である．

定理 1 (Molnár [14]) X を第一可算コンパクト *Hausdorff* 空間とする．全射 $T\colon C(X) \to C(X)$ が $T(1) = 1$ 及び

$$\sigma(T(f)T(g)) = \sigma(fg) \qquad (f, g \in C(X))$$

あるいは

$$\sigma(T(f)\overline{T(g)}) = \sigma(f\overline{g}) \qquad (f, g \in C(X))$$

をみたせば，T は自己同形写像である．つまり同相写像 $\phi\colon X \to X$ が存在して

$$T(f)(x) = f(\phi(x)) \qquad (f \in C(X),\ x \in X)$$

となる．

定理 1 におけるスペクトルに関する条件 $\sigma(T(f)T(g)) = \sigma(fg)$ あるいは $\sigma(T(f)\overline{T(g)}) = \sigma(f\overline{g})$ を満たす T を乗法的スペクトル保存写像と呼ぶことがある．乗法的スペクトル保存写像の構造を決定する問題は関数環や Banach 環などで展開され，様々な形に拡張されている ([5, 6, 15, 16])．この方面の近年の発展の原動力となったのが Luttman and Tonev [13] の定理であり，その中心的役割を果たすのが彼らによって導入された peripheral spectrum $\sigma_\pi(\cdot)$ である．

定理 2 (Luttman and Tonev [13]) $A,\ B$ を関数環とし，$\mathrm{Ch}(A),\ \mathrm{Ch}(B)$ をそれぞれ $A,\ B$ の *Choquet* 境界とする．全射 $T\colon A \to B$ が $T(1) = 1$ 及び

$$\sigma_\pi\left(T(f)T(g)\right) = \sigma_\pi\left(fg\right) \qquad (f, g \in A)$$

をみたせば，同相写像 $\phi\colon \mathrm{Ch}(B) \to \mathrm{Ch}(A)$ が存在して

$$T(f)(y) = f(\phi(y)) \qquad (f \in A,\ y \in \mathrm{Ch}(B))$$

が成り立つ．つまり T は関数環としての等距離同型写像である．ただし

$$\sigma_\pi(f) = \{z \in \sigma(f) : |z| = \|f\|_\infty\}$$

である．

Luttman and Tonev [13] の主張は，スペクトル全体を保存するとは限らない写像であっても，スペクトルの部分集合である peripheral spectrum が Molnár と同様の意味で保存されるならば，その形を決定することが出来て，それは距離構造も代数構造も保存する，と述べることが出来る．このようにスペクトルよりもかなり少ない情報から元の写像の構造が完全に決定されることが分かれば，どの程度まで情報量を少なくすることが出来るのかが考察されるのは自然な流れと言えよう．実際，その様な研究が Luttman and Tonev 以降活発に行われている ([1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10, 12, 17]).

これらの研究結果からスペクトルが完全に一致しなくとも，必要な情報が取り出せる程度に多くの元を含んでいれば良いことが分かってきた．さらに Johnson and Tonev [11] は単位元の存在を仮定せずとも類似の結果が得られることを示した．ただし Johnson and Tonev [11] の定義による *function algebras* とは，局所コンパクト Hausdorff 空間上の有界連続関数のなす（最大値ノルムに関する）閉多元環であり，さらに X を強分離するものである．

定理 3 (Johnson and Tonev [11]) A, B をそれぞれ局所コンパクト *Hausdorff* 空間 X, Y 上の *function algebras* とし，さらに A の *Shilov* 境界は X であるとする．このとき全射 $T\colon A \to B$ が

$$\sigma_\pi(T(f)T(g)) \subset \sigma_\pi(fg) \qquad (f, g \in A)$$

あるいは

$$\sigma_\pi(fg) \subset \sigma_\pi(T(f)T(g)) \qquad (f, g \in A)$$

をみたせば，連続写像 $\alpha\colon \mathrm{Ch}(B) \to \{\pm 1\}$ 及び同相写像 $\phi\colon \mathrm{Ch}(B) \to \mathrm{Ch}(A)$ が存在して

$$T(f)(y) = \alpha(y) f(\phi(y)) \qquad (f \in A,\ y \in \mathrm{Ch}(B))$$

が成り立つ．

Molnár [14] の研究以来，多元環をより一般化しスペクトルに関する条件を弱めた上で類似の結果が成り立つことを主張する定理が多数発表されてきている．これらの結果を統一的に述べるための一つの方法に，スペクトルに関して次の性質をもつ写像の組の構造を調べることが考えられる：

$$\sigma_\pi(S_1(f)S_2(g)) \subset \sigma_\pi(T_1(f)T_2(g)) \qquad (f, g \in F).$$

ただし F, A, B を function algebras とし，$S_1, S_2\colon F \to A$ 及び $T_1, T_2\colon F \to B$ は全射とする．この性質によって関連づけられる写像の組 S_1, T_1 及び S_2, T_2 の関係が解明されれば，Molnár の結果も Johnson and Tonev [11] も統一することが出来ることは，S_1, S_2 が恒等写像や複素共役の場合などを考えればよいことから明らかである．この考えに基づいた研究結果は function algebras ではなく関数環の場合に既に得られているので（[4] 参照），厳密性に欠ける言い方ではあるが，単位元の存在を仮定せずに類似の定理を示すことが出来ればよい．

2 主結果

K を局所コンパクト Hausdorff 空間とし，$C_0(K)$ により K 上で定義された複素数値連続関数で，さらに無限遠点で 0 になるもの全体を表す．このとき $C_0(K)$ は各点での和・積・スカラー倍

と $\|f\|_\infty = \sup_{k\in K}|f(k)|$ に関して（積に関する単位元をもつとは限らない）可換 Banach 環となる．本稿では**局所コンパクト Hausdorff 空間 K 上の関数環** (function algebra on K) を次の意味で用いる：A が K 上の関数環であるとは，A は $C_0(K)$ の閉部分多元環であり，さらに K の点を強分離する（つまり $\forall k_1, k_2 \in K$: $k_1 \neq k_2$ に対して $0 \neq f(k_1) \neq f(k_2)$ をみたす $f \in A$ が存在する）ことである；特に K がコンパクトであり，さらに A が定数関数を含むとき，A を K 上の関数環 (uniform algebra on K) と呼ぶことが多いようである．

定理 4 *F, A, B をそれぞれ局所コンパクト Hausdorff 空間上の関数環とする．全射 $S_n\colon F \to A$ 及び $T_n\colon F \to B$ $(n = 1, 2)$ が*

$$\|S_n(f)\|_\infty = \|T_n(f)\|_\infty \qquad (f \in F,\ n = 1, 2) \tag{1}$$

及び

$$\sigma_\pi(S_1(f)S_2(g)) \subset \sigma_\pi(T_1(f)T_2(g)) \qquad (f, g \in F)$$

をみたせば，連続写像 $\alpha\colon \mathrm{Ch}(B) \to \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ 及び同相写像 $\phi\colon \mathrm{Ch}(B) \to \mathrm{Ch}(A)$ が存在して

$$T_1(f)(y) = \alpha(y)S_1(f)(\phi(y)) \qquad (f \in F,\ y \in \mathrm{Ch}(B))$$
$$T_2(f)(y) = \overline{\alpha(y)}S_2(f)(\phi(y)) \qquad (f \in F,\ y \in \mathrm{Ch}(B))$$

が成り立つ．

注意 1 定理 4 における仮定 (1) は証明の技術的な問題のため必要としているが，もちろん本質的な条件であるとは考えていない．この仮定を除いても類似の結果が得られることを期待しているが，現在の所その証明が出来ていない．しかし (1) を仮定せずとも，ある種の単位元の存在を仮定すれば同様の結果が得られることは分かっている（系 5 参照）．

系 5 *F, A, B をそれぞれ局所コンパクト Hausdorff 空間上の関数環とし，さらに*

$$|e| = 1 \qquad \text{on} \quad \mathrm{Ch}(A)$$

をみたす $e \in A$ が存在すると仮定する．このとき全射 $S_n\colon F \to A$ 及び $T_n\colon F \to B$ $(n = 1, 2)$ が

$$\sigma_\pi(S_1(f)S_2(g)) \subset \sigma_\pi(T_1(f)T_2(g)) \qquad (f, g \in F)$$

をみたせば，連続写像 $\alpha\colon \mathrm{Ch}(B) \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 及び同相写像 $\phi\colon \mathrm{Ch}(B) \to \mathrm{Ch}(A)$ が存在して

$$T_1(f)(y) = \alpha(y)S_1(f)(\phi(y)) \qquad (f \in F,\ y \in \mathrm{Ch}(B))$$

$$T_2(f)(y) = \frac{1}{\alpha(y)}S_2(f)(\phi(y)) \qquad (f \in F,\ y \in \mathrm{Ch}(B))$$

が成り立つ．

例 1 $A(\overline{\mathbb{D}})$ を円板環とし，$\overline{\mathbb{D}}_0 = \ \setminus \{0\}$ とおく．$A = \{f|_{\overline{\mathbb{D}}_0} : f \in A(\overline{\mathbb{D}}) \text{ with } f(0) = 0\}$ は局所コンパクト Hausdorff 空間 $\overline{\mathbb{D}}_0$ 上の関数環であり，その Choquet 境界は $\mathrm{Ch}(A) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ である．$\alpha(z) = \dfrac{2z+3}{z+3}$ とおくと，$\alpha, 1/\alpha \in A(\overline{\mathbb{D}})$ であるが，$\alpha(0) = 1$ より $\alpha|_{\overline{\mathbb{D}}_0}, (1/\alpha)|_{\overline{\mathbb{D}}_0} \notin A$ である．ここで写像 $T_1, T_2 \colon A \to A$ を

$$T_1(f)(z) = \alpha(z) f(z), \quad T_2(f)(z) = \frac{1}{\alpha(z)} f(z) \qquad (f \in A,\ z \in \overline{\mathbb{D}}_0)$$

によって定めると，T_1, T_2 は全射であり $T_1(f)T_2(g) = fg \ (f, g \in A)$ を満たす．これは系 5 において S_1, S_2 がともに恒等写像の場合であるが，$\mathrm{Ch}(A) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ 上 $|\alpha| \equiv 1$ は成り立たない．さらに $\|T_1(f)\|_\infty = \|f\|_\infty$ も一般には成り立たない．実際 f_0 を座標関数とすれば $\|T_1(f_0)\|_\infty = \|\alpha\|_\infty > 1 = \|f_0\|_\infty$ である．この例から分かるように，定理 4 の仮定 (1) が満たされなくとも写像の構造が決定され得るだけでなく，もしそれが得られたとしても，そのときの α は一般に $\mathrm{Ch}(A)$ 上 $|\alpha| = 1$ とは限らないのである．

参考文献

[1] O.Hatori, K. Hino, T. Miura and H. Oka, *Peripherally monomial-preserving maps between uniform algebras*, Mediterr. J. Math., **6** (2009), 47–60.

[2] O. Hatori, T. Miura and H. Oka, *An example of multiplicatively spectrum-preserving maps between non-isomorphic semi-simple commutative Banach algebras*, Nihonkai Math. J., **18** (2007), 11–15.

[3] O. Hatori, T. Miura, H. Oka and H. Takagi, *Peripheral multiplicativity of maps on uniformly closed algebras of continuous functions which vanish at infinity*, Tokyo J. Math. **32** (2009), 91–104.

[4] O. Hatori, T. Miura, R. Shindo and H. Takagi, *Generalizations of spectrally multiplicative surjections between uniform algebras*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2), **59** (2010), 161–183.

[5] O. Hatori, T. Miura and H. Takagi, *Characterizations of isometric isomorphisms between uniform algebras via nonlinear range-preserving property*, Proc. Amer. Math. Soc., **134** (2006), 2923–2930.

[6] O. Hatori, T. Miura and H. Takagi, *Unital and multiplicatively spectrum-preserving surjections between semi-simple commutative Banach algebras are linear and multiplicative*, J. Math. Anal. Appl., **326** (2007), 281–296.

[7] O. Hatori, T. Miura and H. Takagi, *Multiplicatively spectrum-preserving and norm-preserving maps between invertible groups of commutative Banach algebras*, (2006) preprint.

[8] D. Honma, *Surjections on the algebras of continuous functions which preserve peripheral spectrum*, Contemp. Math., **435** (2007), 199–205.

[9] D. Honma, *Norm-preserving surjections on algebras of continuous functions*, Rocky Mountain J. Math. **39** (2009), 1517–1531.

[10] A. Jiménez-Vargas, A. Luttman and M. Villegas-Vallecillos, *Weakly peripherally multiplicative surjections of pointed lipschitz algebras*, Rocky Mountain J. Math. **40** (2010), 1903–1921.

[11] J. Johnson and T. Tonev, *Spectral conditions for composition operators on algebras of functions*, Commun. Math. Appl., **3** (2012), 51–59.

[12] K. Lee and A. Luttman, *Generalizations of weakly peripherally multiplicative maps between uniform algebras*, J. Math. Anal. Appl. **375** (2011), 108–117.

[13] A. Luttman and T. Tonev, *Uniform algebra isomorphisms and peripheral multiplicativity*, Proc. Amer. Math. Soc., **135** (2007), 3589–3598.

[14] L. Molnár, *Some characterizations of the automorphisms of $B(H)$ and $C(X)$*, Proc. Amer. Math. Soc., **130** (2002), 111–120.

[15] N. V. Rao and A. K. Roy, *Multiplicatively spectrum-preserving maps of function algebras*, Proc. Amer. Math. Soc., **133** (2005), 1135–1142.

[16] N. V. Rao and A. K. Roy, *Multiplicatively spectrum-preserving maps of function algebras. II*, Proc. Edinburgh Math. Soc., **48** (2005), 219–229.

[17] T. Tonev, *Weak multiplicative operators on function algebras without units*, Banach Center Publ., **91** (2010), 411–421.

参加者名簿

氏名 (敬称略)	所属
阿部 修也	新潟大学 大学院
阿部 敏一	新潟大学 大学院
飯田 安保	岩手医科大学
大井 誠丈	島根大学 大学院
春日 一浩	工学院大学 学習支援センター
川村 一宏	筑波大学
古清水 大直	信州大学 アソシエイト研究員
新藤 瑠美	NSG アカデミー
神保 敏弥	奈良教育大学 名誉教授
瀬戸 道生	島根大学 総合理工学部
高木 啓行	信州大学 理学部
高橋 眞映	東邦大学
武嶋 利直	信州大学 大学院
鶴見 和之	東京電機大学 名誉教授
富山 淳	東京都立大学 名誉教授
中川 勇人	名古屋大学 多元数理
丹羽 典朗	日本大学 薬学部
野川 達也	新潟大学 大学院
荷見 守助	茨城大学 名誉教授
羽鳥 理	新潟大学 自然科学系
平澤 剛	茨城大学 工学部
藤本 義弘	島根大学 大学院
本間 成和	新潟大学 大学院
三浦 毅	山形大学 理工学研究科
御前 憲広	日本大学 理工学部
山本 隆範	北海学園大学 工学部
渡邉 恵一	新潟大学 自然科学系