2011年度 関数環研究集会

報　告　集

2012年 3月

2011 年度の関数環研究集会は，山形大学 工学部にて，2011 年 12 月 1 日 (木)・2 日 (金) の 2 日間，開催されました。大勢の方々にご参加いただき，10 の講演が行われました。2 日間，有意義な情報交換や活発な討論ができ，充実した集会になりました。ご講演くださった皆様をはじめ，ご参加くださった皆様，そして，集会にご協力くださいました皆様に，心よりお礼申し上げます。

講演者の方々には報告原稿をお書きいただきましたので，ここに取りまとめ，報告集といたします。

世話人： 山形大学　三浦 毅

2011年度 関数環研究集会 プログラム

12月1日（木）

12月2日（金）

微分可能関数の空間における等長作用素について

信州大学大学院総合工学系研究科　古清水 大直 (Hironao Koshimizu)

Banach-Stone の定理 (1937 年) 「コンパクト Hausdorff 空間 X 上の連続関数全体の Banach 空間 $C(X)$ 上の全射等長作用素は荷重合成作用素の形をなす.」を機に, 様々な関数空間上の等長作用素の特徴づけがなされてきた ([3]). ここでは, 微分可能な関数からなる空間の上の全射等長作用素の特徴づけを与える.

1　$C^{(n)}[0,1]$

閉区間 $[0,1]$ 上の n 回連続微分可能関数全体の集合を $C^{(n)}[0,1]$ とかく. $C^{(n)}[0,1]$ は, $[0,1]$ の各点での和・スカラー積に関して線形空間になる. 線形空間 $C^{(n)}[0,1]$ にはノルムがいくつか考えられるが, ここでは, 次の 5 つのノルムを取り上げる.

$$
\begin{aligned}
\|f\|_C &= \max\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{|f^{(k)}(x)|}{k!} : x\in[0,1]\right\}\\
\|f\|_\Sigma &= \sum_{k=0}^{n}\frac{\|f^{(k)}\|_\infty}{k!}\\
\|f\|_M &= \max\left\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty, \dots, \|f^{(n)}\|_\infty\right\} \qquad\qquad (f\in C^{(n)}[0,1])\\
\|f\|_\sigma &= \sum_{k=0}^{n-1}|f^{(k)}(0)| + \|f^{(n)}\|_\infty\\
\|f\|_m &= \max\left\{|f(0)|, |f'(0)|, \dots, |f^{(n-1)}(0)|, \|f^{(n)}\|_\infty\right\}
\end{aligned}
$$

ただし, $\|g\|_\infty = \sup\{|g(x)| : x\in[0,1]\}$ $(g\in C([0,1]))$ である. これらのノルムは互いに同値であり, $C^{(n)}[0,1]$ はそれぞれのノルムに関して Banach 空間になる. 各 Banach 空間上の全射等長作用素の特徴づけを与える. $(C^{(n)}[0,1], \|\cdot\|_C)$, $(C^{(1)}[0,1], \|\cdot\|_\Sigma)$ 及び $(C^{(1)}[0,1], \|\cdot\|_M)$ に関しては, すでに特徴づけが知られていて, それは荷重合成作用素の形をしている ([1, 2, 4, 5, 10, 13, 11]). そこで, $C^{(n)}[0,1]$ が $\|\cdot\|_\sigma$ または $\|\cdot\|_m$ のノルムをもつ場合に関して, 次の結果を得た ([7, 8]).

定理 1. $(C^{(n)}[0,1], \|\cdot\|_\sigma)$ または $(C^{(n)}[0,1], \|\cdot\|_m)$ 上の全射等長作用素 T は, $[0,1]$ から $[0,1]$ の上への同相写像 φ と, $|w(x)| = 1\,(x\in[0,1])$ となる $w\in C([0,1])$, 集合 $\{0,1,\dots,n-1\}$ の置換 τ 及び $|\lambda_0| = |\lambda_1| = \cdots = |\lambda_{n-1}| = 1$ となる n 個の定数 $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ を用いて,

$$(Tf)(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda_k f^{(\tau(k))}(0)}{k!}x^k + \left(S^n(w(f^{(n)}\circ\varphi))\right)(x) \qquad (x\in[0,1],\ f\in C^{(n)}[0,1])$$

と表せる. ただし, $(Sg)(x) = \int_0^x g(t)\,dt$ $(x\in[0,1], g\in C([0,1]))$ である.

2 $\mathrm{Lip}[0,1]$

閉区間 $[0,1]$ 上の Lipschitz 連続関数 f は, $[0,1]$ のほとんどいたるところ f' が存在して, f' は $[0,1]$ 上の本質的有界な可測関数になる．そこで, $[0,1]$ 上の本質的有界な可測関数全体の集合を $L^\infty[0,1]$ とかく．ただし, $[0,1]$ のほとんどいたるところ同じ関数は同じ元とみなす．$L^\infty[0,1]$ は $[0,1]$ のほとんどいたる点での和・スカラー積・積とノルム

$$\|f\|_{L^\infty} = \operatorname{ess\,sup}\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$$

と, 複素共役による対合に関して, 単位元をもつ可換 C^* 環になる.

さて, $[0,1]$ 上の Lipschitz 連続関数全体の集合を $\mathrm{Lip}[0,1]$ とかく．$\mathrm{Lip}[0,1]$ は $[0,1]$ の各点での和・スカラー積に関して, 線形空間になる．線形空間 $\mathrm{Lip}[0,1]$ には, ノルムがいくつか考えられるが, ここでは次の 4 つのノルムを取り上げる.

$$\begin{aligned}
\|f\|_\Sigma &= \|f\|_\infty + \|f'\|_{L^\infty} \\
\|f\|_M &= \max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_{L^\infty}\} \\
\|f\|_\sigma &= |f(0)| + \|f'\|_{L^\infty} \\
\|f\|_m &= \max\{|f(0)|, \|f'\|_{L^\infty}\}
\end{aligned} \qquad (f \in \mathrm{Lip}[0,1])$$

これらのノルムは互いに同値なノルムであり, $\mathrm{Lip}[0,1]$ をそれぞれのノルムに関して Banach 空間になる．$(\mathrm{Lip}[0,1], \|\cdot\|_\Sigma)$ 及び $(\mathrm{Lip}[0,1], \|\cdot\|_M)$ 上の全射等長作用素の特徴づけは知られていて, それは荷重合成作用素の形をしている ([5, 6, 13])．そこで, $(\mathrm{Lip}[0,1], \|\cdot\|_\sigma)$ と $(\mathrm{Lip}[0,1], \|\cdot\|_m)$ に関して, 次の結果を得た ([7, 8]).

定理 2. $(\mathrm{Lip}[0,1], \|\cdot\|_\sigma)$ または $(\mathrm{Lip}[0,1], \|\cdot\|_m)$ 上の全射等長作用素 T は, $L^\infty[0,1]$ から $L^\infty[0,1]$ の上への多元環同型写像 Φ と, $|w(x)| = 1\,(\text{a.e.}\,x \in [0,1])$ となる $w \in L^\infty[0,1]$ 及び $|\lambda| = 1$ となる定数 λ を用いて,

$$(Tf)(x) = \lambda f(0) + \int_0^x w(t)(\Phi f')(t)\,dt \qquad (x \in [0,1], f \in \mathrm{Lip}[0,1])$$

と表せる.

3 $\mathrm{AC}[0,1]$

閉区間 $[0,1]$ 上の絶対連続関数 f は, $[0,1]$ のほとんどいたるところ f' が存在して, f' は $[0,1]$ 上の可積分関数になる．そこで, $[0,1]$ 上の可積分関数全体の集合を $L^1[0,1]$ とかく．ただし, $[0,1]$ のほとんどいたるところ同じ関数は同じ元とみなす．$L^1[0,1]$ は $[0,1]$ のほとんどいたる点での和・スカラー積とノルム

$$\|f\|_{L^1} = \int_0^1 |f(t)|\,dt$$

に関して Banach 空間になる.

さて, $[0,1]$ 上の絶対連続関数全体の集合を $\mathrm{AC}[0,1]$ とかく. $\mathrm{AC}[0,1]$ は $[0,1]$ の各点の和・スカラー積に関して線形空間になる. 線形空間 $\mathrm{AC}[0,1]$ にはノルムがいくつか考えられるが, ここでは, 次の 4 つのノルムを取り上げる.

$$\begin{aligned} \|f\|_\Sigma &= \|f\|_\infty + \|f'\|_{L^1} \\ \|f\|_M &= \max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_{L^1}\} \\ \|f\|_\sigma &= |f(0)| + \|f'\|_{L^1} \\ \|f\|_m &= \max\{|f(0)|, \|f'\|_{L^1}\} \end{aligned} \qquad (f \in \mathrm{AC}[0,1])$$

これらのノルムは互いに同値なノルムであり, $\mathrm{AC}[0,1]$ はそれぞれのノルムに関して Banach 空間になる. $(\mathrm{AC}[0,1], \|\cdot\|_\Sigma)$ 及び $(\mathrm{AC}[0,1], \|\cdot\|_M)$ 上の全射等長作用素の特徴づけは知られていて, それは荷重合成作用素の形をしている ([1, 5, 13, 12]). そこで, $(\mathrm{AC}[0,1], \|\cdot\|_\sigma)$ と $(\mathrm{AC}[0,1], \|\cdot\|_m)$ に関して, 次の結果を得た.

定理 3. $(\mathrm{AC}[0,1], \|\cdot\|_\sigma)$ または $(\mathrm{AC}[0,1], \|\cdot\|_m)$ 上の全射等長作用素 T は, $L^1[0,1]$ 上の全射等長作用素 Ψ と $|\lambda| = 1$ となる定数 λ を用いて,

$$(Tf)(x) = \lambda f(0) + \int_0^x (\Psi f')(t)\, dt \qquad (x \in [0,1], f \in \mathrm{AC}[0,1])$$

と表せる.

定理 3 の証明の概略 T が $(\mathrm{AC}[0,1], \|\cdot\|_\sigma)$ 上の全射等長作用素の場合: $(\mathrm{AC}[0,1], \|\cdot\|_\sigma)$ の共役空間は $(\mathrm{Lip}[0,1], \|\cdot\|_m)$ とノルム空間として同型になる. そこで, この同型写像と T の共役作用素を用いて, $(\mathrm{Lip}[0,1], \|\cdot\|_m)$ 上の全射等長作用素を考える. そして, 定理 2 で示された特徴づけを用いて, T の形を決定する.

T が $(\mathrm{AC}[0,1], \|\cdot\|_m)$ 上の全射等長作用素の場合: $(\mathrm{AC}[0,1], \|\cdot\|_m)$ の共役空間は $(\mathrm{Lip}[0,1], \|\cdot\|_\sigma)$ とノルム空間として同型になり, 同様に示すことができる.

最後に, これらの線形空間において, $\|\cdot\|_\Sigma$ または $\|\cdot\|_M$ のノルムをもつ場合は, 全射等長作用素が荷重合成作用素の形をしている. 一方, $\|\cdot\|_\sigma$ または $\|\cdot\|_m$ のノルムをもつ場合は, 定理 1, 2, 3 からわかるように, 全射等長作用素が荷重合成作用素の形をしていない. このように, ノルムによって全射等長作用素の形が変わってくる. 今後, ノルムがどのような条件を満たせば, 全射等長作用素が荷重合成作用素の形になるのかを突き止めていきたいと考えている.

参考文献

[1] M. Cambern, *Isometries of certain Banach algebras*, Studia Math., **25** (1965), 217–225.

[2] M. Cambern and V.D. Pathak, *Isometries of spaces of differentiable functions*, Math. Japon., **26** (1981), 253–260.

[3] R.J. Fleming and J.E. Jamison, *Isometries on Banach spaces : function spaces*, Chapman & Hall/CRC Monographs and Surveys in pure and Applied Mathematics, 2003.

[4] K. Jarosz, *Isometries in semisimple commutative Banach algebras*, Proc. Amer. Math. Soc., **94** (1985), 65–71.

[5] K. Jarosz and V.D. Pathak, *Isometries between function spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **305** (1988), 193–206.

[6] A. Jiménez-Vargas and M. Villegas-Vallecillos, *Into linear isometries between spaces of Lipschitz functions*, Houston J. Math., **34** (2008), 1165–1184.

[7] H. Koshimizu, *Finite codimensional linear isometries on spaces of differentiable and Lipschitz functions*, Cent. Eur. J. Math., **9** (2011), 139–146.

[8] H .Koshimizu, *Linear isometries on spaces of continuously differentiable and Lipschitz continuous functions*, to appear in Nihonkai Math. J.

[9] T. Matsumoto and S. Watanabe, *Extreme points and linear isometries of the domain closed *-derivation in $C(K)$*, J. Math. Soc. Japan, **48** (1996), 229–254.

[10] T. Matsumoto and S. Watanabe, *Surjective linear isometries of the domain of a *-derivation equipped with the Cambern norm*, Math. Z., **230** (1999), 185–200.

[11] V.D. Pathak, *Isometries of $C^{(n)}[0,1]$*, Pacific J. Math., **94** (1981), 211–222.

[12] V.D. Pathak, *Linear isometries of spaces of absolutely continuous functions*, Canad. J. Math. **34** (1982), 298–306.

[13] N.V. Rao and A.K. Roy, *Linear isometries of some function spaces*, Pacific J. Math., **35** (1971), 177–192.

Daniell積分によるLebesgue分解と測度論の再考

東京理科大学理学研究科　　齋藤　洋樹 (Hiroki Saito)

1　Daniell積分の概要

2010 年度の関数環研究集会において, folder を用いた Daniell 方式による Radon-Nikodym の定理を紹介させていただいた. 本報告は, Daniell 方式による Lebesgue 分解に関する考察である.

まず最初に, 本報告で採用している Daniell 方式と, 用いられる主な記号と定義を紹介する.

Definition 1.1 ([2]) 集合 Ω 上の実数値関数の線形空間 $\mathcal{H}$ で, 絶対値関数をとる操作に関し閉じているものを基本関数空間と呼ぶ. $\mathcal{H}$ 上の正値線形汎関数 $\int$ で, 単調連続性: $h_n \searrow 0 \Rightarrow \int h_n \to 0$ を満たすものを基本積分と呼ぶ.

以下, $(\Omega, \mathcal{H}, \int)$ を Daniell system と呼ぶ.

基本関数の増加列 $h_n \in \mathcal{H},\ h_n \nearrow$ の各点収束による極限関数 f 全体を $\mathcal{H}^+$ で表す. $f \in \mathcal{H}^+$ は Ω 上の拡大実数値関数である. 但し $-\infty$ は値としてとらない. $f \in \mathcal{H}^+$ の積分 $\int f$ は, $\mathcal{H} \ni h_n \nearrow f$ により, $\int f := \lim \int h_n$ と定義する. $\mathcal{H}^+$ 上の $\int$ 拡大実数値の汎関数である. 但し $-\infty$ を値としてとらない. $\mathcal{H}^+ \ni f$ は $\int f < \infty$ のとき可積分であるといい, $f \in \mathcal{H}^+_{int}$ と表す.

Definition 1.2 ([6], [7]) 部分集合 $Z \subset \Omega$ が零集合であるとは, ある $f \in \mathcal{H}^+_{int}$ が存在し, $\infty I(Z) \leqq f$ が満たされることとする.

零集合の部分集合, 零集合の可算和は零集合である. 零集合上を除き成立する性質は $a.e.$(ほとんどいたるところ) で成り立つと言われる. 可積分関数 $f \in \mathcal{H}^+_{int}$ は, $a.e.$ で有限実数値である.

Definition 1.3 ([6]) Ω 上 $a.e.$ で定義された拡大実数値関数 φ が可測とは, ある基本関数列 $h_n \in \mathcal{H}$ により, $h_n \to \varphi\ \ (a.e.)$ となることである. 可測関数全体を $\mathcal{M}$ で表す.

部分集合 $E \subset \Omega$ が $I(E) \in \mathcal{M}$ を満たす時, E を可測集合と呼び, その全体を $\mathcal{D}$ で表す. 可測集合全体は σ-集合環をなす. (一般に $\mathcal{D}$ は Ω を含むとは限らない.) 可測関数の定義はほかの Daniell 積分の定義と大きく異なる点に注意をされたい ([7], [6], [1]).

Definition 1.4 Ω 上 $a.e.$ で定義された拡大実数値関数 φ が, ある $f \in \mathcal{H}^+$ と $g \in \mathcal{H}^+_{int}$ により $\varphi = f - g\ \ (a.e.)$ と表されるとき, $\varphi \in \mathcal{L}^+$ と表し, $\int \varphi = \int f - \int g$ と定義する. $\varphi \in \mathcal{L}^+$ の積分 $\int \varphi$ が有限実数のとき, φ は可積分関数という. 可積分関数全体を $\mathcal{L}$ で表す.

以上の拡張の手順を Daniell scheme と呼ぶ. Daniell scheme は [7], [6], [1] などで紹介されているが, 構成も内容も実は一様ではなく, 必ずしも互いに同値ではない. Radon-Nikodym の定理や Lebesgue 分解も [7], [6], [1] で提示されているが, それぞれ異なる Daniell scheme に依存しているので比較が難しい. 昨年度の報告では, Radon-Nikodym の定理の「密度」を表現するのに folder という概念を導入し, 上述のいずれとも異なる定式化を紹介した. 今回紹介する Lebesgue 分解は, この Radon-Nikodym の定理に立脚した証明となる.

この報告全体を通して次の Stone 条件 ([7]) を仮定する:

$$h \in \mathcal{H} \Rightarrow h \wedge 1 \in \mathcal{H}.$$

この条件のもとで, 可測関数同士の積の可測性を導くことができる.

2 Folders

我々の採用する scheme では, Radon-Nikodym の密度を表現するのに folder という概念を導入する. また, Lebesgue 分解の証明に関して, Radon-Nikodym の定理に強く依存する. この section では folder とその性質を証明なしに述べる.

Definition 2.1 *集合 $E \subset \Omega$ が基本可測集合であるとは, $I(E) \in \mathcal{H}^+$ なることと定め, そのような集合全体を $\mathcal{E}$ で表す. また E が基本可積分集合であるとは, ある $\varphi \in \mathcal{H}$ が存在し $E = \{\varphi > 1\}$ と書けることと定め, 全体を $\mathcal{E}_0$ で表す.*

Proposition 2.1 *(1) 任意の可測関数 $\varphi \in \mathcal{M}$ に対し, $\{\varphi \neq 0\}$ は可測集合である.*

(2) 任意の可測集合 D に対し, ある $E \in \mathcal{E}$ で $D \subset E$ を満たすものが存在する.

Definition 2.2 *各 $E \in \mathcal{E}$ に, 可測関数 f_E が対応し, 任意の $F \in \mathcal{E}$ に対し $f_F I(E) = f_{E\cap F}$ (a.e.) を満たすとき, この系列を $\langle f \rangle$ で表し, folder と呼ぶ.*

例. 基本可測集合 E に indicator $I(E)$ を対応させる写像は folder になる. この folder を $\langle I \rangle$ と書くことにする.

任意の可測関数 φ に対し, $\varphi\langle h \rangle$ を $E \mapsto \varphi h_E$ と定めると folder となる. Proposition 2.1 より, ある基本可測集合 E_0 が存在し, $\{\varphi \neq 0\} \subset E_0$ が成り立つ. folder の性質を調べると, $\varphi\langle h \rangle$ と φh_{E_0} がある意味で同一視できることがわかる [3]. 以下では, $\varphi h_{E_0} \in \mathcal{L}$ を $\varphi\langle h \rangle \in \mathcal{L}$ などと略記する.

Definition 2.3 *可測 folder $\langle h \rangle$ が, 任意の $f \in \mathcal{H}$ に対し $f\langle h \rangle \in \mathcal{L}$ を満たすとき, $\langle h \rangle$ を密度という. このとき, $P(f) = \int f\langle h \rangle (= \int f h_{E_0})$ とすると, 写像 $P : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ が定まる.*

この P は $\mathcal{H}$ 上の Daniell 積分となることが示され, $P \ll \int$ となる. Radon-Nikodym の定理はこの逆を主張する.

Theorem 2.1 ([3]) *$(\Omega, \mathcal{H}, \int)$ を Stone 条件を満たす Daniell system とし, Q を $\mathcal{H}$ 上の基本積分で $Q \ll \int$ を満たすとする. このとき, ある非負密度 folder $\langle h \rangle$ が存在し, 任意の $f \in \mathcal{L}^+$ に対し,*

$$Q(f) = \int f\langle h \rangle$$

が成り立つ. この $\langle h \rangle$ は (a.e.)-unique に定まる.

3 Daniell 積分による Lebesgue 分解

最初に, いくつか基本的なことを注意する. 基本積分 $\int$ が恒等的に 0 であるとは, 任意の $f \in \mathcal{H}$ に対し $\int f = 0$ となることである. まず次の簡単な事実に注意する.

Proposition 3.1 $\int = 0 \;\Leftrightarrow (\forall E \in \mathcal{E})[\int I(E) = 0]$

これは, $\int = 0 \;\Leftrightarrow (\forall f \in \mathcal{H}^+)[\int f = 0]$ が成り立つことと, 任意の非負 $f \in \mathcal{H}^+$ が $\mathcal{E}$-単関数で下から近似できることによる.

Daniell scheme では可測集合が σ 集合環となるので, 可測集合の中で補集合をとることができない. そこで積分同士の特異性を次のように定義する.

Definition 3.1 *$\int, Q$ を $\mathcal{H}$ 上の Daniell 積分とする. $Q \perp \int$ とは, ある $(\int + Q)$-可測集合 Z が存在し, 任意の $E \in \mathcal{E}$ に対し, $\int I(Z \cap E) = Q(I(Z^c \cap E) = 0$ となることである.*

測度論と同様次が成り立つ.

Proposition 3.2 *$Q \perp \int$ かつ $Q \ll \int$ ならば $Q = 0$ である.*

Proof. ある $(\int + Q)$-可測集合 Z が存在し, 任意の $E \in \mathcal{E}$ に対し $\int I(Z \cap E) = Q(I(Z^c \cap E) = 0$ が成り立つ. $\int I(Z \cap E) = 0$ であるから絶対連続性より $Q(I(Z \cap E)) = 0$ である. したがって,

$$Q(I(Z^c \cap E)) + Q(I(Z \cap E)) = 0$$

となり, $Q(I(E)) = 0$ である. よって, Proposition 3.1 より $Q = 0$ である. ∎

Theorem 3.1 *$(\Omega, \mathcal{H})$ を Stone 条件を満たす基本関数空間. $\int, Q$ を $\mathcal{H}$ 上の Daniell 積分とする. このとき, 2 つの Daniell 積分 Q_a, Q_s が存在し, $Q = Q_a + Q_s$, $Q_a \ll \int$, $Q_s \perp \int$ を満たす. この分解は一意的である, すなわち, ほかに $Q = Q_1 + Q_2$ で, 上述の性質をみたすならば, $Q_1 = Q_a,\ Q_2 = Q_s$ が成り立つ.*

以下この定理の証明の概略を述べる. von Neumann の方法によって行われるが, 証明の核心は特異部分の構成である. 詳細はこの後投稿予定の [5] を参照していただきたい.

Theorem 3.1 の略証.

$Q \ll (\int + Q)$ であるから, Radon-Nikodym の定理より, ある非負 $(\int + Q)$-density $\langle g \rangle$ が存在し,

$$Q(f) = \left(\int + Q\right) f \langle g \rangle \tag{1}$$

が任意の $f \in \mathcal{L}^+(\int + Q)$ に対して成り立つ.

基本可積分集合 $E \in \mathcal{E}_0$ をひとつ固定し, $f = I(g_E > 1) \in \mathcal{L}(\int + Q)$ の形の関数を (1) に代入し評価することで

$\langle g \rangle \leqq \langle I \rangle \quad ((\int + Q)\text{-}a.e.)$ と $\langle g \rangle < \langle I \rangle \quad (a.e.)$ を得る.

$$\langle Z \rangle : E \mapsto I(g_E = 1)$$

とすると, $\langle Z\rangle$ は $(\int +Q)$-可測密度 folder となる．実際, $(\int +Q)$-density であることは自明．また, 任意の $E, F \in \mathcal{E}$ に対し,

$$\begin{aligned}\{g_{E\cap F}=1\} &= \{g_E I(F)=1\}=\{g_E=1\}\cap\{I(F)=1\}\\ &= \{g_E=1\}\cap F\end{aligned}$$

となるから, $I(g_E=1)I(F)=I(g_{E\cap F}=1)$ が成り立つ．

$f\in\mathcal{L}(\int +Q)$ に対して $f\langle g\rangle\in\mathcal{L}(\int +Q)$ となるから,

$$\begin{aligned}Q(f) &= \left(\int +Q\right)f\langle g\rangle=\int f\langle g\rangle+Q(f\langle g\rangle)\\ &= \int f\langle g\rangle+\left(\int +Q\right)f\langle g^2\rangle\\ &= \int f(\langle g\rangle+\langle g^2\rangle)+Q(f\langle g^2\rangle)\\ &= \int f(\langle g\rangle+\langle g^2\rangle+\cdots+\langle g^n\rangle)+Q(f\langle g^n\rangle)\end{aligned}$$

となる．ここで, $\langle g^n\rangle\searrow\langle Z\rangle\quad(Q\text{-}a.e.)$ であり,

$$\langle 0\rangle\leqq\langle g\rangle+\langle g^2\rangle+\cdots+\langle g^n\rangle\nearrow\quad((\textstyle\int +Q)\text{-}a.e.)$$

であるから極限を $\langle h\rangle$ とすると, 単調収束定理と優収束定理から,

$$Q(f)=\int f\langle h\rangle+Q(f\langle Z\rangle)$$

を得ることができる．そこで, 任意の $f\in\mathcal{H}$ に対し $Q_a(f):=\int f\langle h\rangle$, $Q_s(f):=Q(f\langle Z\rangle)$ と定めるとこれが求める分解であることは比較的容易に示される．

最後に一意性を示す．ほかに, $Q=Q_1+Q_2$ で, $Q_1\ll\int, Q_2\perp\int$ となるような分解があったとする．すなわち, $Q_1+Q_2=Q_a+Q_s$ である．任意の $f\in\mathcal{H}$ に対し,

$$\lambda(f):=Q_1(f)-Q_a(f)=Q_s(f)-Q_2(f)$$

とおく． λ は符号付 Daniell 積分となる． Jordan 分解 ([4], [6])$\lambda=\lambda^+-\lambda^-$ に対し, $|\lambda|(h)=\lambda^+(h)+\lambda^-(h)\leqq Q_1(h)+Q_a(h)$ が示される．このことから $|\lambda|\ll\int$ がすぐにわかる．以上のことに注意すれば, 測度論で行われる方法とほぼ同様に $|\lambda|\perp\int$ を示すことができる．よって Proposition 3.2 より $\lambda=0$ となり, 一意性が示される．**略証終.**

4　測度論による考察

σ 有限性に纏わる Lebesgue 分解に関する良く知られた次の反例を検証する．$\Omega=\mathbb{R}$, Σ を Borel 集合, μ:Lebesgue 測度とし, ν を計数測度とする．このとき ν は σ 有限ではない．このとき

$$\nu=\nu_1+\nu_2,\ \nu_1\ll\mu,\nu_2\perp\mu$$

なる分解が可能であったとする．一点集合 $\{x\}$ は μ-零集合であるから ν_1-零集合となり $\nu_2(\{x\}) = 1$ となる．よって, $\nu_2(E) = 0$ と $E = \emptyset$ は同等である．ここで, $\nu_2 \perp \mu$ という条件を考えると, ある F が存在し, $\nu_2(F) = 0$ かつ $\mu(F^c) = 0$ が成り立つはずである．だが $F = \emptyset, F^c = \mathbb{R}$ となって矛盾が生ずる．

この例を Daniell scheme によって考察を行う．$\Sigma_0 := \{B \in \Sigma : \mu(B) < \infty\}$ とし, $\mathcal{H}(\Sigma_0)$ で, Σ_0-単関数全体とする．

$$\int h := \sum a_k \mu(A_k), \qquad \Big(h = \sum a_k I(A_k) \in \mathcal{H}(\Sigma_0)\Big)$$

で $\int$ を定義すると, $(\Omega, \mathcal{H}(\Sigma_0), \int)$ は Stone 条件を満たす Daniell system となる．同様に, $\mathcal{H}(\Sigma_0)$ 上に第 2 の積分 Q を ν から構成しよう．区間 $[0,1]$ の indicator は $\mathcal{H}(\Sigma_0)$ の元であるので μ から $\int$ を構成したように

$$Q(I([0,1])) := \nu([0,1])$$

と定めようとすると値は ∞ となってしまう．したがって, このような単純な関数に対してさえ基本積分の公理を満たすように Q を定めることができない．よって, Theorem 3.1 の仮定を満たすように積分 $\int, Q$ を構成できない．

測度論は固定された Σ 上で議論するが, 我々の Daniell scheme では積分に応じて Daniell 可測集合 $\mathcal{D}$ が定まり, (事実上 σ 有限集合全体) その上で議論する．このため, 測度論で反例となった不都合が起こらないのである．もし測度論でも, 測度に応じて "可測" 集合を適宜取り換えて議論したなら, 本論文と同じ結論に到達しただろう．

参考文献

[1] K. Bichteler, Integration-A Functional Approach, Birkhauser, Berlin. (1998).

[2] P.J. Daniell, A General Form of Integral, Annals of Mathematics, 19, 279-294. (1918).

[3] H. Saito, Radon-Nikodym Theorem with Generalized Density, in preparation.

[4] H. —–, Representation of Dual Space of Daniell integrable function space $\mathcal{L}$, 早稲田高等学院研究年誌. (2011).

[5] H. —–, Lebesgue Decomposition with Daniell Integral Version, in preparation.

[6] G.E. Shilov and B.L. Gurevich translated by R.A. Silverman, Integral, Measure and Derivative: A Unified Approach. Dover Publications, Inc. New York. (1977).

[7] A.J. Weir, General Integration and Measure. II. Cambridge University Press, Cambridge. (1974).

F-algebra 上の乗法的等長写像について

岩手医科大学　共通教育センター　　飯田　安保 (Yasuo IIDA)

【アブストラクト】

この小文では、unit polydisk や unit ball で定義された正則関数からなる Smirnov class、Privalov class 等の、一般に F-algebra と呼ばれるクラスにおける（必ずしも線形性を仮定しない）乗法的等長写像について考える。なおこの内容は羽鳥理氏、S.Stević 氏、植木誠一郎氏との共同研究 [3] の結果である。

1. 準備

unit polydisk を $\mathbb{D}^n = \{z \in \mathbf{C}^n : |z_j| < 1,\ 1 \leqq j \leqq n\}$、unit ball を $\mathbb{B}_n = \{z \in \mathbf{C}^n : \sum_{j=1}^n |z_j|^2 < 1\}$ とし、$\mathbb{T}^n = \{z \in \mathbf{C}^n : |z_j| = 1,\ \ 1 \leqq j \leqq n\}$、$\mathbb{S}_n = \{z \in \mathbf{C}^n : \sum_{j=1}^n |z_j|^2 = 1\}$ とする。以下、X は $\mathbb{D}^n$ か $\mathbb{B}_n$ を表し、∂X は $\mathbb{T}^n$ か $\mathbb{S}_n$ を表すものとする。また ∂X 上の normalized Lebesgue measure を $d\sigma$ で表す。

正則写像 ψ について $\lim_{r \to 1-0} \psi(rz)$ が ∂X 上にあり、これが σ に関して a.e. $z \in \partial X$ で存在するとき、ψ は **inner** とよばれる。また $\lim_{r \to 1-0} \psi(rz)$ を ψ の **boundary map** とよび、ψ^* で表すことにする。さらに 任意の Borel 集合 $E \subset \partial X$ に対して $\sigma((\psi^*)^{-1}(E)) = \sigma(E)$ が成り立つとき、ψ^* は **measure preserving** であるという。

さて、X 上の正則関数 f が $\sup_{0 \le r < 1} \int_{\partial X} \log(1 + |f(r\zeta)|)\, d\sigma(\zeta) < \infty$ を満たすとき f は Nevanlinna class $N(X)$ に属するという。$f \in N(X)$ には有限な nontangential limit が a.e. $\zeta \in \partial X$ で存在することが知られており、これを $f^*(\zeta)$ で表すものとする。また $f \in N(X)$ が以下の条件を満たすとき f は Smirnov class $N_*(X)$ に属するという：

$$\sup_{0 \le r < 1} \int_{\partial X} \log(1 + |f(r\zeta)|)\, d\sigma(\zeta) = \int_{\partial X} \log(1 + |f^*(\zeta)|)\, d\sigma(\zeta).$$

$N_*(X)$ 上の距離を

$$d_{N_*(X)}(f, g) = \int_{\partial X} \log(1 + |f^*(\zeta) - g^*(\zeta)|) d\sigma(\zeta) \quad (f, g \in N_*(X))$$

で定義すると、$N_*(X)$ はこの距離に関して F-algebra（積に関して連続である、線形完備距離空間）であることが知られている。

また $1 < p < \infty$ とし、 X 上の正則関数 f が $\sup_{0 \le r < 1} \int_{\partial X} (\log(1 + |f(r\zeta)|))^p\, d\sigma(\zeta) < \infty$ を満たすとき、f は Privalov class $N^p(X)$ に属するという。$N^p(X)$ は $N_*(X)$ の subalgebra であり、よって $f \in N^p(X)$ には有限な nontangential limit が a.e. $\zeta \in \partial X$ で存在する。

$N^p(X)$ 上の距離を

$$d_p(f,g) = \left(\int_{\partial X} (\log(1+|f^*(\zeta) - g^*(\zeta)|))^p \, d\sigma(\zeta) \right)^{\frac{1}{p}} \quad (f, g \in N^p(X))$$

で定義すると、$N^p(X)$ はこの距離に関して F-algebra であることが知られている。

また $0 < p \leq \infty$ に対し Hardy space を $H^p(X)$ で表し、そのノルムは $\|\cdot\|_p$ と表記することにする。特に Hardy algebra $H^\infty(X)$ は $N_*(X)$ や $N^p(X)$ において dense である。

なお以上のクラスの間には包含関係 $\bigcup_{q>0} H^q(X) \subset N^p(X) \subset N_*(X)$ が真に成り立つことが知られている。

2. $N_*(X)$, $N^p(X)$ における等長写像のこれまでの結果について

Smirnov class $N_*(X)$ における線形等長写像の結果は Stephenson[6] によって得られており、また Privalov class $N^p(X)$ における線形等長写像については、１変数の場合は Iida-Mochizuki[4] による結果があり、多変数の場合は Subbotin[8] の結果が知られている。

さて昨年度の本研究集会において筆者は羽鳥氏との共同研究 [2] として、$N_*(X)$ 上の必ずしも線形性を仮定しない等長写像の結果を報告した。以下がその内容である。なお $T : N_*(X) \to N_*(X)$ が $T(fg) = T(f)T(g)$　$(f\,,\,g \in N_*(X))$ を満たすとき、T は**乗法的（multiplicative）**であると呼ぶことにする：

定理 2-1([2])

Let n be a positive interger and let X be either $\mathbb{B}_n$ or $\mathbb{D}^n$. Suppose that $T : N_*(X) \to N_*(X)$ is a surjective isometry. If $T(2f) = 2T(f)$ holds for every $f \in N_*(X)$, then

$$T(f) = \alpha f \circ \Phi, \quad \forall f \in N_*(X) \qquad \text{or} \qquad T(f) = \alpha \overline{f \circ \overline{\Phi}}, \quad \forall f \in N_*(X),$$

where α is a complex number with the unit modulus and for $X = \mathbb{B}_n$, Φ is unitary transformation; for $X = \mathbb{D}^n$, $\Phi(z_1, \ldots, z_n) = (\lambda_1 z_{i_1}, \ldots, \lambda_n z_{i_n})$, where $|\lambda_j| = 1$, $1 \leqq j \leqq n$ and $(i_1, \ldots, i_n)$ is some permutation of the integers from 1 through n.

系 2-2([2])

Let T be a multiplicative (not necessary linear) isometry from $N_*(X)$ onto itself. Then there exists a holomorphic automorphis Φ on X

$$T(f) = f \circ \Phi, \quad f \in N_*(X) \qquad \text{or} \qquad T(f) = \overline{f(\overline{\Phi})}, \quad f \in N_*(X)$$

hold, where Φ is unitary transformation for $X = \mathbb{B}_n$; for $X = \mathbb{D}^n$ $\Phi(z_1, \ldots, z_n) = (\lambda_1 z_{i_1}, \ldots, \lambda_n z_{i_n})$, where $|\lambda_j| = 1$, $1 \leq j \leq n$ and $(i_1, \ldots, i_n)$ is some permutation of the integers from 1 through n.

3．$N_*(X)$, $N^p(X)$ における等長写像の新しい結果について

前述の定理 2-1 と系 2-2 の証明において大きな役割を果たしたのが「Mazur-Ulam の定理」と呼ばれるものである（[2, 7]）。しかしこの小文では“ onto ”を必ずしも仮定しない等長写像を考えるため、この定理を適用することは出来ない。そのため、この定理の代わりに以下の結果を用いる。なお、実線形ノルム空間 L が **uniformly convex** であるとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して、不等式 $\|a+b\| \leq 2-\delta$ が $\|a\| \leq 1$, $\|b\| \leq 1$, $\|a-b\| \geq \varepsilon$ を満たす任意の組 $a, b \in L$ に対して成り立つことを言う。なおヒルベルト空間と L^p-空間 $(1 < p < \infty)$ は uniformly convex であることが知られている。

補題 3-1([3])

Let L_1 and L_2 be normed real-linear spaces with L_2 uniformly convex. Let S be an isometry from L_1 into L_2 such that $S(0) = 0$. Then S is real-linear.

この補題を用いることで、我々は Smirnov class $N_*(X)$ に関する以下の結果を得た：

定理 3-2([3])

Let $X \in \{\mathbb{B}_n,\ \mathbb{D}^n\}$. Suppose that $T : N_*(X) \to N_*(X)$ is a (not necessarily linear) multiplicative isometry. Then there is an inner map ψ on X whose boundary map ψ^* is measure preserving and such that either of the following formulas holds:

$$T(f) = f \circ \psi \quad \text{for every } f \in N_*(X),$$

$$T(f) = \overline{f \circ \overline{\psi}} \quad \text{for every } f \in N_*(X).$$

（証明の概略）

まず $T(1) = 1$ を示す。$T(1) = T(1)^2$ であり、また $T(1)$ は X 上の正則関数であるため、$T(1) = 0$ または $T(1) = 1$ を得る。しかし $T(1) = 0$ とすると任意の $f \in N_*(X)$ について $0 = T(f)T(1) = T(f)$ となるため、T が等長写像という仮定に反する。よって $T(1) = 1$ が示される。また $T(0) = T(0)^2$ で T が injective であることから $T(0) = 0$ を得る。同様に $T(-1)^2 = T(1) = 1$ から $T(-1) = -1$ も示される。このとき $T(i)^2 = T(i^2) = -1$ から $T(i) = i$ または $T(i) = -i$ が成り立つ。ここでもし $T(i) = i$ であるとすると、この定理の最初の結果が導かれ、同様に $T(i) = -i$ から 2 番目の結果も得られる。

次に $T(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ であることを示す。$r = \frac{1}{2}$ とおき、∂X 上の positive measure のある集合上で $|T(r)^*| > r$ が成り立つとする。このとき positive measure のある部分集合 E と $\varepsilon > 0$ が存在して、E 上 $|T(r)^*| \geq (1+\varepsilon)r$ が成り立つ。ここで $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+(1+\varepsilon)^n r^n)}{\log(1+r^n)} = \infty$ なので、ある正整数 n_0 が存在して

$$\int_E \log(1+(1+\varepsilon)^{n_0} r^{n_0})\,d\sigma > \int_{\partial X} \log(1+r^{n_0})\,d\sigma$$

が成り立つ。この不等式と T が $N_*(X)$ 上の乗法的等長写像であることから、以下の結果を得る：

$$\int_{\partial X}\log(1+r^{n_0})d\sigma=\int_{\partial X}\log(1+|T(r)^*|^{n_0})d\sigma\geq\int_E\log(1+(1+\varepsilon)^{n_0}r^{n_0})d\sigma>\int_{\partial X}\log(1+r^{n_0})d\sigma.$$

これは不合理なので、a.e. ∂X で $|T(r)^*|\leq r$ であることが示される。$T(r)T(\frac{1}{r})=T(1)=1$ が a.e. ∂X で成り立つので $|T(\frac{1}{r})^*|\geq\frac{1}{r}$ が a.e. ∂X で成り立つこともわかる。一方

$$\log\left(1+\frac{1}{r}\right)=\int_{\partial X}\log\left(1+\frac{1}{r}\right)d\sigma=\int_{\partial X}\log\left(1+\left|T\left(\frac{1}{r}\right)^*\right|\right)d\sigma$$

であることから $|T(\frac{1}{r})^*|=\frac{1}{r}$ と $|T(r)^*|=r$ が a.e. ∂X で成り立つことがわかる。

また $\log(1+(1-r))=d(r,1)=d(T(r),1)$ で $d(T(r),1)=\displaystyle\int_{\partial X}\log(1+|1-T(r)^*|)d\sigma$ なので、$T(\frac{1}{2})^*=\frac{1}{2}$ が a.e. ∂X で成り立つことが容易にわかる。以上より $T(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$ が成り立ち、T が乗法的であることから $T(\frac{f}{2})=\frac{T(f)}{2}$ が任意の $f\in N_*(X)$ で成立することが示された。

次に $f,g\in H^1(X)$ とする。上記の結果を用いることにより

$$\int_{\partial X}\log\left(1+\left|\frac{f^*}{2^m}-\frac{g^*}{2^m}\right|\right)d\sigma=\int_{\partial X}\log\left(1+\left|\frac{T(f)^*}{2^m}-\frac{T(g)^*}{2^m}\right|\right)d\sigma \tag{1}$$

を導くことができる。この両辺に 2^m を掛けて $m\to\infty$ とすることで

$$\int_{\partial X}|f^*-g^*|d\sigma=\int_{\partial X}|T(f)^*-T(g)^*|d\sigma$$

を得る。よってこれから $T(H^1(X))\subseteq H^1(X)$ が導かれ、$T|_{H^1(X)}$ は H^1-ノルム $\|\cdot\|_1$ から導入される距離に関して等長写像であることがわかる。

ここで $[0,\infty)$ 上の関数 θ を以下のように定義しよう：

$$\theta(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & x=0\\ (x-\log(1+x))/x^2, & x>0.\end{cases}$$

このとき θ は $[0,\infty)$ 上、正値かつ連続で、$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\theta(x)=0$ が成り立つことがわかる。θ は $[0,\infty)$ 上で有界なので、$M_\theta:=\displaystyle\sup_{x\geq 0}\theta(x)<\infty$ がわかる。

次に $T(H^2(X))\subseteq H^2(X)$ であることと $T|_{H^2(X)}$ が H^2-ノルムから導入される距離に関して等長的であることを示そう。$f,g\in H^2(X)$ とすると、$H^2(X)\subset H^1(X)$ なので (1) が成り立ち、次の等式も成り立つ：

$$\int_{\partial X}\left|\frac{f^*}{2^m}-\frac{g^*}{2^m}\right|d\sigma=\int_{\partial X}\left|\frac{T(f)^*}{2^m}-\frac{T(g)^*}{2^m}\right|d\sigma. \tag{2}$$

さらに (1) と (2) から以下の式を得る：

$$\int_{\partial X}|f^*-g^*|^2\theta\left(\left|\frac{f^*}{2^m}-\frac{g^*}{2^m}\right|\right)d\sigma=\int_{\partial X}|T(f)^*-T(g)^*|^2\theta\left(\left|\frac{T(f)^*}{2^m}-\frac{T(g)^*}{2^m}\right|\right)d\sigma. \tag{3}$$

θ は有界であるため、(3) から関数 $M_\theta|f^*-g^*|^2$ は可積である。$m\to\infty$ として、この左辺に Lebesgue の収束定理を用い、また右辺にも Fatou の補題を適用すると、

$$\int_{\partial X}|f^*-g^*|^2\theta(0)d\sigma \geq \int_{\partial X}|T(f)^*-T(g)^*|^2\theta(0)d\sigma$$

が得られる。この事実と $\theta(0)=\frac{1}{2}$ であることから、$|T(f)^*-T(g)^*|^2$ は可積であることがわかる。再び (3) において $m\to\infty$ とすると、

$$\int_{\partial X}|f^*-g^*|^2d\sigma = \int_{\partial X}|T(f)^*-T(g)^*|^2d\sigma$$

が得られる。よって任意の $f,g\in H^2(X)$ に対して $\|f-g\|_2=\|T(f)-T(g)\|_2$ が成り立つ。$g=0$ とすることで、 $\|f\|_2=\|T(f)\|_2$ であり、また $T(H^2(X))\subseteq H^2(X)$ であることが示された。

$H^2(X)$ はヒルベルト空間なので、このクラスは uniformly convex である。よって補題 3-1 から $T|_{H^2(X)}$ は real-linear である。$H^2(X)$ は $N_*(X)$ で dense なので、 T が $N_*(X)$ 上で real-linear であることがわかる。

まず $T(i)=i$ とする。T は real-linear かつ乗法的なので、T は complex-linear である。[6, Theorem 2.2] と $T(1)=1$ を用いることで、任意の $f\in N_*(X)$ に対して $T(f)=f\circ\psi$ となる inner map ψ が存在する。

次に $T(i)=-i$ とする。$\tilde{T}(f)=T(\tilde{f})\ \ (f\in N_*(X))$ として $\tilde{T}:N_*(X)\to N_*(X)$ を定義する。ここで $f\in N_*(X)$ に対して

$$\tilde{f}(z_1,\ldots,z_n)=\overline{f(\overline{z}_1,\ldots,\overline{z}_n)} \tag{4}$$

とする。このとき $\tilde{T}$ は well defined で、$N_*(X)$ から $N_*(X)$ への complex-linear isometry である。再び [6, Theorem 2.2] から、X 上の inner function ψ で、その boundary map ψ^* が measure preserving で $\tilde{T}(f)=f\circ\psi\ \ (f\in N_*(X))$ となるものが存在する。これより任意の $f\in N_*(X)$ に対して $T(f)=\overline{f\circ\overline{\psi}}$ であることが示された。

（証明終）

系 3-3([3])

Let $X\in\{\mathbb{B}_n,\ \mathbb{D}^n\}$. Suppose that $T:N_*(X)\to N_*(X)$ is a (not necessarily linear) surjective multiplicative isometry. Then there is a holomorphic automorphism ψ on X such that either of the following formulas holds:

$$T(f)=f\circ\psi \quad \text{for every } f\in N_*(X),$$

$$T(f)=\overline{f\circ\overline{\psi}} \quad \text{for every } f\in N_*(X),$$

where ψ is a unitary transformation for $X=\mathbb{B}_n$, while for $X=\mathbb{D}^n$, $\psi(z_1,\ldots,z_n)=(e^{i\theta_1}z_{j_1},\ldots,e^{i\theta_n}z_{j_n})$ for some real numbers θ_j for $j=1,\ldots,n$ and a permutation $(j_1,\ldots,j_n)$ of the integers from 1 to n.

（証明の概略）

定理 3-2 より、T は complex-linear または conjugate linear である。T が complex-linear であるとすると、その結果は [6, Corollary 2.3] から得られる。一方 T が conjugate linear であるとき、$\tilde{T}(f) = T(\tilde{f})$　$(f \in N_*(X))$ とする。ただし $\tilde{f}$ は (4) のように定義する。このとき任意の $f \in N_*(X)$ に対して $\tilde{T}(f) = f \circ \psi$ であり、この X 上の inner function ψ の boundary map ψ^* は measure preserving である。$\tilde{T}$ は surjective isometry なので、再び [6, Corollary 2.3] から ψ の条件が得られる。

（証明終）

また Privalov class $N^p(X)$ についても以下のような結果を得た：

定理 3-4([3])

> Let $X \in \{\mathbb{B}_n,\ \mathbb{D}^n\}$ and $1 < p < \infty$. Suppose that $T : N^p(X) \to N^p(X)$ is a (not necessarily linear) multiplicative isometry. Then there is an inner map ψ on X whose boundary map ψ^* is measure-preserving and such that either of the following formulas holds:
>
> $$T(f) = f \circ \psi \quad \text{for every } f \in N^p(X),$$
>
> $$T(f) = \overline{f \circ \overline{\psi}} \quad \text{for every } f \in N^p(X).$$

（証明の概略）

T は乗法的なので、定理 3-2 の証明と同様にして $T(0) = 0$, $T(1) = 1$ であることと、$T(i) = i$ または $T(i) = -i$ であることが分かる。さらに $T(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ も同様に確認できる。定理 3-2 の証明から、任意の f, $g \in H^p(X)$ に対して

$$\int_{\partial X} \left(\log \left(1 + \left| \frac{f^*}{2^m} - \frac{g^*}{2^m} \right| \right) \right)^p d\sigma = \int_{\partial X} \left(\log \left(1 + \left| \frac{T(f)^*}{2^m} - \frac{T(g)^*}{2^m} \right| \right) \right)^p d\sigma$$

が成り立つ。この式に 2^{mp} を乗じて $m \to \infty$ とすると、

$$\int_{\partial X} |f^* - g^*|^p d\sigma = \int_{\partial X} |T(f)^* - T(g)^*|^p d\sigma$$

を得る。よって $T(H^p(X)) \subseteq H^p(X)$ である。さて、Hardy space $H^p(X)$ は $L^p(\partial X)$ の部分空間とみなすことができる。$L^p(\partial X)$ は uniformly convex であるので、$H^p(X)$　$(1 < p < \infty)$ も同様である。よって補題 3-1 より、T は $H^p(X)$ 上 real-linear である。$H^p(X)$ は $N^p(X)$ の dense subspace なので、T は $N^p(X)$ 上 real-linear である。$T(i) = i$ または $T(i) = -i$ なので、T は $N^p(X)$ 上で complex-linear または conjugate linear である。以下、定理 3-2 の証明の後半部分と同じ要領で証明ができる（ただし [6, Theorem 2.2] の代わりに [8, Theorem 1] を用いよ）。

（証明終）

系 3-5([3])

> Let $X \in \{\mathbb{B}_n,\ \mathbb{D}^n\}$ and $1 < p < \infty$. Suppose that $T : N^p(X) \to N^p(X)$ is a (not necessarily linear) surjective multiplicative isometry. Then there is a holomorphic automorphism ψ on X such that either of the following formulas holds:
>
> $$T(f) = f \circ \psi \quad \text{for every } f \in N^p(X),$$
>
> $$T(f) = \overline{f \circ \overline{\psi}} \quad \text{for every } f \in N^p(X),$$
>
> where ψ is a unitary transformation for $X = \mathbb{B}_n$, while for $X = \mathbb{D}^n$, $\psi(z_1, \ldots, z_n) = (e^{i\theta_1} z_{j_1}, \ldots, e^{i\theta_n} z_{j_n})$ for some real numbers θ_j for $j = 1, \ldots, n$ and a permutation $(j_1, \ldots, j_n)$ of the integers from 1 to n.

（証明の概略）

定理 3-4 より、T は complex-linear または conjugate linear である。もし T が complex-linear であるならば、その結果は [8, Corollary and Remark 3] からすぐに従う。一方 T が conjugate linear であるときは $\tilde{T}(f) = T(\tilde{f}) \quad (f \in N^p(X))$ とおく（$\tilde{f}$ は (4) のように定義する）。このとき $\tilde{T}$ は $N^p(X)$ から $N^p(X)$ の上への complex-linear isometry である。よって再び [8, Corollary and Remark 3] から $T(f) = \overline{f \circ \overline{\psi}} \quad (f \in N^p(X))$ が得られる。

（証明終）

4．Bergman-Privalov class $AN^p_\alpha(X)$ と Zygmund F-algebra $N\log^\beta N(X)$ に関する結果について

$N_*(X)$, $N^p(X)$ に加えて、Bergman-Privalov class $AN^p_\alpha(X)$ と Zygmund F-algebra $N\log^\beta N(X)$ と呼ばれるクラスも新たに定義する。なお以下で X 上の正則関数全体を $H(X)$ で表すことにする。

【Bergman-Privalov class $AN^p_\alpha(X)$ の定義】[5, 7]

$1 \leq p < \infty$, $\alpha > -1$ とする。unit ball $\mathbb{B}_n$ と unit polydisk $\mathbb{D}^n$ における Bergman-Privalov class をそれぞれ以下のように定義する：

$$AN^p_\alpha(\mathbb{B}_n) = \left\{ f \in H(\mathbb{B}_n) : \|f\|^p_{AN^p_\alpha(\mathbb{B}_n)} = \int_{\mathbb{B}_n} (\log(1 + |f(z)|))^p dV_{\alpha,n}(z) < \infty \right\},$$

$$AN^p_\alpha(\mathbb{D}^n) = \left\{ f \in H(\mathbb{D}^n) : \|f\|^p_{AN^p_\alpha(\mathbb{D}^n)} = \int_{\mathbb{D}^n} (\log(1 + |f(z)|))^p \prod_{j=1}^n dV_{\alpha,1}(z_j) < \infty \right\},$$

ここで $\mathbb{B}_n$ 上の normalized Lebesgue volume measure dV に対し $dV_{\alpha,n}(z) = c_{\alpha,n}(1 - |z|^2)^\alpha dV(z)$ とし、また $c_{\alpha,n}$ を normalization constant（つまり $V_{\alpha,n}(\mathbb{B}_n) = 1$）とする。また $dV_\alpha(z)$ は $X = \mathbb{B}_n$ に対し $dV_{\alpha,n}(z)$、 $X = \mathbb{D}^n$ に対し $\prod_{j=1}^n dV_{\alpha,1}(z_j)$ とする。

また Bergman-Privalov class $AN^p_\alpha(X)$ は 以下の距離

$$d_{AN^p_\alpha(X)}(f,g) = \|f-g\|_{AN^p_\alpha(X)} \quad (f,g \in AN^p_\alpha(X))$$

に関して F-algebra である。

このクラスについて、以下の結果が得られた（証明は [3] を参照されたい）：

定理 4-1([3])

Let $X \in \{\mathbb{B}_n,\ \mathbb{D}^n\}$, $1 \le p < \infty$ and $\alpha > -1$. Suppose that $T : AN^p_\alpha(X) \to AN^p_\alpha(X)$ is a (not necessarily linear) multiplicative isometry. Then there is a holomorphic self-map ψ on X with the property that

$$\int_X h \circ \psi(z) dV_\alpha(z) = \int_X h(z) dV_\alpha(z)$$

for every bounded or positive Borel function h on X such that either of the following formulas holds:

$$T(f) = f \circ \psi \quad \text{for every } f \in AN^p_\alpha(X),$$
$$T(f) = \overline{f \circ \overline{\psi}} \quad \text{for every } f \in AN^p_\alpha(X).$$

系 4-2([3, 7])

Let $X \in \{\mathbb{B}_n,\ \mathbb{D}^n\}$, $1 \le p < \infty$ and $\alpha > -1$. Suppose that $T : AN^p_\alpha(X) \to AN^p_\alpha(X)$ is a (not necessarily linear) surjective multiplicative isometry. Then there is a holomorphic automorphism ψ on X such that either of the following formulas holds:

$$T(f) = f \circ \psi \quad \text{for every } f \in AN^p_\alpha(X),$$

$$T(f) = \overline{f \circ \overline{\psi}} \quad \text{for every } f \in AN^p_\alpha(X),$$

where ψ is a unitary transformation for $X = \mathbb{B}_n$, while for $X = \mathbb{D}^n$, $\psi(z_1, \dots, z_n) = (e^{i\theta_1} z_{j_1}, \dots, e^{i\theta_n} z_{j_n})$ for some real numbers θ_j for $j = 1, \dots, n$ and a permutation $(j_1, \dots, j_n)$ of the integers from 1 to n.

【Zygmund F-algebra $N\log^\beta N(X)$ の定義】[1, 9]

$\beta > 0$ とし、$\varphi_\beta(t) = t(\ln(\gamma_\beta + t))^\beta$ とする。ここで $\gamma_\beta = \max\{e, e^\beta\}$ である。X 上の Zygmund F-algebra $N\log^\beta N(X)$ を以下のように定義する：

$$N\log^\beta N(X) = \left\{ f \in H(X) : \sup_{0 \le r < 1} \int_{\partial X} \varphi_\beta(\log(1 + |f(r\zeta)|)) d\sigma(\zeta) < \infty \right\}.$$

このクラスについて、包含関係 $\displaystyle\bigcup_{p>0} H^p(X) \subset N\log^\beta N(X) \subset N_*(X)$ が成り立つことが知られている。よって $f \in N\log^\beta N(X)$ に対して有限な nontangential limit f^* が a.e. ∂X で存在する。

また $f, g \in N\log^\beta N(X)$ に対して

$$d_{N\log^\beta N(X)}(f,g) = \int_{\partial X} \varphi_\beta(\log(1+|f^*(\zeta)-g^*(\zeta)|))d\sigma(\zeta)$$

は $N\log^\beta N(X)$ 上の完備な距離を定義し、この距離に関して $N\log^\beta N(X)$ は F-algebra であることが知られている。

このクラスについても、以下の結果が得られた（証明は [3] を参照されたい）：

定理 4-3([3])

Let $X \in \{\mathbb{B}_n, \mathbb{D}^n\}$. Suppose that $T : N\log^\beta N(X) \to N\log^\beta N(X)$ is a (not necessarily linear) multiplicative isometry. Then there exists an inner map ψ on X whose boundary map ψ^* is measure-preserving on ∂X, such that either of the following formulas holds:

$$T(f) = f \circ \psi \quad \text{for every } f \in N\log^\beta N(X),$$

$$T(f) = \overline{f \circ \overline{\psi}} \quad \text{for every } f \in N\log^\beta N(X).$$

系 4-4([3])

Let $X \in \{\mathbb{B}_n, \mathbb{D}^n\}$. Suppose that $T : N\log^\beta N(X) \to N\log^\beta N(X)$ is a (not necessarily linear) surjective multiplicative isometry. Then there exists a holomorphic automorphism ψ on X such that either of the following formulas holds:

$$T(f) = f \circ \psi \quad \text{for every } f \in N\log^\beta N(X),$$

$$T(f) = \overline{f \circ \overline{\psi}} \quad \text{for every } f \in N\log^\beta N(X),$$

where ψ is a unitary transformation for $X = \mathbb{B}_n$, while for $X = \mathbb{D}^n$, $\psi(z_1, \ldots, z_n) = (e^{i\theta_1} z_{j_1}, \ldots, e^{i\theta_n} z_{j_n})$ for some real numbers θ_j, $j = 1, \ldots, n$ and a permutation $(j_1, \ldots, j_n)$ of the integers from 1 to n.

参考文献

[1] O. M. Eminyan, *Zygmund F-algebras of holomorphic functions in the ball and in the polydisk*, Doklady Math. **65** (2002), 353-355

[2] O. Hatori and Y. Iida, *Multiplicative isometries on the Smirnov class*, Cent. Eur. J. Math. **9(5)** (2011), 1051–1056

[3] O. Hatori, Y. Iida, S. Stević and S. Ueki, *Multiplicative Isometries on F-Algebras of Holomorphic Functions*, Abstract and Applied Analysis **2012** (2012), 16 pages, doi:10.1155/2012/125987

[4] Y. Iida and N. Mochizuki, *Isometries of some F-algebras of holomorphic functions*, Arch. Math. **71**(1998), 297–300

[5] Y. Matsugu and S. Ueki, *Isometries of weighted Bergman-Privalov spaces on the unit ball of* $\mathbb{C}^n$, J. Math. Soc. Japan **54** (2002), 341-347
[6] K. Stephenson, *Isometries of the Nevanlinna class*, Indiana Univ. Math. J. **26** (1977), 307–324
[7] S. Stević, *On some isometries on the Bergman-Privalov class on the unit ball*, Nonlinear Analysis **75** (2012), 2448–2454
[8] A. V. Subbotin, *Isometriers of Privalov spaces of holomorphic functions of several variables*, J. Math. Sci. **135(1)** (2006), 2794-2802
[9] S. Ueki, *Isometries of the Zygmund F-algebra*, Proc. Amer. Math. Soc. In press.

自己共役作用素の半径の計算方法について

茨城大学工学部　　平澤　剛 (Go Hirasawa)

1　はじめに

無限次元複素 Hilbert 空間 H 上の非有界な線形作用素の函数解析的な取り扱いが行えるような世界を構築していくのが研究目的である．そのため, 和や積や弱共役などの代数的操作のほかに, 閉包などの位相的操作でも閉じている半閉作用素 (作用素商) の集合 $\mathcal{S}(H)$ を全体集合として設定するのが適切であると思われる．この枠組みの中で抽象論および具体論を展開できるような商世界 (little world) を創っていきたいのである．「半閉」という名称からも想像されるように, 半閉作用素の集合は重要な閉作用素の集合を含んでいる．この半閉作用素の集合には q-距離というものが定義される（[1]）．後ほど説明すると思うが, q-距離はある種の選択関数 α のもとで定義され, 厳密には q_α-距離と呼ぶべきものであるが, 2 つの有界作用素の q_α-距離は作用素ノルムから入る通常の距離に一致している．従って, 個人的にはとても自然な距離を表していると理解している．

さて, この距離空間 $(\mathcal{S}(H), q_\alpha)$ において, 自己共役作用素（もちろん閉作用素）の集合は半閉な対称作用素の集合の中で相対的な意味で開集合であることがすでに確認されている．すなわち, 任意の自己共役作用素に対して, これを中心とするある半径の近傍内にある半閉な対称作用素は自動的に自己共役である, というものである．

本報告では, 抽象的立場から自己共役作用素の近傍の半径を明示し, さらに具体的立場から自己共役な微分作用素 $\dfrac{1}{i}\dfrac{d}{dx}$ や偏微分作用素 $-\Delta$ などに関する半径を計算していく．
ここで述べている半径とは「最良な半径」を意味するものではない．

2　準備

$(H, (\ ,\ ))$: 無限次元・複素 Hilbert 空間
H で稠密に定義された線形作用素 $s : \mathrm{dom}(s) \to H$ が**対称**であるとは,

$$(su, v) = (u, sv) \quad u, v \in \mathrm{dom(s)}$$

で定義する．換言すれば,

$$su = s^* u \quad u \in \mathrm{dom(s)} \subseteq \mathrm{dom(s^*)}$$

のことである．これを, $s \subseteq s^*$ で表す．さらに, 等号 $(s = s^*)$ が成り立つとき, s を**自己共役**という．

次に, 半閉作用素の特徴付けに関して以下の定理を紹介する. 半閉作用素の定義 (以下の条件 (1)) は, そのグラフが直積 Hilbert 空間において半閉部分空間 (有界作用素の値域) となることである. 以下はこれと同値な条件というわけである.

Theorem 2.1 ([2]) 線形作用素 $s : \mathrm{dom}(s) \to H$ に対して, 以下は同値である.

(1) s は半閉作用素である.

(2) 定義域 $\mathrm{dom}(s)$ 上に, ある Hilbert norm $\|\cdot\|_{\mathrm{dom}(s)}$ が存在して, 次を満たす.
$(\mathrm{dom}(s), \|\cdot\|_{\mathrm{dom}(s)}) \hookrightarrow H$ かつ $s : (\mathrm{dom}(s), \|\cdot\|_{\mathrm{dom}(s)}) \to H$ (有界作用素).

(3) s は作用素商である. すなわち, ある正値作用素 $A \geq 0$ とある $B \in \mathcal{B}(H)$ が存在して, 次を満たす. $\mathrm{dom}(s) = AH,\ \ \mathrm{ran}(s) = BH,\ \ s = B/A : Ax \to Bx, \quad x \in H.$

Remark. 上記の (2) のノルムと (3) の正値作用素において, $\|\cdot\|_{\mathrm{dom}(s)} \overset{1\text{対}1}{\longleftrightarrow} A \geq 0$ の関係がある. 具体的には, $\mathrm{dom}(s) = AH$ かつ $\|\cdot\|_{\mathrm{dom}(s)} = \|\cdot\|_A$. ただし, $\|\cdot\|_A$ は値域 AH 上に定義される de Branges ノルムと呼ばれるものであり, 次で定義される. $\|Au\|_A := \|Pu\|$, P は $(\ker A)^\perp$ への直交射影作用素.

3 距離空間 $(\mathcal{S}(H), q)$

$\mathcal{S}(H)$ を半閉作用素全体の集合とする. すべての半閉部分空間 (半閉作用素の定義域, すなわち有界作用素の値域のこと) に, あらかじめ Hilbert ノルムを１つづつ与えておく. これは上記の **Remark** より, 1 対 1 対応する正値作用素を与えることと同値であることに注意する. このように, あらかじめ Hilbert ノルムを選択しておく選択関数のことを記号 α で表すことにする.
そうすると, $\mathcal{S}(H) \ni s, t$ に対して, それぞれの定義域は選択関数 α により $\mathrm{dom}(s) = AH$, $\mathrm{dom}(t) = CH$ となる $A \geq 0$, $C \geq 0$ が一意に存在することになる. よって, $B := sA$, $D := tC$ と定義すると半閉グラフ定理より $B, D \in \mathcal{B}(H)$. すなわち, $s \overset{\alpha}{=} B/A$, $t \overset{\alpha}{=} D/C$ のように一意的に表現できるのである. このとき, q-距離を以下で定義する.

$$q_\alpha(s,t) := \max\{\|A - C\|, \|B - D\|\}. \tag{1}$$

$M := \mathrm{dom(s)} = \mathrm{dom(t)}$ のときは, $q_\alpha(s,t) = \|s - t\|_{M \to H}$. ($M$ はあらかじめ α によって与えられた Hilbert ノルムにより Hilbert 空間となっているので, M から H への有界作用素と考えたときの作用素ノルムを表している.) さらに, $S, T \in \mathcal{B}(H)$ のときは, $S \overset{\alpha}{=} S/I$, $T \overset{\alpha}{=} T/I$ なので $q_\alpha(S,T) = \|S - T\|$ となる. これらの性質が q-距離を自然な距離と呼ぶ理由である.
　さて, $\mathcal{S}_{\mathrm{sym}}(H) := \{s \in \mathcal{S}(H) : s \subseteq s^*\}$ とし, また $\mathcal{S}_{\mathrm{sa}}(H) := \{s \in \mathcal{S}(H) : s = s^*\}$ とする. このとき, 明らかに $(\mathcal{S}(H), q) \supset \mathcal{S}_{\mathrm{sym}}(H) \supset \mathcal{S}_{\mathrm{sa}}(H)$ である.

Theorem 3.1 上記の選択関数 α を任意に与えておく. このとき, 距離空間 $(\mathcal{S}(H), q_\alpha)$ の部分距離空間 $\mathcal{S}_{\mathrm{sym}}(H)$ を考えたとき, $\mathcal{S}_{\mathrm{sym}}(H)$ において $\mathcal{S}_{\mathrm{sa}}(H)$ は open である：

$$^\forall s \in \mathcal{S}_{\mathrm{sa}}(H),\ \ ^\exists \delta > 0 \ \text{ s.t. } \quad \begin{cases} t \in \mathcal{S}_{\mathrm{sym}}(H) \\ q_\alpha(s,t) < \delta \end{cases} \quad \text{ならば} \quad t \in \mathcal{S}_{\mathrm{sa}}(H).$$

証明には,「$(\mathcal{S}(H), q)$ において, 稠密に定義された閉作用素の集合 $\mathcal{CD}(H)$ は open である」という事実 (定理) を利用する. このとき, 稠密に定義された閉作用素の近傍の半径に興味があるが, その閉作用素のリゾルベントが空でない場合には半径が explicitly に明示される, ということが以下の補題の主張である. この半径が同時に Theorem 3.1 における半径も与えているのである. (繰り返しになるが, 半径とは最良半径という意味ではない.)

Lemma 3.2 リゾルベントが空でない任意の $s \in \mathcal{CD}(H)$ に対して, Φ を $\rho(s) \supset \Phi$ を満たす任意の (空でない) コンパクト集合とする. $s \stackrel{\alpha}{=} B/A$ と商表現しておき, $\delta > 0$ を次で定義する.

$$\delta = \delta(s; \alpha, \Phi) := \min_{\zeta \in \Phi} \frac{\|(B - \zeta A)^{-1}\|^{-1}}{1 + |\zeta|} > 0. \tag{2}$$

すると次が成立する.

$$\begin{cases} t \in \mathcal{S}(H) \\ q_\alpha(s, t) < \delta \end{cases} \text{ならば} \begin{cases} t \in \mathcal{CD}(H) \\ \rho(t) \supset \Phi. \end{cases}$$

(Theorem 3.1 の証明概略)
自己共役作用素 s は稠密に定義された閉作用素なので, 上記補題の半径をもつ近傍内の半閉作用素 t は自動的に稠密に定義された閉作用素となる. 今、仮定から t は半閉な対称作用素であるので, 自動的に閉な対称作用素となる. 閉対称作用素 t が自己共役になるための必要十分条件は $\rho(t) \supset \{ci, -ci\}$ $(c > 0)$ である. ところが, 明らかに $\rho(s) \supset \Phi := \{ci, -ci\}$ なので Lemma 3.2 から $\rho(t) \supset \Phi$ となって t が自己共役であることがわかる.

4 自己共役作用素 $\frac{1}{i}\frac{d}{dx}$ の半径 δ の計算

超関数の意味での微分 $\frac{1}{i}\frac{d}{dx}$ を Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R})$ で考える. 定義域は以下である.

$$\mathrm{dom}(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}) := \{f \in L^2(\mathbb{R}) : f' \in L^2(\mathbb{R})\}.$$

この定義域は標準的なソボレフノルム $\|\cdot\|_{H^1}$ に対して, L^2 の中で連続的に埋め込まれた Hilbert 空間となるので, 半閉部分空間 (有界作用素の値域) である. Theorem 2.1 の Remark でも述べたように, ソボレフノルム $\|\cdot\|_{H^1}$ に 1 対 1 対応する正値作用素 $A \geq 0$ がある:

$$H^1(\mathbb{R}) := (\mathrm{dom}(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}), \|\cdot\|_{H^1})$$

$$\|f\|_{H^1} := (\|f\|^2 + \|f'\|^2)^{\frac{1}{2}} \ (= \|f\|_A \text{ de Branges norm})$$

このとき, $\frac{1}{i}\frac{d}{dx}$ の作用素商表現は $\frac{1}{i}\frac{d}{dx} \stackrel{\alpha}{=} B/A \quad (A = (I - \frac{d^2}{dx^2})^{-\frac{1}{2}})$ のようになる.

ここで, α は何を意味しているかと言えば, $\frac{1}{i}\frac{d}{dx}$ の定義域は標準的ソボレフノルムを選択して, それ以外の半閉部分空間 (定義域) からは適当な Hilbert norm が選択されていると思うのである. $\frac{1}{i}\frac{d}{dx}$ と別の作用素 $t \stackrel{\alpha}{=} D/C$ との距離 $q_\alpha(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}, t)$ は q-距離の定義 (1) からもわかるように, t の分母 C (すなわち, t の定義域の Hilbert norm に対応) にも依存している. ところが, 以下の節でも見るよ

うに, 自己共役作用素 $\frac{1}{i}\frac{d}{dx}$ を中心とする半径は, その作用素 $\frac{1}{i}\frac{d}{dx}$ の分母 A には依存しているが, まわりにある別の作用素 t の分母とは独立である. 結局何が言いたいのかと言うと, t が自己共役作用素 $\frac{1}{i}\frac{d}{dx}$ を中心とする半径 (←これは A および Φ のもとで一定値!) 内の近傍に属すのか属さないかは, t の分母の選び方にも依存してくるということである. このことは, 一般的に言えることであって, 中心は自己共役作用素 $\frac{1}{i}\frac{d}{dx}$ である必要はないが. 従って, 半閉な対称作用素 t の自己共役性を調べたいときに, t が (例えば) 自己共役作用素 $\frac{1}{i}\frac{d}{dx}$ にできるだけ近くなるような分母を選んでくるのが妥当である.

さて, Lemma 3.2 を用いて Theorem 3.1 における $\frac{1}{i}\frac{d}{dx}$ の半径 δ を計算する. $\Phi = \{i, -i\}$ として計算してみる.

$$\delta = \delta(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}; \alpha, \Phi) = \min_{\zeta \in \Phi} \frac{\|(B - \zeta A)^{-1}\|^{-1}}{1 + |\zeta|} = \frac{1}{2}\|(B \pm iA)^{-1}\|^{-1}. \tag{3}$$

そこで, 以下のように変形しておく.

$$\|(B \pm iA)^{-1}\| = \sup_{g \neq 0} \frac{\|(B \pm iA)^{-1}g\|}{\|g\|} = \sup_{f \neq 0} \frac{\|f\|}{\|(B \pm iA)f\|}.$$

さらに両辺 2 乗すると,

$$\begin{aligned}\|(B \pm iA)^{-1}\|^2 &= \sup_{f \neq 0} \frac{\|f\|^2}{\|(B \pm iA)f\|^2} = \sup_{f \neq 0} \frac{\|f\|^2}{\|Af\|^2 + \|Bf\|^2} = \sup_{f \neq 0} \frac{1}{(\|Af\|/\|f\|)^2 + (\|Bf\|/\|f\|)^2} \\ &= \frac{1}{\inf_{f \neq 0}\{(\|Af\|/\|f\|)^2 + (\|Bf\|/\|f\|)^2\}} = \frac{1}{\inf_{\|f\|=1}\big\{\|Af\|^2 + \|Bf\|^2\big\}}.\end{aligned}$$

よって,

$$\delta = \frac{1}{2}\|(B \pm iA)^{-1}\|^{-1} = \frac{1}{2}\big(\inf_{\|f\|=1}\{\|Af\|^2 + \|Bf\|^2\}\big)^{\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

後は, フーリエ変換を用いて計算すればよい.

$\frac{1}{i}\frac{d}{dx} = B/A$ と $A = (I - \frac{d^2}{dx^2})^{-\frac{1}{2}},\ B = (\frac{1}{i}\frac{d}{dx})A$ を代入して

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{1}{2}\big(\inf_{\|f\|=1}\{\|Af\|^2 + \|Bf\|^2\}\big)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\big(\inf_{\|f\|=1}\{\|(I - \frac{d^2}{dx^2})^{-\frac{1}{2}}f\|^2 + \|\frac{1}{i}\frac{d}{dx}(I - \frac{d^2}{dx^2})^{-\frac{1}{2}}f\|^2\}\big)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\big(\inf_{\|\widehat{f}\|=1}\{\|(1+\xi^2)^{-\frac{1}{2}}\widehat{f}\|^2 + \|\xi(1+\xi^2)^{-\frac{1}{2}}\widehat{f}\|^2\}\big)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\big(\inf_{\|\widehat{f}\|=1}\|\widehat{f}\|^2\big)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

まとめると,

$$\begin{cases} t \in \mathcal{S}_{\mathrm{sym}}(L^2(\mathbb{R})) \\ q_\alpha(\frac{1}{i}\frac{d}{dx},\ t) < \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{ならば} \quad t \in \mathcal{S}_{\mathrm{sa}}(L^2(\mathbb{R})) \quad \text{となる.}$$

5 自己共役作用素 $-\Delta$ の半径 δ の計算

$L^2(\mathbb{R}^N)$ における $-\Delta$ の定義域

$$\mathrm{dom}(-\Delta) := \{f \in L^2(\mathbb{R}^N) : (1+|\xi|^2)\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^N)\}$$

に対して, フーリエ式のソボレフノルムを考える:

$$H^2(\mathbb{R}^N) := (\mathrm{dom}(-\Delta), \|\cdot\|_{H^2}), \quad \|f\|_{H^2} := \|(1+|\xi|^2)\widehat{f}\| \ (= \|f\|_A).$$

このとき, $-\Delta$ の作用素商表現は以下のようになる.

$$-\Delta \overset{\alpha}{=} B/A. \quad (A = (I-\Delta)^{-1})$$

ここで, α は何を意味しているかと言えば, $-\Delta$ の定義域はフーリエ式ソボレフノルムを選択して, それ以外の半閉部分空間 (定義域) からは適当な Hilbert norm が選択されていると思っていればよい. 先ほどのケースと同様な手法で, $\Phi := \{i, -i\}$ として計算してみる.

$$\delta := \delta(-\Delta; \alpha, \Phi) = \min_{\zeta\in\Phi} \frac{\|(B-\zeta A)^{-1}\|^{-1}}{1+|\zeta|} = \frac{1}{2}\|(B \pm iA)^{-1}\|^{-1} = \frac{1}{2}\Big(\inf_{\|f\|=1} \|Af\|^2 + \|Bf\|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

において, $A = (I-\Delta)^{-1}$, $B = -\Delta A$ を考慮してフーリエ変換を適用していけばよい.

$$\begin{aligned}
\delta &= \frac{1}{2}\Big(\inf_{\|f\|=1} \|(I-\Delta)^{-1}f\|^2 + \|\Delta(I-\Delta)^{-1}f\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\Big(\inf_{\|\widehat{f}\|=1} \|(1+|\xi|^2)^{-1}\widehat{f}\|^2 + \||\xi|^2(1+|\xi|^2)^{-1}\widehat{f}\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\inf_{\|\widehat{f}\|=1}\Big\|\frac{\sqrt{1+|\xi|^4}}{1+|\xi|^2}\widehat{f}\Big\| = \frac{1}{2}\inf_{\|\widehat{f}\|=1}\Big\|M\widehat{f}\Big\| \quad (M : \text{掛算作用素}) \\
&= \frac{1}{2}\big\|M^{-1}\big\|^{-1} = \frac{1}{2}\Big\|\frac{1+|\xi|^2}{\sqrt{1+|\xi|^4}}\Big\|_\infty^{-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \ (= 0.353\cdots).
\end{aligned}$$

まとめると, $\begin{cases} t \in \mathcal{S}_{\mathrm{sym}}(L^2(\mathbb{R}^N)) \\ q_\alpha(-\Delta,\ t) < \frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}$ ならば $t \in \mathcal{S}_{\mathrm{sa}}(L^2(\mathbb{R}^N))$ となる.

6 自己共役作用素の半径の最良性について

Q 1. 自己共役作用素の半径の最良性とはどういうことか？

q-距離は選択関数 α が与えられて初めて意味をもつ. (繰り返すが, 選択関数 α は「すべて」の半閉部分空間にあらかじめ Hilbert norm を指定しておくその選択のことである.) 明らかなことだが, 半径を議論するためには距離が定義されていなければならない. 従って,「α が与えられる」→「q_α-距離が定義される」→「(α に関して) 半径に意味をもつ」という時系列を経てから, 自己共役作用素の半径の最良性の議論がスタートすることになる. つまり, 最良性の議論は α ごとに行われなければならない.

Definition 6.1 選択関数 α による距離空間 $(\mathcal{S}(H), q_\alpha)$ を考える．このとき, $\tilde{\delta} > 0$ が自己共役作用素 s の最良半径であるとは, 次の 2 条件を満たすことである．

(1) $q_\alpha(s,t) < \tilde{\delta}$ かつ $t \in \mathcal{S}_{\mathrm{sym}}(H)$ ならば $t \in \mathcal{S}_{\mathrm{sa}}(H)$.

(2) $\tilde{\delta} < \delta$ なる任意の δ に対して, ある $t \in \mathcal{S}_{\mathrm{sym}}(H) \setminus \mathcal{S}_{\mathrm{sa}}(H)$ が存在して, $q_\alpha(s,t) < \delta$ を満たす．

上記の定義を抽象論的に考察する際に, すべての選択関数 α に対する統一的な手法で最良性の議論を行うのは（個人的には）無理があるのではないかと考えてしまう．つまり, α ごとに, さらに自己共役作用素ごとに, 個別対応していかなくてはならない (!?) と考える．そこで手始めに, Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R})$ という具体的立場から, さらには特定の自己共役作用素 $\frac{1}{i}\frac{d}{dx}$ の半径の最良性を考察していきたい．もちろん, α を明示する必要があるが, 取り急ぎ自己共役作用素 $\frac{1}{i}\frac{d}{dx}$ の分母 $A = (I - \frac{d^2}{dx^2})^{-\frac{1}{2}}$ (←ソボレフノルム $\|\cdot\|_{H^1}$ に対応) のみを明示しておいて, それ以外の作用素の分母は登場する度毎に都合よく選択して, もし目的が達成（最良半径が得られたときに）されたときに, それらの分母を含むすべての半閉作用素の分母の選択を α と事後報告すればよい．これが現実的な考察方法であろう．従って,「ある」選択関数 α における q_α-距離を考え, これに基づいた微分作用素の最良半径を求める, ということになる．

Q2. 4 節で計算した $\frac{1}{i}\frac{d}{dx}$ の半径 $\delta = \frac{1}{2}$ は最良半径か？

$\frac{1}{i}\frac{d}{dx} = B/A \quad (A = (I-\Delta)^{-\frac{1}{2}})$ と $\Phi = \{i, -i\}$ のもとで半径の式 (3) および (4) を計算した値が 1/2 ということだが, Φ を $\Phi_c = \{ci, -ci\}$ $(c > 0)$ で置き換えて計算し, さらに $c > 0$ で上限を取ればもっと大きな半径が得られる可能性がある．これを実行する．

$$\begin{aligned}
\delta(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}; \alpha, \Phi_c) &= \frac{1}{1+c}\,\|(B \pm ciA)^{-1}\|^{-1} = \frac{1}{1+c}\,\big(\inf_{\|f\|=1}\{\|cAf\|^2 + \|Bf\|^2\}\big)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{1+c}\,\big(\inf_{\|\widehat{f}\|=1}\{c^2\|(1+\xi^2)^{-\frac{1}{2}}\widehat{f}\|^2 + \|\xi(1+\xi^2)^{-\frac{1}{2}}\widehat{f}\|^2\}\big)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{1+c}\,\inf_{\|\widehat{f}\|=1}\Big\|\big(\frac{c^2+\xi^2}{1+\xi^2}\big)^{\frac{1}{2}}\widehat{f}\Big\| = \frac{1}{1+c}\,\inf_{\|\widehat{f}\|=1}\|M_c\widehat{f}\| \quad (M_c: \text{掛け算作用素}) \\
&= \frac{1}{1+c}\,\|M_c^{-1}\|^{-1} = \frac{1}{1+c}\,\Big\|\big(\frac{1+\xi^2}{c^2+\xi^2}\big)^{\frac{1}{2}}\Big\|_\infty^{-1} = \frac{1}{1+c}\,\Big\|\frac{1+\xi^2}{c^2+\xi^2}\Big\|_\infty^{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

この上限を取って, 計算すると

$$\delta := \sup_{c>0}\frac{1}{1+c}\,\Big\|\frac{1+\xi^2}{c^2+\xi^2}\Big\|_\infty^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

となることが簡単に理解できる．結局 Φ で計算した結果と同じになる．もし, この半径が最良であるならばこれより少しでも大きくすると, その近傍内に自己共役でない半閉対称作用素が存在せねばならない．実のところ, このあたりはまだ不明であり最良性はよくわかっていない．

Q3. $-\Delta$ の半径 $\delta = \frac{\sqrt{2}}{4}$ は最良半径か？

$-\Delta \overset{\alpha}{=} B/A$ に対し,

$$
\begin{aligned}
\delta(-\Delta;\alpha,\Phi_c) &:= \min_{\zeta\in\Phi_c} \frac{\|(B-\zeta A)^{-1}\|^{-1}}{1+|\zeta|} \quad (\Phi_c := \{ci, -ci\}) \\
&= \frac{1}{1+c}\,\|(B\pm ciA)^{-1}\|^{-1} = \frac{1}{1+c}\left(\inf_{\|f\|=1} c^2\|Af\|^2 + \|Bf\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{1+c}\left(\inf_{\|f\|=1} c^2\|(I-\Delta)^{-1}f\|^2 + \|-\Delta(I-\Delta)^{-1}f\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{1+c}\left(\inf_{\|\widehat{f}\|=1} c^2\|(1+|\xi|^2)^{-1}\widehat{f}\|^2 + \||\xi|^2(1+|\xi|^2)^{-1}\widehat{f}\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{1+c}\inf_{\|\widehat{f}\|=1}\left\|\frac{\sqrt{c^2+|\xi|^4}}{1+|\xi|^2}\widehat{f}\right\| = \frac{1}{1+c}\inf_{\|\widehat{f}\|=1}\left\|M_c\widehat{f}\right\| = \frac{1}{1+c}\left\|M_c^{-1}\right\|^{-1} \\
&= \frac{1}{1+c}\left\|\frac{1+|\xi|^2}{\sqrt{c^2+|\xi|^4}}\right\|_\infty^{-1} = \frac{1}{1+c}\,\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}
\end{aligned}
$$

これを最大にする c は 1 である. 従って,

$$
\sup_{c>0}\ \delta(-\Delta;\alpha,\Phi_c) = \frac{\sqrt{2}}{4}\ (= 0.353\cdots)
$$

結局 Φ で計算した結果と同じになる. もし, この半径が最良であるならばこれより少しでも大きくすると, その近傍内に自己共役でない半閉対称作用素が存在せねばならない. しかし, **Q2.** と同様に, このあたりはまだ不明であり最良性はよくわかっていない.

7 自己共役作用素 Δ^2 の半径 δ の値

最後に, 自己共役作用素 Δ^2 の半径の結果のみを紹介して終わろう.

$$
H^4(\mathbb{R}^N) := (\mathrm{dom}(\Delta^2), \|\cdot\|_{H^4}), \quad \|f\|_{H^4} := \|(1+|\xi|^2)^2\widehat{f}\|.\ (= \|f\|_A)
$$

このとき, Δ^2 の作用素商表現は以下のようになる.

$$
\Delta^2 \overset{\alpha}{=} B/A. \quad (A = (I-\Delta)^{-2})
$$

$\Phi = \{i, -i\}$ として計算する.

$$
\delta = \delta(\Delta^2;\alpha,\Phi) = \min_{\zeta\in\Phi}\frac{\|(B-\zeta A)^{-1}\|^{-1}}{1+|\zeta|} = \cdots = \frac{1}{2}\left\|\frac{(1+|\xi|^2)^2}{\sqrt{1+|\xi|^8}}\right\|_\infty^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{8}\ (= 0.176\cdots)
$$

$$
\begin{cases} t \in \mathcal{S}_{\mathrm{sym}}(L^2(\mathbb{R}^N)) \\ q(\Delta^2,\ t) < \frac{\sqrt{2}}{8} \end{cases} \quad \text{ならば}\quad t \in \mathcal{S}_{\mathrm{sa}}(L^2(\mathbb{R}^N)) \quad \text{となる.}
$$

参考文献

[1] G.Hirasawa, *A Metric for Unbounded Linear Operators in a Hilbert space*, Integr. Equ. Oper. Theory 70 (2011), 363-378.

[2] W.E.Kaufman, *Semiclosed operators in Hilbert space*, Proc. Amer. Math. Soc., 76 (1979), 67-73.

Coarse空間とHigsonコンパクト化

筑波大学数理物質系数学域　　嶺　幸太郎 (Kotaro Mine)

空間を遠くから眺めた際に見える巨視的（large scale）な性質を研究する幾何学を coarse 幾何学と言う．本稿では, coarse 不変量のひとつである Higson コンパクト化とその境界について得られた結果を解説する.

1　擬等長写像とその不変量

整数空間 $\mathbb{Z}$ を遠くから見るほど隣り合う 2 点間の幅は小さく見える．これは, 無限に遠くから $\mathbb{Z}$ を眺めたとき, それは実数直線 $\mathbb{R}$ を眺めた場合とほとんど同じものが見えていると考えられる．このようにして, 巨視的な意味で空間を同じものと見なす見方がいくつか知られている．まず, もっともよく認知された見方である空間の擬等長性について述べよう.

定義 1.1. 集合 S から距離空間 (X, d) への二つの写像 $f, g : S \to X$ が $\sup\{\, d(f(s), g(s)) \mid s \in S \,\} < \infty$ となるとき, f と g は**近い** (**close**) と言い, $f \risingdotseq g$ と書く．とくに, 有界な関数どうしは常に近い.

巨視的な立場では, 互いに近い写像は同じものと見なせそうである.

定義 1.2. 距離空間の間の写像 $f : (X, d_X) \to (Y, d_X)$ が次の性質を満たすとき, f は**擬等長写像** (**quasi isometry**) であるという:

$$\exists A > 0,\ \exists B \geq 0,\ \forall x, y \in X, \quad \frac{1}{A} d_X(x, y) - B \leq d_Y(f(x), f(y)) \leq A d_X(x, y) + B.$$

等長写像やノルム空間 V におけるスカラー倍 $g : V \to V$ $(g(x) = rx$, ただし $r \neq 0)$, ガウス記号による写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ $(f(x) = [x])$ などは擬等長写像である.

定義 1.3. 二つの距離空間 X と Y が**擬等長** (**quasi isometric**) であるとは, $g \circ f \risingdotseq \mathrm{id}_X$ および $f \circ g \risingdotseq \mathrm{id}_Y$ を満たす擬等長写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ が存在することである．空間の擬等長性は距離空間の間の同値関係である.

有界な空間は 1 点空間と擬等長である．また, 先述のガウス記号による写像を各座標ごとにほどこすことでユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ とその格子点 $\mathbb{Z}^n$ の擬等長性を得る．このほか, 有限生成群 G において, G の生成系から得られる語長距離による距離空間どうしは生成元の取り方によらずに擬等長になることが知られている.

双曲空間や $CAT(-1)$ 空間の巨視的な立場における一般化として, Gromov は **Gromov 双曲空間**と呼ばれる距離空間上の概念を定義し, その無限遠境界 (**Gromov 境界**) を与えた．Gromov 双

曲空間の間の擬等長写像は境界間の擬メビウス写像を誘導し, その逆の対応もいくつかの条件の下では成立する. これは古典的双曲空間 $\mathbb{H}^n$ の等長変換と境界 $\mathbf{S}^{n-1}$ 上のメビウス変換 (等角変換) の 1 対 1 対応の類推であるとも考えられる. また, 互いに近い擬等長写像は境界上に同じ擬メビウス写像を誘導し, とくに Gromov 境界は Gromov 双曲空間の擬等長不変量になる. すなわち, 互いに擬等長な Gromov 双曲空間の Gromov 境界は同相 (位相同型) である.

一方, 一般の固有距離空間[1]に関する擬等長不変量として, Higson コンパクト化の境界がある.

定義 1.4. 距離空間 X 上の有界関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が次を満たすとき, **Higson 関数**であるという:

$$\forall M > 0,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists K \subset X\text{: 有界集合},\quad x \in X \setminus K \Longrightarrow \operatorname{diam} f(N(x, M)) < \varepsilon,$$

ここで, $N(x, M)$ は $x \in X$ の M-近傍, $\operatorname{diam} A$ は A の直径を表す.

定義 1.5. 距離空間 X 上の連続な Higson 関数全体 $C_h(X)$ は Banach 環の構造を持ち, その極大イデアル空間 hX は X のコンパクト化と見なせる. hX を X の **Higson コンパクト化**と言う. とくに X が固有距離空間であるとき, その境界 $\nu X := hX \setminus X$ を X の **Higson コロナ**と言う.

Higson コロナは固有距離空間の擬等長不変量であることが知られている. すなわち, 互いに擬等長な固有距離空間の Higson コロナは同相である.

2 距離空間の coarse 同値性とその抽象化

実は, Higson コロナは擬等長性よりもやや弱い coarse 同値性に関する不変量になっている.

定義 2.1. 距離空間の間の写像 $f : X \to Y$ が次の性質を満たすとき, f は **coarse 写像**であるという:

(i) $\forall M > 0,\ \exists L > 0,\ \forall x \in X, \quad \operatorname{diam} f(N(x, M)) \leq L,$

(ii) 任意の有界集合 $K \subset Y$ について, $f^{-1}(K)$ は有界集合である.

定義 2.2. 二つの距離空間 X と Y が **coarse 同値**であるとは, $g \circ f \fallingdotseq \mathrm{id}_X$ および $f \circ g \fallingdotseq \mathrm{id}_Y$ を満たす coarse 写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ が存在することである. coarse 同値性は距離空間の間の同値関係である.

二つの距離空間が擬等長ならば coarse 同値であり, その逆は一般には成り立たない. 測地空間では擬等長性と coarse 同値性は一致する.

さて, 距離空間における一様連続性が一様空間の間の概念に拡張できたように, coarse 性も coarse 空間と呼ばれる抽象的な概念に拡張することができる:

定義 2.3 (cf. Roe [2])**.** X を集合とする. $X \times X$ の部分集合族 $\mathcal{E}$ が次の条件を満たすとき, $\mathcal{E}$ を X の **coarse 構造** (**coarse structure**) と呼び, 集合と coarse 構造の組 $(X, \mathcal{E})$ を **coarse 空間**と言う:

[1]部分集合の相対コンパクト性と有界性が同値になる距離空間を固有距離空間という. ここで, X の部分集合 A が**相対コンパクト**であるとは, その閉包 $\operatorname{cl} A$ がコンパクトになるときを言う.

(i) $\Delta_X := \{ (x,x) \mid x \in X \} \in \mathcal{E}$,

(ii) $E \in \mathcal{E}$, $F \subset E \Longrightarrow F \in \mathcal{E}$,

(iii) $E \in \mathcal{E} \Longrightarrow E^{-1} := \{ (x,y) \mid (y,x) \in E \} \in \mathcal{E}$,

(iv) $E, F \in \mathcal{E} \Longrightarrow E \cup F \in \mathcal{E}$,

(v) $E, F \in \mathcal{E} \Longrightarrow E \circ F := \{ (x,y) \mid \exists z \in X,\ (x,z) \in E,\ (z,y) \in F \} \in \mathcal{E}$.

例 2.4. 距離空間 (X,d) において, $\mathcal{E}_d = \{ E \subset X^2 \mid \sup\{ (x,y) \mid (x,y) \in E \} < \infty \}$ とすれば E_d は X の coarse 構造になる. これを X の**有界 coarse 構造**と言う.

例 2.5. 局所コンパクトな距離空間 (X,d) に対して, 次で定義される $\mathcal{E}_d^0$ は coarse 構造になり, $\boldsymbol{C_0}$ **coarse 構造**と呼ばれる:

$$E \in \mathcal{E}_d^0 \underset{\text{def}}{\iff} \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, K \subset X : \text{コンパクト} \ \text{ s.t. } \ (x,y) \in E \setminus K^2 \ \Rightarrow\ d(x,y) < \varepsilon.$$

例 2.6. 局所コンパクト空間 X のハウスドルフ・コンパクト化 $\widetilde{X}$ について, $\mathcal{E}_{\widetilde{X}} = \{E \subset X^2 \mid (\mathrm{cl}_{\widetilde{X}\times\widetilde{X}}\, E) \setminus X \times X \subset \Delta_{\partial X} \}$ は X の coarse 構造になる. これを $\widetilde{X}$ による**位相的 coarse 構造** (**topological coarse structure**) あるいは**連続的に制御された coarse 構造** (**continuously controlled coarse structure**) と呼ぶ.

coarse 空間においても写像の近さや部分集合の有界性, coarse 写像, corase 同値性, Higson 関数などが定義される. 以下に述べる定義は, 距離空間における有界 coarse 構造を考えたとき, 既に述べた定義 1.1 および 2.1, 2.2, 1.4 と一致する.

定義 2.7. 集合 S から coarse 空間 $(X,\mathcal{E})$ への二つの写像 $f, g : S \to X$ が $\{ (f(s), g(s)) \mid s \in S \} \in \mathcal{E}$ を満たすとき, f と g は**近い** (**close**) と言い, $f \fallingdotseq g$ と書く.

定義 2.8. coarse 空間 $(X,\mathcal{E})$ の部分集合 $K \subset X$ が $K \times K \in \mathcal{E}$ を満たすとき, K は**有界集合**であると言う.

定義 2.9. coarse 空間の間の写像 $f : (X,\mathcal{E}_X) \to (Y,\mathcal{E}_Y)$ が次の性質を満たすとき, f は **coarse 写像**であるという:

(i) $\forall E \in \mathcal{E}_X, \quad f \times f(E) := \{ (f(x), f(y)) \mid (x,y) \in E \} \in \mathcal{E}_Y$,

(ii) 任意の有界集合 $K \subset Y$ について, $f^{-1}(K)$ は有界集合である.

定義 2.10. 二つの coarse 空間 X と Y が **coarse 同値**であるとは, $g \circ f \fallingdotseq \mathrm{id}_X$ および $f \circ g \fallingdotseq \mathrm{id}_Y$ を満たす coarse 写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ が存在することである. coarse 同値性は coarse 空間の間の同値関係である.

定義 2.11. coarse 空間 $(X,\mathcal{E})$ 上の有界関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が次を満たすとき, **Higson 関数** (**$\boldsymbol{\mathcal{E}}$-Higson**) であるという:

$$\forall E \in \mathcal{E},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists K \subset X\text{: 有界集合}, \quad x \in X \setminus K \Longrightarrow \operatorname{diam} f(E[x]) < \varepsilon,$$

ここで, $E \subset X^2$ について $E[x] := \{ y \in X \mid (y,x) \in E \}$ は $x \in X$ の E-近傍を表す.

$(X,\mathcal{E})$ が位相空間である場合 (以下, X にはいくつかの分離公理[2]を仮定する), X の位相構造とcoarse 構造の間には何らかの関係があることが望ましい. あるいは技術上の理由から, coarse 構造に次の性質のうちのいくつかを仮定することが多い:

(i) X はパラコンパクト空間である,

(ii) X は局所コンパクト空間であり, 有界性と相対コンパクト性が同値になる,

(iii) 対角線集合 Δ_X の X^2 におけるある近傍 $E \in \mathcal{E}$ が存在する.

上の条件 (i)〜(iii) すべてを満たす coarse 空間を**固有 coarse 空間**と言う. 例えば, 固有距離空間における有界 coarse 構造や可分な局所コンパクト距離空間における C_0 coarse 構造, 距離化可能なコンパクト化による位相的 coarse 構造などを考えれば, これらは固有 coarse 空間となる.

定義 2.12. coarse 空間 X 上の連続な Higson 関数全体 $C_h(X)$ は Banach 環の構造を持つ. 更に X が上の条件 (ii) または (iii) を満たすとき, その極大イデアル空間 hX は X のコンパクト化と見なせる. このとき hX を X の **Higson コンパクト化**と言う. とくに X が固有 coarse 空間であるとき, その境界 $\nu X := hX \setminus X$ を X の **Higson コロナ**と言う.

なお, 必ずしも固有でない一般の coarse 空間においても, coarse 不変量となるような Higson コロナが定義できることが知られており, 次の定理を得る:

定理 2.13 (cf. Roe [2])**.** coarse 空間の間の coarse 写像は, それらの Higson コロナの間の連続写像を誘導する. また, 互いに近い coarse 写像が誘導するコロナ上の連続写像は一致する. とくに, Higson コロナは coarse 空間の coarse 不変量である.

3 Higson コンパクト化の特徴づけ

X のコンパクト化 γX および δX について, $h|_X = \mathrm{id}_X$ なる同相写像 $h : \gamma X \to \delta X$ が存在するとき γX と δX は**同値なコンパクト化である**といい, $\gamma X \sim \delta X$ と書く. 次の定理により, X のコンパクト化は 2 つの閉集合の閉包が分離されるかどうかによって特徴づけられる (Theorem 3.5.5 of [1]):

定理 3.1. 位相空間 X のハウスドルフ・コンパクト化 γX および δX について次は同値である:
(i) γX と δX は同値なコンパクト化である,
(ii) X の任意の閉集合 A, B について, $\mathrm{cl}_{\gamma X} A \cap \mathrm{cl}_{\gamma X} B = \emptyset \iff \mathrm{cl}_{\delta X} A \cap \mathrm{cl}_{\delta X} B = \emptyset$.

Higson コンパクト化における閉集合の分離条件を coarse 構造の言葉で記述するために, 次の概念を導入しよう:

定義 3.2. coarse 空間 $(X,\mathcal{E})$ の部分集合 A, B が次を満たすとき, **発散する** (**diverge**) または**漸近的に交わらない** (**asymptotically disjoint**) という:

$$\forall\ E \in \mathcal{E},\quad E[A] \cap E[B] \text{ は有界}.$$

[2]少なくとも, X のコンパクト化がハウスドルフ空間となるようチコノフ分離性 $T_{3\frac{1}{2}}$, すなわち, X の任意の閉集合およびその外側にある任意の点が関数分離できることを仮定しなければならない.

coarse 空間 $(X, \mathcal{E})$ の部分集合 A において, $\mathcal{E}$ の A への制限 $\mathcal{E}|_A := \{ E \in \mathcal{E} \mid E \subset A^2 \}$ は A 上の coarse 構造をなす. $(A, \mathcal{E}|_A)$ を X の**部分 coarse 空間**と呼ぶ. 次の事実は定義より直ちに得られる:

事実 3.3. coarse 空間 $(X, \mathcal{E})$ の部分集合 A および $\mathcal{E}$-Higson 関数 $f : X \to \mathbb{R}$ について, $f|_A$ は $\mathcal{E}|_A$-Higson である.

今回の研究において, Higson コンパクト化における閉集合の分離条件と coarse 構造における発散性の同値性について次の結果を得た:

定理 3.4. coarse 空間 $(X, \mathcal{E})$ について次は同値である.

(i) 任意の閉集合 $A \subset X$ および $\mathcal{E}|_A$-Higson $f : A \to [a, b]$ について, $F|_A = f$ を満たす $\mathcal{E}$-Higson $F : X \to [a, b]$ が存在する. すなわち, 任意の閉集合からの Higson 関数は全体の Higson 関数に拡張する.

(ii) 任意の閉集合 $A \subset X$ について, $\mathrm{cl}_{hX} A \sim h_{\mathcal{E}|_A} A$.

(iii) 互いに交わらない任意の閉集合 $A, B \subset X$ について, A と B が発散することと $\mathrm{cl}_{hX} A \cap \mathrm{cl}_{hX} B = \emptyset$ となることは必要十分である.

有界 coarse 構造や C_0 coarse 構造, 第 1 可算公理を満たすコンパクト化の位相的 coarse 構造などにおいては上の条件 (i)〜(iii) のいずれか (したがってすべて) が成立する. 上の条件がいずれも成立しない coarse 空間の例はあまり多くは見つかっておらず, とくに固有 coarse 空間の例については不明である.

参考文献

[1] R. Engelking, *General Topology*, Heldermann, Berlin, 1989.

[2] J. Roe, *Lectures on coarse geometry*, University Lecture Series, 31. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

ディリクレ空間と作用素論

島根大学総合理工学部　　瀬戸　道生 (Michio Seto)

0　はじめに

T をヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の有界線型作用素，H^2 を単位円板上の Hardy 空間，T_z を通常の Toeplitz 作用素とする．いろいろな空間で掛け算作用素とその不変部分空間が調べられている一つの理由は次の定理であろう．

定理 0.1 (Rota) $\Delta_T = I - TT^*$ と定める．$\|T\| \leq 1$ かつ任意の $x \in \mathcal{H}$ に対し $\|T^{*n}x\| \to 0$ $(n \to \infty)$ ならば，$VT^* = T_z^* V$ を満たす等距離作用素 $V : \mathcal{H} \to H^2 \otimes \overline{\mathrm{ran}} \Delta_T$ が存在する．ただし，ここでは $T_z \otimes I$ を T_z と略記した．

$\mathrm{ran}\, V$ が T_z^* で不変であることから，$V^* T_z V$ が準同型写像を定める（$*$-演算は保存しない）．従って，T_z が縮小作用素の族に対し一種の universal な性質をもっていることがわかる．このノートではこの Rota の定理の Dirichlet 空間に対応する結果を紹介したい．尚，この研究は内山先生（島根大学）との共同研究である．

1　Dirichlet 空間

$\mathbb{D} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$ とし，

$$\mathcal{D} = \left\{ f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 \, dxdy < +\infty \right\}$$

と定める．この空間は Dirichlet 空間と呼ばれる．さて，次のノルムを入れることにより，$\mathcal{D}$ はヒルベルト空間となる．

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)|c_n|^2 \quad \left(f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\right).$$

さらに，$\mathcal{D}$ は次の関数を再生核とする再生核ヒルベルト空間である．

$$\begin{aligned} k_\lambda(z) &= \frac{1}{\overline{\lambda} z} \log\left(\frac{1}{1 - \overline{\lambda} z}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2}\overline{\lambda} z + \frac{1}{3}\overline{\lambda}^2 z^2 + \cdots . \end{aligned}$$

ここで，

$$F(z_1, z_2) = z_1 z_2 / \log\left(\frac{1}{1 - z_1 z_2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z_1^n z_2^n.$$

と定め，$I - TT^*$ と同様な役割を果たすであろうと期待される作用素を次のように定める．

$$\Delta_T = \sum_{n=0}^{\infty} d_n T^n T^{*n}.$$

このように定義する理由を以下に述べる．$I - TT^*$ は Szegö 核 $1/(1 - \overline{\lambda} z)$ の逆数 $1 - \overline{\lambda} z$ とよく似ている．同様に，Bergman 核 $1/(1 - \overline{\lambda} z)^2$ の逆数 $(1 - \overline{\lambda} z)^2 = 1 - 2\overline{\lambda} z + \overline{\lambda}^2 z^2$ に対応する $I - 2TT^* + T^2 T^{*2}$ も作用素論によく出てくる対象である（例：2-isometry の理論）．従って，Dirichlet 空間の再生核の逆数を考え，z に T を，$\overline{\lambda}$ に T^* を代入し，T を T^* の前に配置した作用素 Δ_T を考えれば，そこには良い作用素論が現れることが期待できる．ここまでは，Agler のアイデアである．さらに，Agler は

$$\Delta_T = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_C \int_C F(z_1, z_2)(z_1 I - T)^{-1}(z_2 I - T^*)^{-1}\, dz_1 dz_2$$

と定義することを提案しているが，今考えたい Dirichlet 空間の場合では，1 が F の分岐点となっているため，工夫をしないとその適用範囲は $\|T\| < 1$ だけとなってしまう．これでは通常の contraction の理論から一歩も出ないことになるので，今回は順序付きのべき級数で Δ_T を定義する．2 章で $\|T\| > 1$ and $\sigma(T) = \overline{\mathbb{D}}$ となる作用素について Δ_T が適当な意味で収束することを見る．尚，Hardy 空間，Bergman 空間の場合，この二通りの定義は同じものである．

今回は下の表での「○」の部分を埋める．実際に良い作用素論が対応することを 3 章で見る．残された「？」の部分はこれから考えたい問題である．

	$\Delta_T \geq 0$	$\Delta_T = 0$
Hardy 空間	contraction	isometry
Bergman 空間	Agler の理論の系	2-isometry
Dirichlet 空間	○	?

2 Dirichlet シフト

D を Dirichlet シフトとする. すなわち，D は $\mathcal{D}$ 上で z を掛ける作用素である．$\|D\| = \sqrt{2}$ and $\sigma(D) = \overline{\mathbb{D}}$ が知られている．また，P_0 を $\mathcal{D}$ から $\mathbb{C}$ の上への射影作用素とする.

定理 2.1 Δ_D は強収束し，$\Delta_D = P_0$.

注意 2.1 H^2 と T_z の場合，$I - T_z T_z^*$ は H^2 から $\mathbb{C}$ の上への射影作用素であった. 定理 2.1 はこの事実に対応している．同様な結果が他の再生核ヒルベルト空間でも知られている (see Arveson [2], Guo-Yang [3] and Yang-Zhu [7]).

さらに，$\mathcal{M}$ を D の閉不変部分空間とし，D を次のように上三角行列表示する．

$$D \cong \begin{pmatrix} R & * \\ 0 & S \end{pmatrix} \text{ on } \mathcal{D} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^{\perp}.$$

定理 2.2 Δ_R, Δ_S はともに強収束し，$\Delta_R, \Delta_S \geq 0$.

注意 2.2 $P_{\mathcal{M}^\perp}$ を $\mathcal{M}^\perp$ の上への射影作用素とすると，$\Delta_S = P_{\mathcal{M}^\perp}\Delta_D P_{\mathcal{M}^\perp} = P_{\mathcal{M}^\perp}P_0 P_{\mathcal{M}^\perp}$ も示すことができる．このように Δ_S の構造は単純である．この事実はやはり H^2 の場合と対応している．その一方，Δ_R の方は複雑である．例えば，$\mathcal{M} = z\mathcal{D}$ とする．すなわち，$\mathcal{M}$ は z により生成される $\mathcal{D}$ の不変部分空間である．このとき，$n \geq 1$ に対し，

$$\begin{aligned}
\Delta_R z^n &= (I + d_1 RR^* + \cdots + d_{n-1}R^{n-1}R^{*n-1})z^n \\
&= (I + d_1 D(I-P_0)D^* + \cdots + d_{n-1}D^{n-1}(I-P_0)D^{*n-1})z^n \\
&= (I + d_1 DD^* + \cdots + d_{n-1}D^{n-1}D^{*n-1})z^n \\
&= (1 + d_1\frac{n+1}{n} + \cdots + d_{n-1}\frac{n+1}{2})z^n \\
&= -(n+1)d_n z^n.
\end{aligned}$$

従って，z^n は Δ_R の固有値 $-(n+1)d_n$ に対する固有関数である．これは Δ_R のスペクトル分解を与える．すなわち，Δ_R はコンパクトである．一般の $\mathcal{M}$ については次のことが知られている．

- $\dim(\mathcal{M} \ominus R\mathcal{M}) = 1$ (Richter-Shields [6])
- $\mathcal{M} \ominus R\mathcal{M}$ は R に関する巡回ベクトルからなる (Richter [5]).

3 Dirichlet contractions

2 章の結果により，次の様に定義を与えてもよかろう．

定義 3.1 T をヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の有界線型作用素とする．

$$\Delta_T = \sum_{n\geq 0} d_n T^n T^{*n}$$

が強収束し，$\Delta_T \geq 0$ であるとき，T を Dirichlet contraction と呼ぶ．

定理 3.1 $\|T\| \leq 1$ ならば T は Dirichlet contraction である．さらにこのとき，

(i) Δ_T は作用素ノルムで収束する，

(ii) $\ker \Delta_T = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{f \in \mathcal{H} : \|T^{*n}f\| = \|f\|\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \ker(I - T^n T^{n*})$,

(iii) $\Delta_T = 0$ となる必要十分条件は T^* は等距離作用素である．

定理 3.2 T を Dirichlet contraction とする．このとき，

(i) $\ker(I - \Delta_T) = \mathcal{H} \ominus T\mathcal{H}$,

(ii) $0 \le \Delta_T \le I$,

(iii) $\mathcal{H} \ominus T\mathcal{H} \ne \{0\} \Rightarrow \|\Delta_T\| = 1$.

定理 3.3 T を Dirichlet contraction とするとき,

$$\sum_{n \ge 0} a_n \|T^{*n} x\|^2 < +\infty \quad (\forall x \in \mathcal{V})$$

を満たす $\mathcal{H}$ の稠密な部分空間 $\mathcal{V}$ が存在するならば $VT^* = D^* V$ を満たす等距離作用素 $V : \mathcal{H} \to \mathcal{D} \otimes \overline{\mathrm{ran}} \Delta_T$ が存在する.

系 3.1 (von Neumann's inequality) 定理 3.3 の仮定の下,

$$\|p(T)\| \le \|p\|_{\mathrm{mult}} \quad (p \in \mathbb{C}[z]),$$

ここで $\|p\|_{\mathrm{mult}}$ は p の multiplier ノルムを表す.

注意 3.1 $\|T\| < 1$ の場合, 定理 3.3 は Agler の理論の一つの系である (Theorem 14.43 in [1]).

参考文献

[1] J. Agler and J. E. McCarthy, *Pick interpolation and Hilbert function spaces*, Graduate Studies in Mathematics, 44. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[2] W. Arveson, *Subalgebras of* C**-algebras* III: *Multivariable operator theory*, Acta Math. **181** (1998), no. 2, 159–228.

[3] K. Guo and R. Yang, *The core function of submodules over the bidisk*, Indiana Univ. Math. J. **53** (2004), no. 1, 205–222.

[4] S. Richter, *Unitary equivalence of invariant subspaces of Bergman and Dirichlet spaces*, Pacific J. Math. **133** (1988), no. 1, 151–156.

[5] S. Richter, *Invariant subspaces of the Dirichlet shift*, J. reine angew. Math. **386** (1988), 205–220.

[6] S. Richter and A. Shields, *Bounded analytic functions in the Dirichlet space*, Math. Z. **198** (1988), no. 2, 151–159.

[7] R. Yang and K. Zhu, *The root operator on invariant subspaces of the Bergman space*, Illinois J. Math. **47** (2003), no. 4, 1227–1242.

L^2 空間と H^2 空間上のスラント Toeplitz 作用素のスペクトル

信州大学総合工学系研究科　　倉橋　宏至 (Hiroshi Kurahashi)

単位円上の L^2 空間におけるスラント Toeplitz 作用素 U_φ は, M.C. Ho や S.C. Arora and R. Batra, 武村吉光氏によって幅広く研究されている. また, H^2 空間におけるスラント Toeplitz 作用素 V_φ については, Arora and Batra, 黒野龍也氏が性質を調べている ([1]〜[8]). ここでは, $\varphi = z^m + cz^n$ のときについて, U_φ , V_φ のスペクトルの形はどうなるかを調べてみた.

1　スペクトルの定義

X を Hilbert 空間とし, T を X 上の有界線形作用素とする. このとき, T の**スペクトル** $\sigma(T)$, **スペクトル半径** $r(T)$ は,

$$\sigma(T) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ が可逆でない}\right\}$$
$$r(T) = \sup\left\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\right\}$$

と定義される. ここで, I は X 上の恒等作用素である. スペクトル $\sigma(T)$ は, つねに $\mathbb{C}$ の有界閉集合になる. また, $\sigma(T)$ の部分集合に, 次のようなものがある.

①**点スペクトル**　: $\sigma_p(T) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(\lambda I - T) \neq \{0\}\right\}$

②**近似点スペクトル**　: $\sigma_{ap}(T) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : {}^\exists \{x_n\} \subset X \text{ s.t } \begin{cases} \|x_n\| = 1 \\ \|(\lambda I - T)x_n\| \to 0 \end{cases}\right\}$

ここで, $\ker(\lambda I - T)$ は, 作用素 $\lambda I - T$ の核を表す. $\sigma_{ap}(T)$ は有界閉集合で, $\sigma_p(T) \subset \sigma_{ap}(T) \subset \sigma(T)$ が成り立つ.

2　スラント Toeplitz 作用素

$\mathbb{T}$ を $\mathbb{C}$ の単位円とし, μ を $\mathbb{T}$ 上の正規化された 1 次元 Lebesgue 測度とする. μ に関して 2 乗可積分な複素数値関数全体からなる Hilbert 空間を $L^2(\mathbb{T})$ で表す. 各整数 n に対して, $\mathbb{T}$ 上の関数 z^n を, $z^n(\zeta) = \zeta^n \quad (\zeta \in \mathbb{T})$ と定めると, $\{z^n : n = 0, \pm1, \pm2, \cdots\}$ は $L^2(\mathbb{T})$ の完全正規直交系になる.

次に,

$$H^2(\mathbb{T}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{T}) : \int_{\mathbb{T}} f z^n d\mu = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) e^{in\theta} d\theta = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots) \right\}$$

とおく．このとき, $H^2(\mathbb{T})$ は $L^2(\mathbb{T})$ の閉部分空間になる．また, $\{z^n : n = 0, 1, 2, \cdots\}$ は $H^2(\mathbb{T})$ の完全正規直交系になる．ここで, $L^2(\mathbb{T})$ から $H^2(\mathbb{T})$ への射影作用素を P とおく．

次に, μ に関して本質的有界な複素数値関数全体の Banach 環を $L^\infty(\mathbb{T})$ で表す．また,

$$H^\infty(\mathbb{T}) = L^\infty(\mathbb{T}) \cap H^2(\mathbb{T})$$

とおく．

いま, $k = 2, 3, \cdots$ とし, W_k を,

$$W_k z^n = \begin{cases} z^{\frac{n}{k}} & (n \text{ が } k \text{ の倍数のとき }) \\ 0 & (n \text{ が } k \text{ の倍数でないとき }) \end{cases}$$

によって定められる $L^2(\mathbb{T})$ 上の有界線形作用素とする．

次に, $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ を固定する．このとき, **$L^2(\mathbb{T})$ 上の k 次スラント Toeplitz 作用素** U_φ は, 上の作用素 W_k を用いて,

$$U_\varphi f = W_k(\varphi f)$$

と定義する．

ここで, $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T})$ だから, $\varphi = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ と表せる．このとき, U_φ の表現行列は,

$$\begin{pmatrix} & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & a_k & \cdots & a_{-2k+1} & a_{-2k} & a_{-2k-1} & \cdots & a_{-3k} & \cdots \\ \cdots & a_0 & \cdots & a_{-k+1} & a_{-k} & a_{-k-1} & \cdots & a_{-2k} & \cdots \\ \cdots & a_k & \cdots & a_1 & a_0 & a_{-1} & \cdots & a_{-k} & \cdots \\ \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{k+1} & a_k & a_{k-1} & \cdots & a_0 & \cdots \\ \cdots & a_{3k} & \cdots & a_{2k+1} & a_{2k} & a_{2k-1} & \cdots & a_k & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}$$

となる．この行列は, 成分が斜めに傾いているので, U_φ を<u>スラント</u>Toeplitz 作用素と呼ぶようである．以上の議論で, $k = 1$ の場合は, $k = 2, 3, \cdots$ のときと比べて, 様子が異なる．そのため, ここでは $k = 1$ の場合を除外し, $k = 2, 3, \cdots$ としている．

続いて, $L^2(\mathbb{T})$ から $H^2(\mathbb{T})$ への射影作用素を P とおく．このとき, **$H^2(\mathbb{T})$ 上の k 次スラント Toeplitz 作用素** V_φ は,

$$V_\varphi f = W_k P(\varphi f)$$

と定義する．先ほどと同様にして, V_φ の表現行列は,

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots & a_{-k} & \cdots \\ a_k & a_{k-1} & a_{k-2} & \cdots & a_0 & \cdots \\ a_{2k} & a_{2k-1} & a_{2k-2} & \cdots & a_k & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}$$

となる．

3　知られた結果

Ho は, $k=2$ の場合について $L^2(\mathbb{T})$ 上のスラント Toeplitz 作用素 U_φ の性質を調べている ([1]〜[3]). また, Arora and Batra は, 一般の k について $L^2(\mathbb{T})$ 上のスラント Toeplitz 作用素 U_φ , $H^2(\mathbb{T})$ 上のスラント Toeplitz 作用素 V_φ の性質を調べている ([4]〜[6]). そこでは, U_φ についてスペクトル半径の値を求める公式が, 次のように分かっている.

定理 A　$\psi_n = \overbrace{W_k(\cdots W_k(W_k}^{n}\underbrace{(|\varphi|^2)|\varphi|^2)\cdots|\varphi|^2)}_{n}$ とおくと, $r(U_\varphi) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\|\psi_n\|_\infty}$

しかし, V_φ についてのスペクトル半径の値を求める公式はなく, 次のことしか分かっていない.

定理 A′　$\varphi \in H^\infty(\mathbb{T})$ または $\overline{\varphi} \in H^\infty(\mathbb{T})$ ならば $r(V_\varphi) = r(U_\varphi)$.

U_φ のスペクトルに関しては武村氏が次の定理 B, C を, V_φ のスペクトルに関しては黒野氏が定理 B′, C′ を, それぞれ証明した ([7]〜[8]).

定理 B　$|\varphi| = 1$ a.e. のとき,

$$\begin{aligned} \sigma(U_\varphi) = \sigma_{ap}(U_\varphi) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le 1\} \\ \sigma_p(U_\varphi) &\supset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\} \end{aligned}$$

である.

定理 B′　$|\varphi| = 1$ a.e. , $\overline{\varphi} \in H^\infty(\mathbb{T})$ のとき,

$$\begin{aligned} \sigma(V_\varphi) = \sigma_{ap}(V_\varphi) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le 1\} \\ \sigma_p(V_\varphi) &\supset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\} \end{aligned}$$

である.

定理 C　$\varphi = z^m$ (m : 整数) とする.

(i) m が $k-1$ の倍数でない場合, $\sigma_p(U_\varphi) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$

(ii) m が $k-1$ の倍数の場合, $\sigma_p(U_\varphi) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\} \cup \{1\}$

定理 C′　$\varphi = z^m$ (m : 整数) とする.

(i) $m < 0$ の場合, または $m \ge 0$ かつ m が $k-1$ の倍数でない場合, $\sigma_p(U_\varphi) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$

(ii) $m \ge 0$ かつ m が $k-1$ の倍数の場合, $\sigma_p(U_\varphi) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\} \cup \{1\}$

一般の $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ に対して, $\sigma(U_\varphi)$, $\sigma(V_\varphi)$ の形は分かっていないようである. このことについて Ho は, $\sigma(U_\varphi)$ に関して "$\sigma(U_\varphi) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le r(U_\varphi)\}$ となるのでは?" と予想しており, 上にあげた定理はその結果を支持している.

さて, 上にあげた定理は, $|\varphi| = 1$ a.e. の場合を扱っている. そこで, $|\varphi| = 1$ a.e. でない場合について, 具体例を挙げて考えることにした.

4　得られた結果

ここでは, $\varphi = z^m + cz^n$ という関数を取り上げ, $\sigma(U_\varphi)$, $\sigma(V_\varphi)$ を考えた. その結果, この関数でも Ho の予想は成り立つことが分かった.

定理 1　$\varphi = z^m + cz^n$　$(m, n : m > n$ を満たす整数, $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$ のとき,

$$\sigma(U_\varphi) = \sigma_{ap}(U_\varphi) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \sqrt{1+|c|^2}\right\}$$
$$\sigma_p(U_\varphi) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < \sqrt{1+|c|^2}\right\}$$

定理 2　$\varphi = z^m + cz^n$　$(m, n : m > n$ を満たす整数, $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$ のとき,

$$\sigma(V_\varphi) = \sigma_{ap}(V_\varphi) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \sqrt{1+|c|^2}\right\}$$
$$\sigma_p(V_\varphi) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < \sqrt{1+|c|^2}\right\}$$

参考文献

[1] M. C. Ho, *Adjoints of slant Toeplitz operators*, Integral Equations Operator Theory, **29** (1997), 301–312.

[2] M. C. Ho, *Properties of slant Toeplitz operators*, Indiana Univ. Math. J., **45** (1996), 843–862.

[3] M. C. Ho, *Spectra of slant Toeplitz operators with continuous symbols*, Michigan Math. J., **44** (1997), 157–166.

[4] S. C. Arora and R. Batra, *On generalized slant Toeplitz operators with continuous symbols*, Yokohama Math. J., **51** (2004), 1–9.

[5] S. C. Arora and R. Batra, *Spectra of generalized slant Toeplitz operators*, Analysis and Applications, Allied Publ, New Delhi, 2004, 43–56.

[6] R. Batra, *Generalized slant Toeplitz operators*, Thesis. Univ. of Delhi. 2004.

[7] 武村 吉光, L^2 空間上のスラント Toeplitz 作用素のスペクトル, 修士論文 (信州大), 2007.

[8] 黒野 龍也, $H^2(\mathbb{T})$ 上のスラント Toeplitz 作用素のスペクトル, 修士論文 (信州大), 2008.

L^2 空間上の合成作用素を含むある関係式とその応用

九州大学大学院数理学府　　濱田　裕康 (Hiroyasu Hamada)

1　はじめに

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を σ 有限測度空間とする．$a \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu) = L^\infty(\Omega)$ に対して，掛け算作用素 $M_a : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ を，$f \in L^2(\Omega)$ に対して $M_a f = af$ と定義する．掛け算作用素から生成される C^* 環については，次の事実がよく知られている．

事実 1 (well-known)．　(1) $\{M_a \,|\, a \in L^\infty(\Omega)\} \cong L^\infty(\Omega)$.

(2) さらに Ω がコンパクトハウスドルフ空間であるとすると，$\{M_a \,|\, a \in C_b(\Omega)\} \cong C(\Omega)$.

ここでは，さらに合成作用素 C_φ を加え，掛け算作用素と合成作用素から生成される C^* 環はどのような環かという問題を考える．このために，まず掛け算作用素と合成作用素の交換関係を調べる必要がある．

次の節で，掛け算作用素と合成作用素のある交換関係について考察する．この応用として，第 3 節で R が次数 2 以上の有理関数，Ω を R の Julia 集合，μ を R の Lyubich 測度とした場合の結果を述べることにする．

2　合成作用素とある関係式

まずは L^p 空間上の合成作用素の定義と有界性の特徴付けについて述べる．$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を σ 有限測度空間とし，$\varphi : \Omega \to \Omega$ を可測とする．$E \in \mathcal{F}$ に対して $\mu(E) = 0$ ならば，$\mu\varphi^{-1}(E) = 0$ が成り立つとき，φ は非特異であるという．ただし，$\mu\varphi^{-1}(E) := \mu(\varphi^{-1}(E))$ である．

$1 \leq p \leq \infty$ であり，φ が非特異であるとする．$f \in L^p(\Omega)$ に対して，$C_\varphi f = f \circ \varphi$ とおく．φ が非特異であることから，$C_\varphi f$ は well-defined に定まる．

C_φ の有界性に関して次の定理が知られている．

定理 2 (例えば Singh-Manhas [10])．$1 \leq p < \infty$ であり，φ が非特異であるとする．このとき，次は同値である．

(1) $C_\varphi : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$ は有界である．

(2) $M > 0$ が存在して，任意 $E \in \mathcal{F}$ に対して $\mu\varphi^{-1}(E) \leq M\mu(E)$ が成立する．

定義. 上記で定めた C_φ を合成作用素と呼ぶ.

定理2から，ある $1 \le p_0 < \infty$ で $L^{p_0}(\Omega)$ 上の合成作用素 C_φ が有界であれば，任意の $1 \le p < \infty$ で $L^p(\Omega)$ 上の合成作用素 C_φ は有界である．また $p = \infty$ のときは，φ が非特異であれば，$L^\infty(\Omega)$ 上の合成作用素 C_φ は，定義よりいつでも有界である．

次に合成作用素の具体例をあげる．

例. $\varphi : \Omega \to \Omega$ を保測変換とする．つまり，$E \in \mathcal{F}$ に対して $\mu\varphi^{-1}(E) = \mu(E)$ とする．このとき，$1 \le p < \infty$ に対して $C_\varphi : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$ は等距離作用素である．

例 (Nordgren [9]). $\mathbb{T} = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta| = 1\}$，$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ とおく．$\Omega = \mathbb{T}$ として，μ を $\mathbb{T}$ 上の正規化された Lebesgue 測度 m とする．また $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ を内関数とする．このとき動径極限値を取ることで $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ が定義される．$m\varphi^{-1}$ の m に関する Radon-Nikodym 微分は

$$\frac{dm\varphi^{-1}}{dm} = P_{\varphi(0)}$$

となる．ただし，

$$P_{\varphi(0)}(\zeta) := \frac{1 - |\varphi(0)|^2}{|\zeta - \varphi(0)|^2}, \quad \zeta \in \mathbb{T}$$

である．ここで，

$$P_{\varphi(0)}(\zeta) \le \frac{1 + |\varphi(0)|}{1 - |\varphi(0)|}$$

より，$C_\varphi : L^p(\mathbb{T}) \to L^p(\mathbb{T})$ は有界である．

C_φ を含むある交換関係を考察する前に，まずは $C_\varphi : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ が有界のときの $C_\varphi^* C_\varphi$ について述べる．

命題 3 (例えば Singh-Manhas [10]). $C_\varphi : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ が有界とする．このとき

$$h_\varphi = \frac{d\mu\varphi^{-1}}{d\mu}$$

とおくと，

$$C_\varphi^* C_\varphi = M_{h_\varphi}$$

が成り立つ．

さらに複雑な場合として，$a \in L^\infty(\Omega)$ に対して $C_\varphi^* M_a C_\varphi$ という形の作用素を考察する．$a = 1$ とすると，

$$C_\varphi^* M_a C_\varphi = C_\varphi^* C_\varphi = M_{h_\varphi}$$

となり，これは命題3そのものである．

注意. 上記の問題は荷重合成作用素がいつ等距離作用素になるかという問題に関連し，重要であると思われる．実際，$b \in L^\infty(\Omega)$ に対して，$M_b C_\varphi$ は荷重合成作用素であり，

$$(M_b C_\varphi)^* (M_b C_\varphi) = C_\varphi^* M_b^* M_b C_\varphi = C_\varphi^* M_{\overline{b}} M_b C_\varphi = C_\varphi^* M_{\overline{b}b} C_\varphi = C_\varphi^* M_{|b|^2} C_\varphi$$

となる．

上記の問題を考察するために，Perron-Frobenius 作用素 (あるいは transfer 作用素，Ruelle 作用素など) と呼ばれる作用素について述べる．$\varphi : \Omega \to \Omega$ を非特異とする．$f \in L^1(\Omega)$ に対して，Radon-Nikodym の定理より $\mathcal{L}_\varphi f \in L^1(\Omega)$ が存在して，

$$\int_E (\mathcal{L}_\varphi f) d\mu = \int_{\varphi^{-1}(E)} f d\mu, \quad E \in \mathcal{F}$$

が成り立つ．さらに $\mathcal{L}_\varphi : L^1(\Omega) \to L^1(\Omega)$ は有界であることが示せる．

定義. $\mathcal{L}_\varphi$ を Perron-Frobenius 作用素 (あるいは transfer 作用素，Ruelle 作用素など) と呼ぶ.

合成作用素と Perron-Frobenius 作用素の関係の一つとして，次の補題が成り立つ．$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を有限測度空間の場合に考察していることに注意する．

補題 4. $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を有限測度空間とし，$C_\varphi : L^1(\Omega) \to L^1(\Omega)$ を有界とする．このとき $\mathcal{L}_\varphi : L^\infty(\Omega) \to L^\infty(\Omega)$ は有界であり，$C_\varphi^* = \mathcal{L}_\varphi$ となる．

例. $(\Omega, \mu) = (\mathbb{T}, m)$ とし，$\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ を内関数とする．このとき，$L^1(\mathbb{T})$ あるいは $L^\infty(\mathbb{T})$ 上の作用素として $\mathcal{L}_\varphi = A_\varphi$ が成り立つ．ここで A_φ は Aleksandrov 作用素であり，これは

$$A_\varphi(f)(\alpha) = \int_{\mathbb{T}} f(\zeta) \mu_\alpha(\zeta), \quad \alpha \in \mathbb{T},\ f \in L^1(\mathbb{T})$$

で定義される．ただし μ_α は Aleksandrov-Clark 測度である．Aleksandrov-Clark 測度についての詳細は，例えば [2] を参照のこと．

$a \in L^\infty(\Omega)$ に対して，目標であった $C_\varphi^* M_a C_\varphi$ の形の作用素について考える．同じタイプの関係式が，φ が保測変換で特別な場合については Exel-Vershik [3] で，$(\Omega, \mu) = (\mathbb{T}, m)$ で $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ が内関数の場合は Jury [6] で考察されている．

命題 5. $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を有限測度空間，$C_\varphi : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ を有界とする．$L^2(\Omega)$ 上の作用素として，

$$C_\varphi^* M_a C_\varphi = M_{\mathcal{L}_\varphi(a)}, \qquad a \in L^\infty(\Omega)$$

が成り立つ．

証明. $f, g \in L^2(\Omega)$ に対して，

$$\begin{aligned}
\langle C_\varphi^* M_a C_\varphi f, g \rangle &= \langle M_a C_\varphi f, C_\varphi g \rangle \\
&= \int_\Omega a(\omega) f(\varphi(\omega)) \overline{g(\varphi(\omega))} d\mu(\omega) \\
&= \int_\Omega a(\omega) (C_\varphi(f\overline{g}))(\omega) d\mu(\omega) \quad (C_\varphi \text{は} L^1(\Omega) \text{上の作用素}) \\
&= \int_\Omega (\mathcal{L}_\varphi(a)) f(\omega) \overline{g}(\omega) d\mu(\omega) \quad (L^\infty(\Omega) \text{上の作用素として} C_\varphi^* = \mathcal{L}_\varphi) \\
&= \int_\Omega (M_{\mathcal{L}_\varphi(a)} f)(\omega) \overline{g}(\omega) d\mu(\omega) \quad (\mathcal{L}_\varphi(a) \in L^\infty(\Omega)) \\
&= \langle M_{\mathcal{L}_\varphi(a)} f, g \rangle
\end{aligned}$$

より，この命題が従う． □

3　関係式の応用

命題 5 の応用として，掛け算作用素と合成作用素から生成される C^* 環の解析を行う．

これまで [4, 5] で R を有限 Blaschke 積の場合の Hardy 空間上の Toeplitz 作用素 T_z と合成作用素 C_R から生成される C^* 環 $\mathcal{TC}_R$ について考察を行った．Toeplitz 作用素 T_z を掛け算作用素 M_z と置き換え，Hardy 空間上の合成作用素 C_R を $L^2(\mathbb{T})$ 上の合成作用素 C_R に置き換えることによって，同様の結果を得ることができる．

つまり，R が有限 Blaschke 積のとき，$\Omega = \mathbb{T}$ で $\mu = m$ とするとき

$$C^*(M_a, C_R \,|\, a \in C(\mathbb{T})\,) = C^*(M_z, C_R)$$

の構造は，[4, 5] で考察した環 $\mathcal{OC}_R$ と同様の構造を持つ．

今回は次の場合を考察する．R が次数 2 以上の有理関数とする．Ω として R の Julia 集合 J_R，μ として R に対する Lyubich 測度 μ^L を考える．このとき

$$C^*(M_a, C_R \,|\, a \in C(J_R))$$

を考察したい．

まず上記で用いた複素力学系の言葉を説明する．詳しくは例えば Beardon [1] を参照のこと．R を有理関数とし，$R = P/Q$ と書く．ただし多項式 P と Q は，これ以上約分できないものとする．R の次数を $\deg R = \max\{\deg P, \deg Q\}$ と定める．有理関数 R を Riemann 球面 $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ から，それ自身の写像とみなす．

定義. R の Fatou 集合 F_R とは，$\{R^{\circ m}\}_{m=1}^{\infty}$ がその上で同程度連続 (あるいは正規族) になる $\widehat{\mathbb{C}}$ の最大の開集合のことである．ただし $R^{\circ m}$ は R の m 回合成を意味する．また $J_R := \widehat{\mathbb{C}} \setminus F_R$ とおき，R の Julia 集合と呼ぶ．

直感的な説明をすれば，Fatou 集合はその上で $\{R^{\circ m}\}_{m=1}^{\infty}$ が安定的な振る舞いをする部分であり，Julia 集合はその上で $\{R^{\circ m}\}_{m=1}^{\infty}$ が不安定な振る舞いをする部分である．また R の次数が 2 次以上であれば，Juia 集合 J_R は空でないことが知られている．ここでは R の次数が 2 以上の場合について考察する．Julia 集合 J_R は完全不変である，つまり $R(J_R) = J_R = R^{-1}(J_R)$ であることが知られている．したがって有理関数 R を，$R : J_R \to J_R$ とみなすこともできる．

$z \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対して，z の後方軌道が有限になるとき，z を R の例外点と言い，その全体を E_R と書く．Lyubich 測度は以下のように定義される．

定義. n を有理関数 R の次数とし，δ_z を $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ における Dirac 測度とする．$w \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus E_R$ と $m \in \mathbb{N}$ に対して，$\widehat{\mathbb{C}}$ 上の確率測度 μ_m^w を，

$$\mu_m^w = \frac{1}{n} \sum_{z \in (R^{\circ m})^{-1}(w)} e_{R^{\circ m}}(z) \delta_z$$

と定める．ただし，$e_{R^{\circ m}}(z)$ は $R^{\circ m}$ の z における分岐指数である．$\{\mu_m^w\}_{m=1}^{\infty}$ は μ^L に弱収束する．μ^L を Lyubich 測度と呼ぶ．μ^L は $w \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus E_R$ の取り方によらずに決まることに注意する．

今回の話で重要な Lyubich 測度の性質は，以下の通りである．

命題 6 (Lyubich [8]). Lyubich 測度 μ^L は次の性質を満たす.

(1) $\widehat{\mathbb{C}}$ 上の確率測度である.

(2) J_R 上に台を持つ.

(3) R-不変測度である．つまり Borel 集合 $E \subset \widehat{\mathbb{C}}$ に対して $\mu^L(R^{-1}(E)) = \mu^L(E)$ が成り立つ.

この命題から $C_R : L^2(J_R, \mathcal{B}(J_R), \mu^L) \to L^2(J_R, \mathcal{B}(J_R), \mu^L)$ は等距離作用素であることが従う. ただし $\mathcal{B}(J_R)$ は J_R の Borel σ 集合族である.

例. $n \geq 2$ とし $R(z) = z^n$ を考える．このとき $J_R = \mathbb{T}$, $\mu^L = m$ である.

測度空間を $(J_R, \mathcal{B}(J_R), \mu^L)$ とした設定で，Perron-Frobenius 作用素を $C(J_R)$ に制限した作用素を具体的に記述できることが知られている.

補題 7 (Lyubich [8]). R を次数 n が 2 以上の有理関数とする．このとき，$\mathcal{L}_R : C(J_R) \to C(J_R)$ であり,

$$(\mathcal{L}_R a)(w) = \frac{1}{n} \sum_{z \in R^{-1}(w)} e_R(z) a(z), \quad a \in C(J_R)$$

となる.

次の定理が今回の主定理である．掛け算作用素 M_a と合成作用素 C_R という具体的な作用素から構成された C^* 環 $C^*(M_a, C_R \,|\, a \in C(J_R))$ が，交換関係から決まるある C^* 環 $\mathcal{O}_R(J_R)$ に同型であることを示している.

定理 8. R を次数 2 以上の有理関数とする．$a \in C(J_R)$ に対して，$L^2(J_R, \mathcal{B}(J_R), \mu^L)$ 上の掛け算作用素 M_a と合成作用素 C_R を考える．このとき

$$C^*(M_a, C_R \,|\, a \in C(J_R)) \cong \mathcal{O}_R(J_R)$$

が成り立つ.

$\mathcal{O}_R(J_R)$ は Kajiwara-Watatani [7] によって定義された複素力学系に付随する C^* 環である．この環について，以下で説明する.

定義. R を次数 n の有理関数とする．$A = C(J_R)$ とし，$X_R(J_R) = C(J_R)$ とおく．$X_R(J_R)$ に A 上の Hilbert 双加群の構造を以下で定める．$a, b \in A$ と $\xi, \eta \in X_R(J_R)$ に対して,

$$(a \cdot \xi \cdot b)(z) = a(z)\xi(z)b(R(z)),$$
$$\langle \xi, \eta \rangle_A(w) = \mathcal{L}_R(\overline{\xi}\eta)(w) \quad \left(= \frac{1}{n} \sum_{z \in R^{-1}(w)} e_R(z)\overline{\xi(z)}\eta(z) \right).$$

定義. $\mathcal{O}_R(J_R)$ を $X_R(J_R)$ から作られる Cuntz-Pimsner 環とする．つまり $\mathcal{O}_R(J_R)$ は，次の関係式を満たす A と $\{S_\xi \,|\; \xi \in X_R(J_R)\}$ で生成される普遍的な C^* 環である.

(1) $a, b \in A$ と $\xi, \eta \in X_R(J_R)$ に対して，

$$S_{a\cdot\xi\cdot b} = aS_\xi b, \quad S_{\xi+\eta} = S_\xi + S_\eta, \quad S_\xi^* S_\eta = \langle \xi, \eta \rangle_A.$$

(2) $a \in J_{X_R(J_R)}$ に対して，

$$\sum_{i=1}^{\infty} aS_{u_i}S_{u_i}^* = a.$$

ただし，$\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ は $X_R(J_R)$ の可算基底であり，$J_{X_R(J_R)} = \{a \in A \,|\, a$ は R の分岐点上で消える $\}$ と定めている．

参考文献

[1] A. F. Beardon, *Iteration of rational functions*, Complex analytic dynamical systems, Graduate Texts in Mathematics, 132, Springer-Verlag, New York, 1991.

[2] J. A. Cima, A. L. Matheson and W. T. Ross, *The Cauchy transform*, Mathematical Surveys and Monographs, 125, American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.

[3] R. Exel and A. Vershik, *C^*-algebras of irreversible dynamical systems*, Canad. J. Math. **58** (2006), 39–63.

[4] H. Hamada, *Quotient algebras of Toeplitz-composition C^*-algebras for finite Blaschke products*, arXiv:1110.4426.

[5] H. Hamada and Y. Watatani, *Toeplitz-composition C^*-algebras for certain finite Blaschke products*, Proc. Amer. Math. Soc. **138** (2010), 2113–2123.

[6] M. T. Jury, *Completely positive maps induced by composition operators*, preprint.

[7] T. Kajiwara and Y. Watatani, *C^*-algebras associated with complex dynamical systems*, Indiana Math. J. **54** (2005), 755–778.

[8] M. J. Lyubich, Entropy properties of rational endomorphisms of the Riemann sphere. Ergodic Theory Dynam. Systems **3** (1983), 351–385.

[9] E. A. Nordgren, *Composition operators*, Canad. J. Math. **20** (1968), 442–449.

[10] R. K. Singh and J. S. Manhas, *Composition operators on function spaces*, North-Holland Mathematics Studies, 179, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1993.

Graduate School of Mathematics, Kyushu University, Motooka, Fukuoka, 819-0395, Japan.
email address: h-hamada@math.kyushu-u.ac.jp

関数環上の実線形等距離写像の構造

山形大学　　三浦　毅 (Takeshi Miura)

1　等距離写像

等距離写像の研究は関数解析学創成期以来の古典的問題といえるが，この十年程盛んになされてきた Banach 環の間のスペクトルを保存する写像の研究と自然な形で融合され，等距離写像の研究は近年ますます発展している．歴史的には複素線形等距離写像の構造は案外古くから知られている．例えば Nagasawa [8] と de Leeuw, Rudin and Wermer [2] は独立に，関数環の間の全射複素線形等距離写像を調べている．当時の研究としては，複素線形写像を調べることは当然といえるかもしれないが，より一般に線形性を仮定せずに全射等距離写像について調べようとすると，Mazur-Ulam [6] の定理により，必然的に**実線形**写像を考察することが必要となる．

Theorem 1 (Mazur-Ulam theorem [6]) N, M をノルム空間とする．$T\colon N \to M$ が全射等距離写像ならば，$T - T(0)$ は実線形である．

Mazur-Ulam の定理は Väisälä [11] によって非常に簡単な証明が与えられた．Mazur-Ulam の定理だけでなく Väisälä の用いた手法が，近年の等距離写像の研究に多大な影響を与えているように感じられる．

Ellis [1] は Mazur-Ulam の定理に言及してはいないが，Nagasawa [8], de Leeuw, Rudin and Wermer [2] の結果を実線形写像の場合に拡張した．より正確には次の通りである．

Theorem 2 (Ellis [1]) A をコンパクト *Hausdorff* 空間 X 上の関数環とし，M をコンパクト *Hausdorff* 空間 Y 上の関数空間，つまり M は $C(Y)$ の複素線形部分空間であり，さらに定数を含み Y の点を分離する，とする．もしさらに X, Y がそれぞれ A, M の *Shilov* 境界であるならば，全射実線形等距離写像 $T\colon A \to M$ に対して

$$T(f)(y) = \begin{cases} T(1)f(\varphi(y)) & y \in K \\ T(1)\overline{f(\varphi(y))} & y \in Y \setminus K \end{cases} \qquad (\forall f \in A)$$

を満たすような開かつ閉集合 $K \subset Y$ 及び同相写像 $\varphi\colon Y \to X$ が存在する．

Ellis [1] の定理は定数関数 1（積に関する単位元）の存在を本質的に用いて証明されている．それでは単位元をもつとは限らない場合にも同様の特徴づけが得られるのか，は自然な問題であろう．実際，Tonev and Toneva [9] は上の問題に対する肯定的な結果を，ある条件のもとで，示している．また類似の研究が Tonev and Yates [10] によってなされているが，そこでも付加条件を課している．

本稿では局所コンパクト Hausdorff 空間上の関数環を考え，その間の全射実線形等距離写像の構造が解明されたことを報告する．

2 関数環上の等距離写像

K を局所コンパクト Hausdorff 空間とし，$C_0(K)$ により K 上で定義された複素数値連続関数で，さらに無限遠点で 0 になるもの全体を表す．このとき $C_0(K)$ は各点での和・積・スカラー倍と $\|f\|_\infty = \sup_{k\in K}|f(k)|$ に関して（積に関する単位元をもつとは限らない）可換 Banach 環となる．本稿では**局所コンパクト Hausdorff 空間 K 上の関数環** (function algebra on K) を次の意味で用いる：A が K 上の関数環であるとは，A は $C_0(K)$ の閉部分多元環であり，さらに K の点を強分離する（つまり $\forall k_1, k_2 \in K$: $k_1 \neq k_2$ に対して $0 \neq f(k_1) \neq f(k_2)$ をみたす $f \in A$ が存在する）ことである；特に K がコンパクトであり，さらに A が定数関数を含むとき，A を K 上の関数環 (uniform algebra on K) と呼ぶことが多いようである．

局所コンパクト Hausdorff 空間 K 上の関数環 A に対して，その双対空間を A^* で表す．点 $k \in K$ における点値汎関数が A^* の単位球の端点であるような k の全体を A の Choquet 境界といい $\mathrm{Ch}(A)$ で表す．Choquet 境界は Shilov 境界で稠密であることが知られている．

以上の準備のもと，関数環上の全射実線形等距離写像の構造定理は次のように述べられる．

Theorem 3 ([7]) *A, B をそれぞれ局所コンパクト Hausdorff 空間 X, Y 上の関数環とする．このとき全射実線形等距離写像 $T\colon A \to B$ に対して*

$$T(f)(y) = \begin{cases} w(y)f(\varphi(y)) & y \in K \\ w(y)\overline{f(\varphi(y))} & y \in \mathrm{Ch}(B)\setminus K \end{cases} \qquad (\forall f \in A)$$

を満たすような連続関数 $w\colon \mathrm{Ch}(B) \to \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ と開かつ閉集合 $K \subset \mathrm{Ch}(B)$ 及び同相写像 $\varphi\colon \mathrm{Ch}(B) \to \mathrm{Ch}(A)$ が存在する．

Remark 1 Mazur-Ulam の定理 (Theorem 1) と Theorem 3 から直ちに，関数環上の全射等距離写像の構造が分かる．

また $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ を半単純可換 Banach 環とし，$M_\mathcal{A}$, $M_\mathcal{B}$ をそれぞれ $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ の極大イデアル空間とするとき，スペクトル半径 $\mathrm{r}(\cdot)$ に関する全射等距離写像 $S\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$,

$$\mathrm{r}(S(a) - S(b)) = \mathrm{r}(a - b) \qquad (\forall a, b \in \mathcal{A})$$

の構造も Theorem 3 の系として得られる．実際，$\mathcal{A}$ の Gelfand 変換像 $\hat{\mathcal{A}}$ の $C_0(M_\mathcal{A})$ における閉包は $M_\mathcal{A}$ 上の関数環となることを用いて Theorem 3 を適用すればよい．

Theorem 3 の証明の概略 $T\colon A \to B$ が全射実線形等距離写像であることから，B^* から A^* への全射実線形等距離写像 T_* が定義できる．このとき B^* の単位球の端点は T_* によって A^* の単位球の端点に写されることが分かるので，この対応によって Choquet 境界の間の写像 φ が定義される．A^*, B^* の単位球の端点はその構造が良く知られている．実際，$\xi \in A^*$, $\|\xi\| = 1$ が A^* の単位球の端点であるための必要十分条件は，$\xi = \alpha e_x$ をみたす $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$ 及び $x \in \mathrm{Ch}(A)$ が存在することである（例えば [3] を参照）．このことを用いれば T が定理の形に表されることが示される．■

Remark 2 上で紹介した証明の概略は [7] によるものではなく，Koshimizu, M. and Takagi [5] で与えられた手法である．実際，[7] では複雑な議論を用いて定理を証明しているが，[5] では端点を利用することによって単純な議論で証明を与え，さらに Theorem 3 をより広い対象にまで拡張している．

Remark 3 Theorem 3 の φ は Choquet 境界の間の同相写像であるが，それは極大イデアル空間上にまで拡張できるかは自然な問題である．実際，執筆者自身も疑問に思い拡張を試みたが目的を達することができなかった．しかし最近，Hatori and M. [4] によって，Theorem 3 の φ が極大イデアル空間上には拡張できない例が与えられた．一方で φ は Choquet 境界の閉包である Shilov 境界には自然に拡張されることも示されている．

参考文献

[1] A.J. Ellis, *Real characterizations of function algebras amongst function spaces*, Bull. London Math. Soc. **22** (1990), 381–385.

[2] K. deLeeuw, W. Rudin and J. Wermer, *The isometries of some function spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **11** (1960), 694–698.

[3] R.J. Fleming and J.E. Jamison *Isometries on Banach Spaces: Function Spaces*, Chapman & Hall/CRC, 2003.

[4] O. Hatori and T. Miura, *Real linear isometries between function algebras. II*, preprint.

[5] H. Koshimizu, T. Miura and H. Takagi, *Real-linear isometries between subspaces of continuous functions*, preprint.

[6] S. Mazur and S. Ulam, *Sur les transformationes isométriques d'espaces vectoriels normés*, C. R. Acad. Sci. Paris **194** (1932), 946–948.

[7] T. Miura, *Real-linear isometries between function algebras*, Cent. Eur. J. Math., **9** (2011), 778–788.

[8] M. Nagasawa, *Isomorphisms between commutative Banach algebras with an application to rings of analytic functions*, Kōdai Math. Sem. Rep., **11** (1959), 182–188.

[9] T. Tonev and E. Toneva, *Composition operators between subsets of function algebras*, Function Spaces in Modern Analysis, Comtemp. Math., **547** (2010), 227–237

[10] T. Tonev and R. Yates, *Norm-linear and norm-additive operators between uniform algebras*, J. Math. Anal. Appl., **357** (2009), 45–53.

[11] J. Väisälä, *A proof of the Mazur-Ulam theorem*, Amer. Math. Monthly, **110-7** (2003), 633–635.

Integral type operators on H^∞

茨城大学工学部 細川 卓也 (Takuya Hosokawa)

1 Introduction

Let $\mathbb{D}$ be the open unit disk in the complex plane and let $H(\mathbb{D})$ be the space of all analytic functions on $\mathbb{D}$. The multiplication operator M_u is defined by $M_u f(z) = u(z)f(z)$ for $u \in H(\mathbb{D})$. Moreover we define the integral type operators I_u and J_u by

$$I_u f(z) = \int_0^z f'(\zeta)\, u(\zeta)\, d\zeta, \qquad J_u f(z) = \int_0^z f(\zeta)\, u'(\zeta)\, d\zeta.$$

Then we have that

$$(I_u + J_u) f(z) = M_u f(z) - u(0)f(0). \tag{1}$$

Denote the set of all bounded analytic functions on $\mathbb{D}$ by H^∞. Then H^∞ is a Banach algebra with the supremum norm

$$\|f\|_\infty = \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)|.$$

The boundedness and compactness of M_u on H^∞ is well-known.

Proposition 1.1 *Let $u \in H(\mathbb{D})$.*

(i) M_u is bounded on H^∞ if and only if $u \in H^\infty$. More precisely, we have the norm estimate: $\|M_u\|_{H^\infty} = \|u\|_\infty$.

(ii) M_u is compact on H^∞ if and only if $u \equiv 0$.

The proof of our results involves the Bloch space $\mathcal{B}$ and the little Bloch space $\mathcal{B}_o$. The Bloch space $\mathcal{B}$ consists of all $f \in H(\mathbb{D})$ such that

$$|||f||| = \sup_{z\in\mathbb{D}} (1 - |z|^2)|f'(z)| < \infty.$$

Then $|||\cdot|||$ is a complete semi-norm on $\mathcal{B}$ and is Möbius invariant. It is well known that $\mathcal{B}$ is a Banach space under the norm $\|f\|_{\mathcal{B}} = |f(0)| + |||f|||$. Note that $|||f||| \le \|f\|_\infty$ for $f \in H^\infty$, and hence $H^\infty \subset \mathcal{B}$. The little Bloch space $\mathcal{B}_o$ is the closed subspace of $\mathcal{B}$ consists of all $f \in H(\mathbb{D})$ such that

$$\lim_{|z|\to 1} (1 - |z|^2)|f'(z)| = 0.$$

$\mathcal{B}_o$ is the closure in B of the set of polynomials. See [3] for more information on the Bloch spaces.

2 Boundedness

We use the following lemma.

Lemma 2.1 *$I_u : H^\infty \to \mathcal{B}$ is bounded if and only if $u \in H^\infty$.*

The boundedness of I_u on H^∞ implies the boundedness of $I_u : H^\infty \to \mathcal{B}$. Using this fact and the relation (1), we have the following theorem.

Theorem 2.2 *Let $u \in H(\mathbb{D})$. Then the followings are equivalence.*

(i) M_u *is bounded on* H^∞.

(ii) I_u *is bounded on* H^∞.

(iii) J_u *is bounded on* H^∞.

(iv) $u \in H^\infty$.

3 Compactness

To study the compactness of I_u and J_u, we use the following lemma.

Lemma 3.1 (Weak Convergence Lemma) *Let X be H^∞ or $\mathcal{B}$, and let T be I_u or J_u. Suppose that $\{f_n\}$ is a bounded sequence in H^∞ such that f_n converges to 0 uniformly on every compact subset of $\mathbb{D}$. Then $T : H^\infty \to X$ is compact if and only if $T : H^\infty \to X$ is bounded and $\|Tf_n\|_X \to 0$.*

Involving the case of $I_u : H^\infty \to \mathcal{B}$, the compactness of I_u has been characterized as following:

Theorem 3.2 *Let $u \in H(\mathbb{D})$. Then the followings are equivalence.*

(i) $I_u : H^\infty \to H^\infty$ *is compact.*

(ii) $I_u : H^\infty \to \mathcal{B}$ *is compact.*

(iii) $u \equiv 0$.

Corollary 3.3 *Let $u \in H(\mathbb{D})$. Then the followings are equivalence.*

(i) M_u *is compact on* H^∞.

(ii) I_u *is compact on* H^∞.

(iii) $u \equiv 0$.

On the other hand, for every constant function $u \equiv c$, J_u is the zero operator, and it is compact. To get a necessary condition for J_u to be compact on H^∞, we consider the case of $J_u : H^\infty \to \mathcal{B}$.

Lemma 3.4 *$J_u : H^\infty \to \mathcal{B}$ is compact if and only if $u \in \mathcal{B}_o$.*

Recall that the function in the intersection of H^∞ and $\mathcal{B}_o$ is constant on each Gleason part (see [1, p.432]). Hence we denote $H^\infty \cap \mathcal{B}_o = \mathrm{COP}$ (constant on parts).

Proposition 3.5 *Let $u \in H(\mathbb{D})$. If J_u is compact on H^∞, then $u \in \mathrm{COP}$.*

参考文献

[1] J. B. Garnett, *Bounded Analytic Functions (revised first edition)*, Springer-Verlag, 2006.

[2] T. Hosokawa, *Integral type operators on H^∞*, preprint.

[3] K. Zhu, *Operator Theory in Function Spaces*, Dekker, New York, 1990; 2nd ed. by Amer. Math. Soc., Providence, 2007.

参 加 者 名 簿

氏名 (敬称略)	所　属
阿 部　敏 一	新潟大学 自然科学研究科
飯 田　安 保	岩手医科大学 共通教育センター
内 山　　 敦	山形大学 理学部
菊 池　万 里	富山大学 理工学研究部
倉 橋　宏 至	信州大学 総合工学系研究科
古清水 大直	信州大学 総合工学系研究科
齋 藤　洋 樹	東京理科大学 理学研究科 数学専攻
瀬 戸　道 生	島根大学 総合理工学部
武 嶋　利 直	信州大学 総合工学系研究科
鶴 見　和 之	東京電機大学
富 山　　 淳	東京都立大学 名誉教授
丹 羽　典 朗	日本大学 薬学部
羽 鳥　　 理	新潟大学 自然科学系 (理学部)
濱 田　裕 康	九州大学 数理学府
平 澤　　 剛	茨城大学 工学部
細 川　卓 也	茨城大学 工学部
三 浦　　 毅	山形大学 理工学研究科
嶺　幸 太 郎	筑波大学 数理物質科学研究科
渡 邉　恵 一	新潟大学 自然科学系 (理学部)