Proceedings of Conference on Function Algebras 2019

June 2020

2019年度の関数環研究集会は，日本大学理工学部船橋キャンパス・テクノプレース15を会場として，2019年11月29日（金）から12月1日（日）までの期間に開催されました．

今年度の関数環研究集会にも韓国から参加者がありました．また，オマーンの Sultan Qaboos University より，Shamil Makhmutov 教授が来日され，講演をしてくださいました．Shamil Makhmutov 教授は，北海道大学の林実樹廣先生のもとで学位を取られた方です．さらに，新潟大学の大学院生4名，信州大学の大学院生1名も講演をしてくださいました．今後も若手の研究者の講演者・参加者が増えていく事を期待しています．

関数環研究集会を開催していた2019年12月頃の新聞の国際面を観ると，中国の武漢市において，原因不明の肺炎が発生している記事が小さく載っています．その新型肺炎 COVID-19 が数か月後に，ここまで大きな問題になるとは想像もできませんでした．

講演者の方々から報告集原稿をお送りいただきましたので，それらを取りまとめて2019年度の関数環研究集会報告集とさせていただきます．完成が大変遅くなってしまった事をお詫びいたします．

開催責任者　丹羽　典朗 (日本大学・薬学部)

Conference on Function Algebras 2019

December 1 (Sun)

関数環に値をとる C^1 空間とその上の全射等距離写像
Surjective isometries on uniform algebra valued C^1 spaces

米子工業高等専門学校　古清水　大直
新潟大学理学部　三浦　毅

National Institute of Technology, Yonago College
Hironao Koshimizu

Department of Mathematics, Niigata University
Takeshi Miura

1　背景

ノルム空間 $(N, \|\cdot\|_N)$ 上で定義された写像 $T\colon N \to N$ に対し

$$\|T(f) - T(g)\|_N = \|f - g\|_N \qquad (\forall f, g \in N)$$

が成り立つとき，T を等距離写像という．$\mathbb{D}$ を複素平面の単位開円板とし，$H(\mathbb{D})$ を $\mathbb{D}$ 上の正則関数全体のなす線形空間とする．Hardy 空間

$$H^p = \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : \|f\|_p \stackrel{\text{def.}}{=} \sup_{0<r<1} \left[\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta \right]^{1/p} < \infty \right\} \qquad (1 \le p < \infty),$$

及び $H^\infty = \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : \|f\|_\infty \stackrel{\text{def.}}{=} \sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)| < \infty \right\}$ に対して，その上の複素線形等距離写像は 1960 年代に解明されている．

Theorem (deLeeuw, Rudin and Wermer [6]). *1.* T が $(H^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ 上の全射複素線形等距離写像であるための必要十分条件は，$\alpha \in \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ と等角写像 $\phi\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ が存在して

$$T(f)(z) = \alpha f(\phi(z)) \qquad (\forall f \in H^\infty,\, z \in \mathbb{D})$$

となることである．

2. T が $(H^1, \|\cdot\|_1)$ 上の全射複素線形等距離写像であるための必要十分条件は，$\alpha \in \mathbb{T}$ と等角写像 $\phi\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ が存在して

$$T(f)(z) = \alpha\phi'(z)f(\phi(z)) \qquad (\forall f \in H^1,\, z \in \mathbb{D})$$

となることである．

Theorem (Forelli [7])**.** p を $1 \le p < \infty, p \ne 2$ をみたす実数とする．T が $(H^p, \|\cdot\|_p)$ 上の（全射とは限らない）複素線形等距離写像であるための必要十分条件は，$F \in H^p$ と内部関数 $\phi\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ が存在して

$$T(f)(z) = F(z)f(\phi(z)) \qquad (\forall f \in H^p,\, z \in \mathbb{D})$$

となることである．

Novinger and Oberlin は Hardy 空間に関連した正則関数の空間 $\mathcal{S}^p = \{f \in H(\mathbb{D}) : f' \in H^p\}$ を考察し，その上の線形等距離写像の構造を解明した．

Theorem (Novinger and Oberlin [12])**.** p を 1 以上の実数とし，$\mathcal{S}^p$ に次のノルムを与える．

$$\|f\|_\sigma = |f(0)| + \|f'\|_p, \qquad \|f\|_\Sigma = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \qquad (f \in \mathcal{S}^p).$$

1. T が $(\mathcal{S}^p, \|\cdot\|_\sigma)$ 上の複素線形等距離写像であるための必要十分条件は，$\lambda \in \mathbb{T}$ と複素線形等距離写像 $\tau\colon H^p \to H^p$ が存在して

$$T(f)(z) = \lambda f(0) + \int_{[0,z]} \tau(f')(\zeta)\, d\zeta \qquad (\forall f \in \mathcal{S}^p,\, z \in \mathbb{D})$$

となることである．

2. T が $(\mathcal{S}^p, \|\cdot\|_\Sigma)$ 上の複素線形等距離写像であるための必要十分条件は，$\lambda \in \mathbb{T}$ と等角写像 $\phi\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ が存在して

$$T(f)(z) = \lambda f(\phi(z)) \qquad (\forall f \in \mathcal{S}^p,\, z \in \mathbb{D})$$

となることである．特に $p > 1$ のとき，$\mu \in \mathbb{T}$ が存在して $\phi(z) = \mu z\,(\forall z \in \mathbb{D})$ となる．

X, Y をコンパクト Hausdorff 空間とし，$C_{\mathbb{R}}(K)$ によりコンパクト Hausdorff 空間 K 上の実数値連続関数全体のなす，$\|\cdot\|_\infty$ に関する Banach 空間を表す．Banach [1] と Stone [13] は，線形とは限らない全射等距離写像 $T\colon C_{\mathbb{R}}(X) \to C_{\mathbb{R}}(Y)$ の構造を解明した．その後，ベクトル空間 E に値をとる K 上の連続写像のなす空間 $C(K, E)$ 上の全射線形等距離写像が Jerison によって考察された．

Theorem (Jerison [8])**.** E を狭義凸な *Banach* 空間とする．T が $C(X, E)$ 上の全射線形等距離写像ならば，同相写像 $\phi\colon X \to X$ と強作用素位相に関する連続写像 $V\colon X \to \mathcal{L}(E)$ が存在し，各 $x \in X$ に対して $V(x)$ は E 上の線形等距離写像であり

$$T(F)(x) = V(x)F(\phi(x)) \qquad (\forall F \in C(X, E),\, x \in X)$$

となる．ここで $\mathcal{L}(E)$ は E 上の有界線形作用素全体である．

Jerisonの結果以降，スカラー値関数のなす関数空間上の等距離写像の構造が解明されると，ベクトル値写像のなす関数空間上の等距離写像を決定する問題が自然に発生する．たとえば，Botelho and Jamison はベクトル値の連続微分可能写像のなす空間とその上の等距離写像を考察している．この結果は Cambern [4] の一般化となっている．ただしノルム空間 $(N, \|\cdot\|_N)$ に対して，写像 $F\colon [0,1] \to N$ が連続微分可能であるとは，各 $t \in [0,1]$ に対して $F'(t) \in E$ が存在して

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{F(t+h) - F(t)}{h} - F'(t) \right\|_N = 0$$

をみたし，さらに $F'\colon [0,1] \to N$ が連続となることである．

Theorem (Botelho and Jamison [2]). E を有限次元実 *Hilbert* 空間とし，$C^1([0,1], E)$ により $[0,1]$ で定義され E に値をとる連続微分可能な写像全体のなす *Banach* 空間を表す．T は $C^1([0,1], E)$ 上の，次のノルムに関する全射実線形等距離写像とする．

$$\|F\| = \sup_{t\in[0,1]} (\|F(t)\|_E + \|F'(t)\|_E) \qquad (\forall F \in C^1([0,1], E).$$

このとき全射実線形等距離写像 $U\colon E \to E$ が存在して

$$T(F)(t) = U(f(t)) \qquad (\forall F \in C^1([0,1], E),\, t \in [0,1])$$

あるいは

$$T(F)(t) = U(f(1-t)) \qquad (\forall F \in C^1([0,1], E),\, t \in [0,1])$$

が成り立つ．逆に T が上の形の写像であれば，T は全射実線形等距離写像である．

2 主結果

筆者らはスカラー値の関数空間 $\mathcal{S}^\infty$ や $C^1([0,1])$ を考え，その上の全射等距離写像の構造を調べてきた．これまでの歴史を振り返ると，これらの空間のベクトル値版を考察し，その上の等距離写像を決定する問題が考えられる．Botelho and Jamison は C^1 空間に対して，この方向の研究を行ったわけであるが，彼らの結果にある「有限次元」という仮定は必然的なのであろうか．筆者らには「有限次元」という仮定をはずしても類似の結果が得られる，ということを証明することはできていない．空間を「Hilbert 空間」に限定せずに，Banach 空間の範疇で考えることとし，特に「有限次元」の条件に着目するとき，対象となる空間が「関数環」であれば Botelho and Jamison の定理と類似の結果が成り立つことがある程度は分かっていた．実際，次の結果は 2017 年度の関数環研究集会において報告した．この結果を述べるために若干の準備を必要とする．

A をコンパクト Hausdorff 空間上の関数環とし，A^* を A の双対空間とする．A_1^* により A^* の閉単位球を表す．各 $x \in X$ に対して，汎関数 δ_x を $\delta_x(f) = f(x)$ $(f \in A)$ で定めると，$\delta_x \in A_1^*$ となる．A_1^* は weak*-topology に関してコンパクト凸集合であるから，端点が存在する．A_1^* の端点全体の集合を $\mathrm{Ext}(A)$ で表す．関数環 A の Choquet 境界 $\mathrm{Ch}(A)$ を，$\delta_x \in \mathrm{Ext}(A_1^*)$ となるような $x \in X$ 全体の集合と定める．実際，$\mathrm{Ch}(A)$ は A の境界である，つまり任意の $f \in A$ は $\mathrm{Ch}(A)$ 上で最大絶対値をとる．また，∂A を A の Shilov 境界とする．よく知られているように，$\mathrm{Ch}(A)$ の X にお

ける閉包は ∂A と一致する．線形空間 $C^1([0,1],A)$ には様々なノルムの入れ方が考えられる．D を $[0,1]\times[0,1]$ のコンパクト連結集合で，$p_1(D)\cup p_2(D)=[0,1]$ をみたすものとする．ここで p_1,p_2 は $[0,1]\times[0,1]$ 上で定義された自然な射影である．このとき

$$\|F\|_{\langle D\rangle}=\sup_{(t_1,t_2)\in D}(\|F(t_1)\|_X+\|F'(t_2)\|_X)\qquad (F\in C^1([0,1],A))$$

は $C^1([0,1],A)$ 上のノルムとなる．ただし $\|\cdot\|_X$ は X 上の最大値ノルムである．

Theorem (M. [11]). A を X 上の関数環で，$\mathbf{Ch}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{\partial A}$ をみたすものとする．D は $[0,1]\times[0,1]$ のコンパクト連結集合で，$\boldsymbol{p_1(D)=p_2(D)=[0,1]}$ が成り立つとする．$(C^1([0,1],A),\|\cdot\|_{\langle D\rangle})$ 上の全射**複素線形**等距離写像 T に対して，$\mathrm{Ch}(A)$ 上 $|\beta|=1$ である $\beta\in A$ と同相写像 $\psi\colon \mathrm{Ch}(A)\to\mathrm{Ch}(A)$ および $\mathrm{Ch}(A)$ の開かつ閉集合 X_{-1},X_1 で，$X_{-1}\cup X_1=\mathrm{Ch}(A)$ *and* $X_{-1}\cap X_1=\emptyset$ をみたすものがが存在して

$$T(F)(t)(x)=\begin{cases}\beta(x)F(t)(\psi(x)) & x\in X_1\\ \beta(x)F(1-t)(\psi(x)) & x\in X_{-1}\end{cases}\qquad (F\in C^1([0,1],A),\ t\in[0,1]),$$

となる．

逆に，上の条件をみたす $\beta,\ X_j\ (j=\pm1)$ および ψ に対して，T は $(C^1([0,1],A),\|\cdot\|_{\langle D\rangle})$ 上の複素線形等距離写像である．

上記の結果では，$\mathrm{Ch}(A)=\partial A$ をみたす関数環 A に限定し，等距離写像は複素線形である場合に限っている．A が Direchlet 環ならば $\mathrm{Ch}(A)=\partial A$ であることが知られているが，全ての関数環に対して成り立つ性質ではない．また，等距離写像に対しては，その複素線形性を仮定しているが，Mazur-Ulam の定理 [10] により，ノルム空間の間の任意の**全射**等距離写像はアファインであることが知られている．つまり上の結果における S は，複素線形性を仮定しなくとも，全射性から**実線形**であると仮定して一般性を失わないのである．この意味で S の複素線形性は本質的な条件ではない．それでは，$\mathrm{Ch}(A)=\partial A$ とは限らない一般の関数環 A に対して，$(C^1([0,1],A),\|\cdot\|_{\langle D\rangle})$ 上の全射等距離写像はどのような構造をしているのであろうか．この問題に対して，次の結果が得られた．

Theorem 1 (Koshimizu and M. [9]). A を X 上の関数環とし，D を $[0,1]\times[0,1]$ のコンパクト連結集合で，$\boldsymbol{p_1(D)=p_2(D)=[0,1]}$ が成り立つとする．$(C^1([0,1],A),\|\cdot\|_{\langle D\rangle})$ 上の全射**実線形**等距離写像 S に対して，A の極大イデアル空間 M_A 上で $|\widehat{\beta}|=1$ をみたす $\beta\in A^{-1}$ と，同相写像 $\sigma\colon M_A\to M_A$ および $\cup_{j=1}^4 M_j=M_A$ をみたす互いに疎な M_A の開かつ閉集合 M_1,M_2,M_3,M_4 が存在して

$$\widehat{T(F)(t)}(\rho)=\begin{cases}\widehat{\beta}(\rho)\widehat{F(t)}(\sigma(\rho)) & \text{if}\quad \rho\in M_1\\ \widehat{\beta}(\rho)\widehat{F(1-t)}(\sigma(\rho)) & \text{if}\quad \rho\in M_2\\ \widehat{\beta}(\rho)\overline{\widehat{F(t)}(\sigma(\rho))} & \text{if}\quad \rho\in M_3\\ \widehat{\beta}(\rho)\overline{\widehat{F(1-t)}(\sigma(\rho))} & \text{if}\quad \rho\in M_4\end{cases}\qquad (F\in C^1([0,1],A),\ t\in[0,1])$$

となる．ただし $\hat{\cdot}$ は *Gelfand* 変換である．

逆に，上の条件をみたす β, M_j $(j=1,2,3,4)$ および σ に対して，T は $(C^1([0,1],A),\|\cdot\|_{\langle D\rangle})$ 上の全射実線形等距離写像である．

本稿主定理の証明のアイディアは，これまでの手法と本質的に同じで，$C^1([0,1],A)$ を適切なコンパクト Hausdorff 空間 K に対して $C(K)$ にノルム空間として埋め込み，$C(K)_1^*$ の端点がよく分かっていることを用いて K 上の同相写像を誘導する．そこで得られた情報を関数環 A の言葉で記述する際に，若干の計算・議論が必要になるが，これも目新しいものではなく，既存の手法が適用可能である．ここまでの議論で示されることは，T の $A|_{\partial A}$ での振る舞いであり，A 上のそれではない．T の A 上の構造を調べるために，筆者らはいくつかの関数環とその極大イデアル空間を導入し，これらの極大イデアル空間が同相であることを示す手法をとった．この方法により T の A 上での振る舞いが解明されたが，決して容易な証明方法とは言えず，改善の余地が十分にある．詳細は [9] をご覧いただきたい．

また，主定理では $[0,1]\times[0,1]$ のコンパクト連結集合 D に $p_1(D)=p_2(D)=[0,1]$ を仮定している．$\|\cdot\|_{\langle D\rangle}$ は，$p_1(D)\cup p_2(D)=[0,1]$ をみたす D に対して $C^1([0,1],A)$ のノルムを与えるので，本稿主定理では限定的なノルムに対する全射等距離写像の構造を解明したに過ぎない．より一般のノルムに対する等距離写像の決定は今後の課題である．さらに，Forelli や Novinger and Oberlin の結果のベクトル値関数空間版とその上の実線形等距離写像も興味ある研究対象である．

参考文献

[1] S. Banach, Theory of linear operations, Translated by F. Jellett, Dover Publications, Inc. Mineola, New York, 2009.

[2] F. Botelho and J. Jamison, *Surjective isometries on spaces of differentiable vector-valued functions*, Studia Math. **192** (1) (2009), 39–50.

[3] A. Browder, Introduction to function algebras, W.A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1969.

[4] M. Cambern, *Isometries of certain Banach algebras*, Studia Math. **25** (1964-1965), 217–225.

[5] J.A. Cima and W.R. Wogen, *On isometries of the Bloch space*, Illinois J. Math. **24** (1980), no. 2, 313–316.

[6] K. deLeeuw, W. Rudin and J. Wermer, *The isometries of some function spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **11** (1960), 694–698.

[7] F. Forelli, *The isometries of H^p*, Canad. J. Math. **16** (1964), 721–728.

[8] M. Jerison, *The space of bounded maps into a Banach space*, Ann. of Math. (2) **52**, (1950), 309–327.

[9] H. Koshimizu and T. Miura, *Surjective isometries on C^1 spaces of uniform algebra valued maps*, Nihonkai Math. J. **30** (2019), 41–76.

[10] S. Mazur and S. Ulam, *Sur les transformationes isométriques d'espaces vectoriels normés*, C. R. Acad. Sci. Paris **194** (1932), 946–948.

[11] T. Miura, *Isometries on C^1-spaces of $C(X)$-valued functions*, Proceedings of Function Algebras 2017.

[12] W.P. Novinger and D.M. Oberlin, *Linear isometries of some normed spaces of analytic functions*, Can. J. Math. **37** (1985), 62–74.

[13] M.H. Stone, *Applications of the theory of Boolean rings to general topology*, Trans. Amer. Math. Soc. **41** (1937), 375–481.

Range preserving maps between the spaces of continuous functions with values in a locally convex space

Graduate School of Science and Technology, Niigata University
Yuta Enami

1 導入

複素 A を Banach 環とし，$a \in A$ のスペクトルを $\sigma(a)$ で表すことにする．Gleason [3] および Kahane と Żelazko [4] は独立に今日 Gleason-Kahane-Żelazko の定理と呼ばれる定理を示した．

定理 1. A を複素 Banach 環とする．線型汎関数 $T : A \to \mathbb{C}$ が

$$Ta \in \sigma(a) \qquad (\forall a \in A)$$

を満たすならば，T は乗法的である．

X をコンパクト Hausdorff 空間とし，$C(X)$ で X で定義された複素数値連続関数全体のなす Banach 環を表す．$f \in C(X)$ に対して，f のスペクトル $\sigma(f)$ は f の値域

$$\mathrm{Ran}(f) = \{f(x) : x \in X\}$$

に一致する．Gleason-Kahane-Żelazko の定理を用いることで，値域を保存する写像は合成作用素になることが簡単に示される．

系 1. X および Y をコンパクト Hausdorff 空間とする．$T : C(X) \to C(Y)$ を線型写像で，任意の $f \in C(X)$ に対して

$$\mathrm{Ran}(Tf) \subset \mathrm{Ran}(f)$$

を満たすと仮定する．このとき，連続写像 $\varphi : Y \to X$ が存在し，任意の $f \in C(X)$ に対して

$$Tf = f \circ \varphi$$

が成り立つ．

また，Kowalski と Słodkowski [5] は驚くべき Gleason-Kahane-Żelazko の定理の拡張を得た．

定理 2. A を複素 Banach 環とし，$T : A \to \mathbb{C}$ を線型とは限らない写像で

1. $T0 = 0$，および
2. 任意の $a, b \in A$ に対して $Ta - Tb \in \sigma(a - b)$,

を満たすものとする．このとき，T は線型かつ乗法的である．

上の系 1 と同様にして，Kowalski-Słodkowski の定理から次が得られる．

系 2. X および Y をコンパクト Hausdorff 空間とする．$T : C(X) \to C(Y)$ を必ずしも線型とは限らない写像で，任意の $f, g \in C(X)$ に対して

$$\mathrm{Ran}(Tf - Tg) \subset \mathrm{Ran}(f - g)$$

を満たすと仮定する．このとき，連続写像 $\varphi : Y \to X$ が存在し，任意の $f \in C(X)$ に対して

$$Tf = T0 + f \circ \varphi$$

が成り立つ．

また，Ghodrat と Sady [2] は Banach 加群の元に対してスペクトルを定義し，系 1 を Banach 加群に拡張した．その詳細は複雑なので，詳しくは [2, Theorem 3.12] を参照していただきたい．Banach 空間に値をとる連続関数の全体のなす Banach$C(X)$-加群 $C(X, E)$ を考えよう．各 $F \in C(X, E)$ に対して，F の Ghodrat-Sady の定義したスペクトルは

$$\{\Lambda(F(x)) : x \in X,\ \Lambda \in E_1^* \setminus \{0\}\}$$

のある部分集合となる．

今回の主結果はこのスペクトルに関する Kowalski-Słodkowski 型の定理を調べていたとき，三浦毅先生から全射 $T : C(X, E) \to C(Y, E)$ で任意の $F, G \in C(X, E)$ に対して

$$\mathrm{Ran}(TF - TG) = \mathrm{Ran}(F - G)$$

を満たすものを考えてみたらどうか，とご提案いただいたことにより得られたものである

2 関数空間 $C(X, E)$

ここで考える関数空間は局所凸空間に値をとる連続関数の全体である．この節では，その基本的な性質を紹介する．

局所凸空間とは，Hausdorff な複素位相線型空間であって原点の基本近傍系として凸集合からなるものがとれるようなものである．コンパクト Hausdorff 空間 X と局所凸空間 E に対して，X 上定義された E に値をとる連続関数の全体を $C(X, E)$ で表す．E が複素平面 $\mathbb{C}$ であるときは，$C(X, \mathbb{C})$ の代わりに単に $C(X)$ で表す．各点毎の加法およびスカラー倍によって $C(X, E)$ は複素線型空間になる．関数 $F \in C(X, E)$ に対して，

$$\mathrm{Ran}(F) = \{F(x) : x \in X\}$$

とおき，これを F の**値域** (range) という．定義から，$\mathrm{Ran}(F)$ は局所凸空間 E の部分集合であることに注意する．

局所凸空間 E の原点における近傍全体を $\mathcal{B}$ とする．各 $B \in \mathcal{B}$ に対して，

$$V_X(B) = \{F \in C(X, E) : \mathrm{Ran}(F) \subset B\}$$

とおく．このとき，$C(X, E)$ を局所凸空間にするような位相で $\{V_X(B)\}_{B\in\mathcal{B}}$ を原点の基本近傍系にするようなものが唯一つ存在する．この位相を**一様収束の位相** (topology of uniform convergence) という．

注意. E がノルム空間であるとき，B として E の原点を中心とする半径 ε の開球とすると $V_X(B)$ は $C(X, E)$ の原点を中心とするノルム

$$\|F\| = \sup_{x\in X} \|F(x)\|$$

に関する半径 ε の開球となる．よって，E がノルム空間の場合は一様収束の位相はノルム位相と一致する．

$f \in C(X)$，$u \in E$ に対して，$f \otimes u : X \to E$ を

$$(f \otimes u)(x) = f(x)u$$

で定める．このとき，$f \otimes u \in C(X, E)$ である．任意の $u \in E$ に対して，$1 \otimes u$ は X 上で恒等的に u である定値関数である．E の原点を 0_E で表すことにする．任意の $f \in C(X)$ と $u \in E$ に対して

$$1 \otimes 0_E = f \otimes 0_E = 0 \otimes u$$

であり，これは線型空間 $C(X, E)$ の原点である．集合

$$\{f \otimes u : f \in C(X), u \in E\}$$

で張られる $C(X, E)$ の部分空間を $C(X) \otimes E$ で表し，これを $C(X)$ と E の**代数的テンソル積** (algebraic tensor product) という．

補題 1. X をコンパクト Hausdorff 空間とし，E を局所凸空間とする．このとき，代数的テンソル積 $C(X) \otimes E$ は一様収束の位相に関して $C(X, E)$ の中で稠密である．

3　主結果

この節では，主結果の紹介と証明の概略を説明する．

定理 3. X および Y をコンパクト Hausdorff 空間とし，E を局所凸空間とする．$T : C(X, E) \to C(Y, E)$ を必ずしも線型とは限らない写像で，任意の $F, G \in C(X, E)$ に対して

$$\mathrm{Ran}(TF - TG) \subset \mathrm{Ran}(F - G)$$

を満たすと仮定する．このとき，連続写像 $\varphi : Y \to X$ が存在して

$$TF = T(1 \otimes 0_E) + F \circ \varphi \qquad (\forall F \in C(X, E))$$

が成り立つ．特に，$T(1 \otimes 0_E)$ ならば T は線型である．

注意. 関数 $F \in C(X,E)$ 値域を考える上では $C(X,E)$ にノルムが定義されている必然性はない，すなわち，E がノルム空間である必要はない．そのため値域を保存する写像は一般に E が位相線型空間である場合に考えられる．しかし，今回の主結果では E は局所凸空間になっているが，それは証明で補題 1 を用いるためであり，それ以外の部分では E の局所凸性を用いない．

この証明の基本的なアイデアは以下のようなものである.「T は値域を保存するので，$u \in E \setminus \{0\}$ で張られる 1 次元部分空間 $\mathbb{C}u$ に値をとる関数 $f \otimes u$ に対して，$T(f \otimes u)$ も $\mathbb{C}u$ に値をとる関数になる．系 2 より，$\mathbb{C}u$ に値をとる関数全体 $\{f \otimes u : f \in C(X)\}$ 上で T は合成作用素になる．あとはこれが $C(X,E)$ にうまく伸ばせれば証明ができる.」この証明の基本方針となるアイデアは三浦毅先生からご教示いただいたものである．

証明のスケッチ 1. $T : C(X,E) \to C(Y,E)$ を任意の $F, G \in C(X,E)$ に対して

$$\mathrm{Ran}(TF - TG) \subset \mathrm{Ran}(F - G)$$

を満たす写像とする．写像 $T - T(1 \otimes 0_E)$ を考えることで，一般性を失うことなく $T(1 \otimes 0_E) = 1 \otimes 0_E$ と仮定してよい．このとき，任意の $F \in C(X,E)$ に対して

$$\mathrm{Ran}(TF) \subset \mathrm{Ran}(F)$$

が成り立つ．

任意の $f \in C(X)$ と $u \in E \setminus \{0\}$ に対して

$$\mathrm{Ran}(T(f \otimes u)) \subset \mathrm{Ran}(f \otimes u) = (\mathrm{Ran}(f))u$$

となる．このことから，ある連続関数 $\tilde{T}_u f \in C(Y)$ を用いて

$$T(f \otimes u) = (\tilde{T}_u f) \otimes u$$

とかける．これによって写像 $\tilde{T}_u : C(X) \to C(Y)$ が得られるが，この写像は $\tilde{T}_u 0 = 0$ かつ

$$\mathrm{Ran}(\tilde{T}_u f - \tilde{T}_u g) \subset \mathrm{Ran}(f - g) \qquad (\forall f, g \in C(X))$$

を満たす．系 2 より，ある連続関数 $\varphi_u : Y \to X$ が存在して

$$\tilde{T}_u f = f \circ \varphi_u \qquad (\forall f \in C(X))$$

となる．

次に，任意の $f, g \in C(X)$ と任意の $u, v \in E \setminus \{0\}$ に対して

$$T(f \otimes u + g \otimes v) = T(f \otimes u) + T(g \otimes v)$$

が成り立つこと，および，任意の $u, v \in E \setminus \{0\}$ に対して

$$\varphi_u = \varphi_v$$

であることを示せる．この部分はやや計算による部分が多いので，詳しくは [1, Lemma 4.4, 4.5] を参照されたい．以下，φ_u の代わりに単に φ とかく．このことから，任意の $f_1, \dots, f_n \in C(X)$ と任意の $u_1, \dots, u_n \in E \setminus \{0\}$ に対して，

$$
\begin{aligned}
T\left(\sum_{j=1}^{n} f_j \otimes u_j\right) &= \sum_{j=1}^{n} T(f_j \otimes u_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} (f_j \circ \varphi) \otimes u_j \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} f_j \otimes u_j\right) \circ \varphi
\end{aligned}
$$

となる．すなわち，T は代数的テンソル積 $C(X) \otimes E$ 上で合成作用素になる．

最後に，位相空間論の基本的な議論で T は一様収束の位相に関して連続であることが示される．このことと，$C(X) \otimes E$ が一様収束の位相に関して $C(X, E)$ で稠密であること，T が $C(X) \otimes E$ 上で合成作用素になっていることから，

$$TF = F \circ \varphi$$

となる． □

References

[1] Y. Enami, *Range preserving maps between the spaces of continuous functions with values in a locally convex space*, arXiv:1910.07761.

[2] R.S. Ghodrat and F. Sady, *Point multipliers and the Gleason-Kahane-Żelazko theorem*, Banach J. Math. Anal. **11** (2017), no. 4, 864-879.

[3] A.M. Gleason, *A characterization of maximal ideals*, J. Anal. Math. **19** (1967), 171-172.

[4] J.P. Kahane and W. Żelazko, *A characterization of maximal ideals in commutative Banach algebras*, Studia Math. **29** (1968), 339-343.

[5] S. Kowalski and Z. Słodkowski, *A characterization of multiplicative linear functionals in Banach spaces*, Studia Math. **67** (1980), no. 3, 215-233.

Orthogonal Gyrovectorexpansion in Möbius Gyrovector Spaces - An introduction of a paper by Keiichi Watanabe -

Department of Mathematics, Niigata University Naoya Sakuma

This is an introduction of a paper [W2] by Keiichi Watanabe. There are no results mine.

1. Introduction

Gyrogroups and gyrovector spaces are generalizes groups and vector spaces, respectively, and gyrooperations are generally not commutative, associative, or distributive. The Möbius gyrovector spaces hold several properties that Hilbert spaces hold. This is a brief note on a counterpart to the orthogonal expansion in Möbius gyrovector spaces.

2. Möbius Gyrovector Spaces

Definition (Möbius Gyrovector Spaces) [U] Let $\mathbb{V}$ be a real inner product space and let $\mathbb{V}_s = \{\mathbf{a} \in \mathbb{V}; \|\mathbf{a}\| < s\}$ for any $s > 0$. The Möbius addition $\oplus_M$ and the Möbius scalar multiplication $\otimes_M$ are given by the equations:

$$\boldsymbol{a} \oplus_M \boldsymbol{b} = \frac{(1 + \frac{2}{s^2}\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \frac{1}{s^2}\|\boldsymbol{b}\|^2)\boldsymbol{a} + (1 - \frac{1}{s^2}\|\boldsymbol{a}\|^2)\boldsymbol{b}}{1 + \frac{2}{s^2}\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \frac{1}{s^4}\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2}$$

$$r \otimes_M \boldsymbol{a} = s \tanh\left(r \tanh^{-1} \frac{\|\boldsymbol{a}\|}{s}\right) \frac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|} \quad (\text{if } \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}), \qquad r \otimes_M \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$$

for any $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{V}_s, r \in \mathbb{R}$.

The vector addition $\oplus_M$ and the scalar multiplication $\otimes_M$ for the set $\|\mathbb{V}_s\| = \{\pm\|\boldsymbol{a}\|; \boldsymbol{a} \in \mathbb{V}_s\}$ $(= (-s, s))$ in the axiom (VV) of gyrovector space are defined by the equations:

$$a \oplus_M b = \frac{a + b}{1 + \frac{1}{s^2}ab}$$

$$r \otimes_M a = s \tanh\left(r \tanh^{-1} \frac{a}{s}\right)$$

for any $a, b \in \|\mathbb{V}_s\|, r \in \mathbb{R}$.

Then $(\mathbb{V}_s, \oplus_M, \otimes_M)$ is a Möbius gyrovector space.
We simply denote $\oplus_M$, $\otimes_M$ by $\oplus$, $\otimes$, respectively.

Remark [W2] • If several kinds of operations appear in a formula simultaneously, we always give priority by the following order: (i) ordinary scalar multiplication; (ii) gyroscalar multiplication $\otimes$; (iii) gyroaddition $\oplus$; that is,

$$r_1 \otimes w_1 \boldsymbol{a}_1 \oplus r_2 \otimes w_2 \boldsymbol{a}_2 = \{r_1 \otimes (w_1 \boldsymbol{a}_1)\} \oplus \{r_2 \otimes (w_2 \boldsymbol{a}_2)\}$$

and the parentheses are omitted in such cases.
• In the limit of large s, $s \to \infty$, the ball $\mathbb{V}_s$ expands to the whole space $\mathbb{V}$, and we have

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b} &\to \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \qquad (s \to \infty), \\ r \otimes \boldsymbol{a} &\to r\boldsymbol{a} \qquad (s \to \infty) \ . \end{aligned}$$

Theorem [AW] Let $(\mathbb{V}_s, \oplus, \otimes)$ be a Möbius gyrovector space. Then we have the following:

$$\{r_1 \otimes \boldsymbol{a_1} \oplus r_2 \otimes \boldsymbol{a_2}; r_1, r_2 \in \mathbb{R}\} = \{\lambda_2 \otimes \boldsymbol{a_2} \oplus \lambda_1 \otimes \boldsymbol{a_1}; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\},$$

$$r \otimes (r_1 \otimes \boldsymbol{a_1} \oplus r_2 \otimes \boldsymbol{a_2}) \in \{\lambda_1 \otimes \boldsymbol{a_1} \oplus \lambda_2 \otimes \boldsymbol{a_2}; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}.$$

for any $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2} \in \mathbb{V}_s, r, r_1, r_2 \in \mathbb{R}$.

Notation [U] Recall that the inverse element of $\boldsymbol{a}$ is denoted by $\ominus\boldsymbol{a}$ in a gyrogroup, and one uses the notation

$$\boldsymbol{a} \ominus \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \oplus (\ominus \boldsymbol{b})$$

as in group theory.

Definition [U] The Möbius gyrodistance function d on the ball $\mathbb{V}_s$ is denoted by the equation

$$d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \|\boldsymbol{b} \ominus \boldsymbol{a}\|.$$

Moreover, the Poincaré distance function h on the ball $\mathbb{V}_s$ is introduced by the equation

$$h(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \tanh^{-1} \frac{d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{s}$$

for any $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{V}_s$.

Theorem [W2] Let $\mathbb{V}$ be a real Hilbert space. Then $(\mathbb{V}_s, h)$ is a complete metric space.

Definition [AW][W2] • For any nonempty subset A of $\mathbb{V}_s$, we denote $A^{\perp}$ as the orthogonal complement of A in $\mathbb{V}$; that is,

$$A^{\perp} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{V};\ \ \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{a} = 0\ \ (\forall \boldsymbol{a} \in A\,)\}.$$

• A nonempty subset M of $\mathbb{V}_s$ is a gyrovector subspace if

$$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in M,\ r \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b} \in M\ , \quad r \otimes \boldsymbol{a} \in M.$$

• For any nonempty subset A of $\mathbb{V}_s$, $\bigvee^g A$ is said to be the gyrovector subspace generated by A if

$$\bigvee{}^g A = \bigcap \{\ M;\ A \subset M,\ M \text{ is a gyrovector subspace of } \mathbb{V}_s\}.$$

Theorem [AW] Let $\mathbb{V}$ be a real Hilbert space, and let M be a gyrovector subspace of $\mathbb{V}_s$ that is topologically relatively closed. Suppose that

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \qquad \boldsymbol{x}_1 \in \mathrm{clin} M, \qquad \boldsymbol{x}_2 \in M^{\perp}.$$

is orthogonal decomposition of an arbitrary element $\boldsymbol{x} \in \mathbb{V}_s$ with respect to the closed linear subspace generated by M (clin$M$). Then, a unique pair $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ exists that satisfies

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \oplus \boldsymbol{z}, \qquad \boldsymbol{y} \in M, \qquad \boldsymbol{z} \in M^{\perp} \cap \mathbb{V}_s.$$

Moreover, if $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \neq 0$, then these elements $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ are determined by

$$\boldsymbol{y} = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1, \qquad \boldsymbol{z} = \lambda_2 \boldsymbol{x}_2,$$

where

$$\lambda_1 = \frac{\|\boldsymbol{x}_1\|^2 + \|\boldsymbol{x}_2\|^2 + s^2 - \sqrt{(\|\boldsymbol{x}_1\|^2 + \|\boldsymbol{x}_2\|^2 + s^2)^2 - 4s^2\|\boldsymbol{x}_1\|^2}}{2\|\boldsymbol{x}_1\|^2}$$

$$\lambda_2 = \frac{\|\boldsymbol{x}_1\|^2 + \|\boldsymbol{x}_2\|^2 - s^2 + \sqrt{(\|\boldsymbol{x}_1\|^2 + \|\boldsymbol{x}_2\|^2 + s^2)^2 - 4s^2\|\boldsymbol{x}_1\|^2}}{2\|\boldsymbol{x}_2\|^2}$$

Lemma [W2] If $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ is an orthogonal set in $\mathbb{V}_s$, then the associative law holds, that is,

$$\boldsymbol{u} \oplus (\boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}) \oplus \boldsymbol{w}.$$

Indeed, by [U], Möbius gyraton can be expressed by the equation

$$\mathrm{gyr}[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w} + 2\frac{A\boldsymbol{u} + B\boldsymbol{v}}{D},$$

where

$$\begin{aligned} A &= -\tfrac{1}{s^4}\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}\|\boldsymbol{v}\|^2 + \tfrac{1}{s^2}\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} + \tfrac{2}{s^4}(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}) \\ B &= -\tfrac{1}{s^4}\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}\|\boldsymbol{u}\|^2 - \tfrac{1}{s^2}\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} \\ D &= 1 + \tfrac{2}{s^2}\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} + \tfrac{1}{s^4}\|\boldsymbol{u}\|^2\|\boldsymbol{v}\|^2 \end{aligned}$$

for all $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{V}_s$, and it is also confirmed by hand calculation [W1].

Definition [W2] (i) Let $\{\boldsymbol{a}_n\}_n$ be a sequence in $\mathbb{V}_s$. We say that a series

$$(((\boldsymbol{a}_1 \oplus \boldsymbol{a}_2) \oplus \boldsymbol{a}_3) \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{a}_n) \oplus \cdots$$

converges if there exists an element $\boldsymbol{x} \in \mathbb{V}_s$ such that $\mathrm{h}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_n) \to 0$ $(\mathrm{n} \to \infty)$, where the sequence $\{\boldsymbol{x}_n\}_n$ is defined recursively by $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{a}_1$ and $\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}_{n-1} \oplus \boldsymbol{a}_n$. In this case, we say the series converges to $\boldsymbol{x}$ and denote

$$\boldsymbol{x} = (((\boldsymbol{a}_1 \oplus \boldsymbol{a}_2) \oplus \boldsymbol{a}_3) \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{a}_n) \oplus \cdots$$

(ii) Let $\{a_n\}_n$ be a sequence in $\mathbb{R}$ with $|a_n| < s$ for all n. We say that a series

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}^{\oplus} a_n = a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_n \oplus \cdots$$

converges if there exists $x \in \mathbb{R}$ with $|x| < s$ such that $x_n \to x$, where the sequence $\{x_n\}_n$ is defined recursively by $x_1 = a_1$ and $x_n = x_{n-1} \oplus a_n$. In this case, we say the series converges to x and denote

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}{}^{\oplus} a_n$$

Theorem [W2] Let $\{\boldsymbol{e}_n\}_n$ be an orthonormal sequence in a real Hilbert space $\mathbb{V}$. Let $\{w_n\}_n$ be a sequence in $\mathbb{R}$ such that $0 < w_n < s$ for all n. For any sequence $\{r_n\}_n$ in $\mathbb{R}$, the following are equivalent:

(i) The series

$$r_1 \otimes w_1\boldsymbol{e}_1 \oplus r_2 \otimes w_2\boldsymbol{e}_2 \oplus \cdots \oplus r_n \otimes w_n\boldsymbol{e}_n \oplus \cdots$$

converges to an element $\boldsymbol{x} \in \mathbb{V}_s$.

(ii) The series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}{}^{\oplus} \frac{(r_n \otimes w_n)^2}{s}$ converges to $x \in \mathbb{R}$ with $|x| < s$.

3. A Main Theorem

Let $\{\boldsymbol{e}_n\}_n$ be a complete orthonormal sequence in a real Hilbert space $\mathbb{V}$. Let $\{w_n\}_n$ be a sequence in $\mathbb{R}$ such that $0 < w_n < 1$ for all n. (s=1 for simplicity)

For $n = 1$, put

$$\boldsymbol{x}_1 = x_1\boldsymbol{e}_1, \qquad \boldsymbol{x}_2 = x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 + \cdots .$$

Then

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$$

is the orthogonal decomposition with respect to the closed linear subspace generated by $\{\boldsymbol{e}_1\}$. Let

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}_1 \oplus \boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{y}_1 \in M_1, \boldsymbol{z}_1 \in M_1^{\perp} \cap \mathbb{V}_1$$

be the orthogonal gyrodecomposition with respect to M_1, where M_1 is an h-closed gyrovector subspace generated by $\{w_1\boldsymbol{e}_1\}$. Then, $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{z}_1$ are given by the equations

$$\boldsymbol{y}_1 = \lambda_1^{(1)}\boldsymbol{x}_1^{(1)} \ \ and \ \ \boldsymbol{z}_1 = \lambda_1^{(2)}\boldsymbol{x}_1^{(2)}$$

where

$$\lambda_1^{(1)} = \frac{\|\boldsymbol{x}\|^2 + 1 - \sqrt{(\|\boldsymbol{x}\|^2+1)^2 - 4\|\boldsymbol{x}_1^{(1)}\|^2}}{2\|\boldsymbol{x}_1^{(1)}\|^2}$$
$$\lambda_1^{(2)} = \frac{\|\boldsymbol{x}\|^2 - 1 + \sqrt{(\|\boldsymbol{x}\|^2+1)^2 - 4\|\boldsymbol{x}_1^{(1)}\|^2}}{2\|\boldsymbol{x}_1^{(2)}\|^2}$$

Put

$$r_1 = \frac{\tanh^{-1}\lambda_1^{(1)}x_1}{\tanh^{-1} w_1},$$

then

$$\begin{aligned} r_1 \otimes w_1\boldsymbol{e}_1 &= \tanh(r_1 \tanh^{-1}\|w_1\boldsymbol{e}_1\|)\frac{w_1\boldsymbol{e}_1}{\|w_1\boldsymbol{e}_1\|} \\ &= \lambda_1^{(1)}x_1\boldsymbol{e}_1 = \lambda_1^{(1)}\boldsymbol{x}_1^{(1)} = \boldsymbol{y}_1 \end{aligned}$$

Thus

$$\boldsymbol{x} = r_1 \otimes w_1\boldsymbol{e}_1 \oplus \boldsymbol{z}_1.$$

Let

$$\boldsymbol{z}_1 = \lambda_1^{(2)}\boldsymbol{x}_1^{(2)} = \lambda_1^{(2)}x_2\boldsymbol{e}_2 + \lambda_1^{(2)}\sum_{j=3}^{\infty} x_j\boldsymbol{e}_j$$

be an orthogonal decomposition with respect to the closed linear subspace generated by $\bigvee\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$. Let

$$\boldsymbol{z}_1 = \boldsymbol{y}_2' \oplus \boldsymbol{z}_2', \boldsymbol{y}_2' \in M_2, \boldsymbol{z}_2' \in M_2 \cap \mathbb{V}_1$$

be the orthogonal gyrodecomposition with respect to M_2, where M_1 is an h-closed gyrovector subspace generated by $\{w_1\boldsymbol{e}_1, w_2\boldsymbol{e}_2\}$. Then, $\boldsymbol{y}_2', \boldsymbol{z}_2'$ are given by the equations

$$\boldsymbol{y}_2' = \mu_2^{(1)}\lambda_1^{(2)}\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{e}_2 \ \ and \ \ \boldsymbol{z}_2' = \mu_2^{(2)}\lambda_1^{(2)}\sum_{j=3}^{\infty} x_j\boldsymbol{e}_j$$

Take

$$r_2 = \frac{\tanh^{-1}(\mu_2^{(1)}\lambda_1^{(2)}x_2)}{\tanh^{-1} w_2},$$

then

$$\begin{aligned} r_2 \otimes w_2\boldsymbol{e}_2 &= \tanh(r_2 \tanh^{-1} \|w_2\boldsymbol{e}_2\|)\frac{w_2\boldsymbol{e}_2}{\|w_2\boldsymbol{e}_2\|} \\ &= \mu_2^{(1)}\lambda_1^{(2)}x_2\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{y}_2' \end{aligned}$$

Thus

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= r_1 \otimes w_1\boldsymbol{e}_1 \oplus \boldsymbol{z}_1. \\ &= r_1 \otimes w_1\boldsymbol{e}_1 \oplus (\boldsymbol{y}_2' \oplus \boldsymbol{z}_2') \\ &= r_1 \otimes w_1\boldsymbol{e}_1 \oplus (r_2 \otimes w_2\boldsymbol{e}_2 \oplus \boldsymbol{z}_2') \end{aligned}$$

Theorem [W2] Let $\{\boldsymbol{e}_n\}_n$ be a complete orthonormal sequence in a real Hilbert space $\mathbb{V}$. Let $\{w_n\}_n$ be a sequence in $\mathbb{R}$ such that $0 < w_n < s$ for all n. Then, for any $\boldsymbol{x} \in \mathbb{V}_s$, there exists the sequence of gyrocoefficients $\{r_n\}_n$ such that we have the orthogonal gyroexpansion

$$\boldsymbol{x} = r_1 \otimes w_1\boldsymbol{e}_1 \oplus r_2 \otimes w_2\boldsymbol{e}_2 \oplus \cdots \oplus r_n \otimes w_n\boldsymbol{e}_n \oplus \cdots ,$$

where the sequence of gyrocoefficients $\{r_n\}_n$ is determined by the following equations:

$$x_n = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{e}_n, \qquad \boldsymbol{x}_n^{(1)} = \sum_{j=1}^{n} x_j\boldsymbol{e}_j, \qquad \boldsymbol{x}_n^{(2)} = \sum_{j=n+1}^{\infty} x_j\boldsymbol{e}_j,$$

$$\boldsymbol{u}_j = \mu_{j-1}^{(2)}\cdots\mu_1^{(2)}x_j\boldsymbol{e}_j \quad (j = 2, 3, \cdots), \qquad \boldsymbol{u}_1 = x_1\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{x}_1^{(1)},$$

$$\boldsymbol{v}_j = \mu_{j-1}^{(2)}\cdots\mu_1^{(2)}\boldsymbol{x}_j^{(2)} \quad (j = 2, 3, \cdots), \qquad \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{x}_1^{(2)},$$

$$\mu_j^{(1)} = \frac{\|\boldsymbol{u}_j\|^2 + \|\boldsymbol{v}_j\|^2 + s^2 - \sqrt{(\|\boldsymbol{u}_j\|^2 + \|\boldsymbol{v}_j\|^2 + s^2)^2 - 4s^2\|\boldsymbol{u}_j\|^2}}{2\|\boldsymbol{u}_j\|^2},$$

$$\mu_j^{(2)} = \frac{\|\boldsymbol{u}_j\|^2 + \|\boldsymbol{v}_j\|^2 - s^2 + \sqrt{(\|\boldsymbol{u}_j\|^2 + \|\boldsymbol{v}_j\|^2 + s^2)^2 - 4s^2\|\boldsymbol{u}_j\|^2}}{2\|\boldsymbol{v}_j\|^2},$$

$$r_j = \frac{\tanh^{-1}\frac{\mu_j^{(1)}\mu_{j-1}^{(2)}\cdots\mu_1^{(2)}x_j}{s}}{\tanh^{-1}\frac{w_j}{s}}$$

for all $j, n = 1, 2, \cdots$.

If $x_j = 0$, then we do not define $\mu_j^{(1)}$ but define as $r_j = 0$ and continue the procedure. If $\boldsymbol{v}_n = 0$, then we do not define $\mu_j^{(2)}$ but define as $r_j = 0$ for all $j \geq n+1$ and finish the procedure.

Theorem [W2] Let $\{\boldsymbol{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ be an orthonormal sequence in a real Hilbert space $\mathbb{V}$. Let $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ be a sequence in $\mathbb{R}$ such that $0 < w_n < s$ for all n. Then the following are equivalent:

(i) $\{\boldsymbol{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ is complete.

(ii) The h-closed gyrovector subspace generated by $\{w_n \boldsymbol{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ coincides with $\mathbb{V}_s$.

(iii) $\|\boldsymbol{x}\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}{}^{\oplus} \dfrac{(r_n \otimes w_n)^2}{s}$ for all $\boldsymbol{x} \in \mathbb{V}_s$

where $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ is the sequence determined by identities above theorem.

4. References

[U] A. A. Ungar, Analytic Hyperbolic Geometry and Albert Einstein's Special Theory of Relativity. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 2008.

[AW] Toshikazu Abe and Keiichi Watanabe, Finitely generated gyrovector subspaces and orthogonal gyrodecomposition in the Möbius gyrovector space, J. Math. Anal. Appl. 449(2017), no. 1, 77-90. http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.11.039

[W1] Keiichi Watanabe, A confirmation by hand calculation that the Möbius ball is a gyrovector space, Nihonkai Math. J. 27(2016), 99-115.

[W2] Keiichi Watanabe, Orthogonal Gyroexpansion in Möbius Gyrovector Spaces, Journal of Function Spaces, vol. 2017, Article ID 1518254, 13 pages (2017). doi:10.1155/2017/1518254.

Surjective isometries on a Banach space of analytic functions on the open unit disc, II

School of Pharmacy, Nihon University　Norio Niwa

1 Introduction

次の記号を用いる：

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < 1\} \text{：単位開円板} \\
&\bar{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| \leq 1\} \text{：単位閉円板} \\
&\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\} \text{：単位円周} \\
&H(\mathbb{D}) = \{\mathbb{D} \text{ 上の正則関数全体からなる複素線形空間}\} \\
&A(\bar{\mathbb{D}}) = \{f \in H(\mathbb{D}) \ : \ f \text{ は } \bar{\mathbb{D}} \text{ 上へ連続的に拡張可能である}\}
\end{aligned}
$$

とする。

$$\mathcal{S}_A = \{f \in H(\mathbb{D}) \ : \ f' \in A(\bar{\mathbb{D}})\}$$

と定める。この $\mathcal{S}_A$ には様々なノルムを導入する事ができる。

$$
\begin{aligned}
\|f\|_\sigma &= |f(0)| + \sup_{w \in \mathbb{D}} |f'(w)| \\
\|f\|_\Sigma &= \sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)| + \sup_{w \in \mathbb{D}} |f'(w)| \\
\|f\|_C &= \sup_{w \in \mathbb{D}} (|f(w)| + |f'(w)|)
\end{aligned}
$$

これらは $\mathcal{S}_A$ 上のノルムを定める。そして、これらのノルムによって $\mathcal{S}_A$ は完備である事を示す事ができる。したがって、$\mathcal{S}_A$ は複素 Banach 空間になる。

$(A, \|\cdot\|_A)$、$(B, \|\cdot\|_B)$ をそれぞれ複素ノルム空間とする。
写像 $T : (A, \|\cdot\|_A) \to (B, \|\cdot\|_B)$ が等距離 (isometry) であるとは、

$$\|Tf - Tg\|_B = \|f - g\|_A \qquad (\forall f, g \in A)$$

を満たす事である。ただし、本論で考えている写像 T には複素線形性を仮定していない。もし、T が全射であれば、次の Mazur-Ulam の定理により、T は実線形である事が分かる。

Mazur-Ulam の定理 ([4]). T が $(A, \|\cdot\|_A)$ から $(B, \|\cdot\|_B)$ への全射、等距離、$T(0)=0$ を満たすならば、T は実線形 (real-linear) である。

2018 年度の関数環研究集会では、次の結果を紹介した。

Theorem 1 ([6]). $T : (\mathcal{S}_A, \|\cdot\|_\sigma) \to (\mathcal{S}_A, \|\cdot\|_\sigma)$ は (複素線形とは限らない) 全射な等距離写像とする。そのとき、定数 c_0, c_1, $\lambda \in \mathbb{T}$ と $a \in \mathbb{D}$ が存在して、

$$\begin{aligned}
T(f)(z) &= T(0)(z) + c_0 f(0) + \int_{[0,z]} c_1 f'(\rho(\zeta))\, d\zeta \qquad (\forall f \in \mathcal{S}_A,\ \forall z \in \mathbb{D}), \quad \text{or} \\
T(f)(z) &= T(0)(z) + \overline{c_0 f(0)} + \int_{[0,z]} c_1 f'(\rho(\zeta))\, d\zeta \qquad (\forall f \in \mathcal{S}_A,\ \forall z \in \mathbb{D}), \quad \text{or} \\
T(f)(z) &= T(0)(z) + c_0 f(0) + \int_{[0,z]} \overline{c_1 f'(\rho(\overline{\zeta}))}\, d\zeta \qquad (\forall f \in \mathcal{S}_A,\ \forall z \in \mathbb{D}), \quad \text{or} \\
T(f)(z) &= T(0)(z) + \overline{c_0 f(0)} + \int_{[0,z]} \overline{c_1 f'(\rho(\overline{\zeta}))}\, d\zeta \qquad (\forall f \in \mathcal{S}_A,\ \forall z \in \mathbb{D})
\end{aligned}$$

ここで、$\rho(\zeta) = \lambda \dfrac{\zeta - a}{\bar{a}\zeta - 1} \quad (\zeta \in \bar{\mathbb{D}})$ である。

逆に、上式で T を定義すると、T は $(\mathcal{S}_A, \|\cdot\|_\sigma) \to (\mathcal{S}_A, \|\cdot\|_\sigma)$ の全射な等距離写像になる。ここで、$T(0)$ は $\mathcal{S}_A$ の任意の元である。

2 Main result

今回、$\mathcal{S}_A$ に、上記と異なるノルム $\|\cdot\|_\Sigma$, $\|\cdot\|_C$ を導入したときの全射等距離写像の形を決定する事ができたので、それを報告する。

Theorem 2 ([7]). $T : (\mathcal{S}_A, \|\cdot\|_\Sigma) \to (\mathcal{S}_A, \|\cdot\|_\Sigma)$、または、$T : (\mathcal{S}_A, \|\cdot\|_C) \to (\mathcal{S}_A, \|\cdot\|_C)$ は (複素線形とは限らない) 全射な等距離写像とする。そのとき、定数 c, $\lambda \in \mathbb{T}$ が存在して、

$$\begin{aligned}
T(f)(z) &= T(0)(z) + cf(\lambda z) \qquad (\forall f \in \mathcal{S}_A,\ \forall z \in \mathbb{D}), \quad \text{or} \\
T(f)(z) &= T(0)(z) + \overline{cf(\overline{\lambda z})} \qquad (\forall f \in \mathcal{S}_A,\ \forall z \in \mathbb{D})
\end{aligned}$$

逆に、上式で T を定義すると、T は $(\mathcal{S}_A, \|\cdot\|_\Sigma) \to (\mathcal{S}_A, \|\cdot\|_\Sigma)$、または、$(\mathcal{S}_A, \|\cdot\|_C) \to (\mathcal{S}_A, \|\cdot\|_C)$ の全射な等距離写像になる。ここで、$T(0)$ は $\mathcal{S}_A$ の任意の元である。

詳しい証明については、[7] を参照していただきたい。

参考文献

[1] P.L. Duren, The theory of H^p spaces, Pure and Applied Mathematics, Vol. 38 Academic Press, New York-London, 1970.

[2] K. deLeeuw, W. Rudin and J. Wermer, *The isometries of some function spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **11** (1960), 694–698.

[3] A.J. Ellis, *Real characterizations of function algebras amongst function spaces*, Bull. London Math. Soc. **22** (1990), 381–385.

[4] R. Fleming and J. Jamison, *Isometries on Banach spaces: function spaces*, Chapman & Hall/CRC Monogr. Surv. Pure Appl. Math. 129, Boca Raton, 2003.

[5] F. Forelli, *The isometries of* H^p, Canad. J. Math. **16** (1964), 721–728.

[6] Takeshi Miura and Norio Niwa, *Surjective isometries on a Banach space of analytic functions on the open unit disc*, Nihonkai Math. J. **29** (2018), No.1, 53–67.

[7] Takeshi Miura and Norio Niwa, *Surjective isometries on a Banach space of analytic functions on the open unit disc, II*, preprint.

[8] W.P. Novinger and D.M. Oberlin, *Linear isometries of some normed spaces of analytic functions*, Can. J. Math. **37** (1985), 62–74.

[9] N.V. Rao and A.K. Roy, *Linear isometries of some function spaces*, Pacific J. Math. **38** (1971), 177–192.

Isomorphisms between scalar product spaces

College of Engineering, Ibaraki University　Toshikazu Abe

1　準備

$\mathbb{K}$ は $\mathbb{R}$ 若しくは $\mathbb{C}$ を表すものとする．$\mathbb{V}$ と $\mathbb{W}$ はそれぞれ $\mathbb{K}$ 係数の線形空間とするが，本稿では有限次元の場合しか扱わないため，$\mathbb{V}=\mathbb{K}^n, \mathbb{W}=\mathbb{K}^m$ としても一般性を失わない．

Definition 1. $\mathbb{V}$ 上の二次形式 $\mathscr{F}:\mathbb{V}\times\mathbb{V}\to\mathbb{K}$ が，以下の条件 (i), (ii) 両方を満たすとき，$\mathbb{V}$ 上のスカラー積であるという．

(i) 対称である．すなわち，任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{V}$ に対して $\mathscr{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\mathscr{F}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$ である．

(ii) 非退化である．すなわち，任意の $\boldsymbol{x}\in\mathbb{V}\setminus\{\boldsymbol{0}\}$ に対して，$\mathscr{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_x)\neq 0$ となる $\boldsymbol{y}_x\in\mathbb{V}$ が存在する．

線形空間 $\mathbb{V}$ とその上のスカラー積 $\mathscr{F}$ の組み合わせ $(\mathbb{V},\mathscr{F})$ をスカラー積空間と呼ぶ．

$\mathbb{K}^n$ 上の二次形式 $\mathscr{F}$ には表現行列 $F\in M_n(\mathbb{K})$ が存在し，

$$\mathscr{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})={}^t\boldsymbol{x}F\boldsymbol{y}\qquad(\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{K}^n)$$

の形で表されることが知られている．ここで，$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ は縦ベクトルで表し，${}^t\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の転置を表すものとする．二次形式の性質は表現行列に表れる．Definition 1 の条件 (i), (ii) はそれぞれ次と同値である．

(i)' 表現行列 F は対称行列である．

(ii)' 表現行列 F は正則である．

Definition 2. $\mathbb{K}$ 係数のスカラー積空間 $(\mathbb{V},\mathscr{F})$ と $(\mathbb{W},\mathscr{G})$ の間の写像 $f:\mathbb{V}\to\mathbb{W}$ が以下の 3 条件 (a), (b), (c) の全てを満たすとき，f はスカラー積空間としての同型写像であるという．

(a) f は全単射である．

(b) f は $\mathbb{K}$ 線型写像である．

(c) f はスカラー積を保存する．すなわち，

$$\mathscr{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\mathscr{G}(f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y}))\qquad(\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{V}).$$

$(\mathbb{V},\mathscr{F})$ と $(\mathbb{W},\mathscr{G})$ の間に同型写像が存在するとき，$(\mathbb{V},\mathscr{F})$ と $(\mathbb{W},\mathscr{G})$ はスカラー積空間として同型であるという．

2　主結果

主結果はスカラー積空間の同型写像の条件をより弱いもので置き換えることができるというものである．証明には表現行列を用いる．

Theorem 3. $\mathbb{K}$ 係数のスカラー積空間 $(\mathbb{V}, \mathscr{F})$ と $(\mathbb{W}, \mathscr{G})$ の間の写像 $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ が以下の２条件 (a)', (c) の両方を満たすとき，f は単射 $\mathbb{K}$ 線型写像であり，したがって，スカラー積空間としての同型写像である．

(a)' f は全射である．

(c) f はスカラー積を保存する．すなわち，

$$\mathscr{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \mathscr{G}(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y}))) \qquad (\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{V}).$$

A class of continuous functionals on Möbius gyrovector spaces

Institute of Science and Technology, Niigata University
Keiichi Watanabe

ジャイロ群，ジャイロベクトル空間の基礎事項については，例えば Ungar [U4] を参照していただきたい。Ungar の (real inner product) gyrovector space では交換法則，結合法則，分配法則がそのままでは成り立たない。Möbius gyrovector space については Hilbert 空間との間に強いアナロジーがはたらく。閉部分空間に関する直交分解，閉部分空間さらには閉凸集合の最近点，正規直交基底による直交展開，Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz 型の不等式，連続線形作用素などの counterpart が考察されている。これらについては近年の関数環報告集 [AW2], [W3], [W4] を参照していただきたい.

Abe and Hatori [AH] は，real inner product gyrovector space を一般化した generalized gyrovector space (GGV) という概念を導入した。単位的 C* 環の正の可逆元全体は real inner product gyrovector space ではない GGV の最も重要な例のひとつである。Abe [A1] は GGV をさらに一般化して normed gyrolinear space という概念を導入している。これらはこの文章の観点からはより難しい対象であり，ここでは扱わない。

ここでは Möbius gyrovector space に限定して，関数解析の基礎的な観点から連続線形汎関数の counterpart について述べることにする。これはまた，連続線形作用素の対応物へ自然に発展させられるだろう。これらについては 2017 年の関数環研究集会で，そしてそれ以降，何回か述べており，[W3] の繰り返しや修正されている箇所がある。

なお，複素内積空間に対する complex Möbius gyrovector space というものも考えられる (cf.[W9])。複素数によるジャイロスカラー倍については，real inner product gyrovector space における関係式が単純には拡張され得ないことが，Abe によって示されている (cf.[A2])。

連続なジャイロ線形汎関数の自明性

定理. **[W8]** $\mathbb{V}$ を可分実 Hilbert 空間で $\dim \mathbb{V} \geq 2$ とする。開球 $\mathbb{V}_1$ および開区間 $(-1,1)$ の両方で Ungar による Poincaré の距離 h を考える。連続写像 $f : \mathbb{V}_1 \to (-1,1)$ が

$$f(x \oplus y) = f(x) \oplus f(y) \quad (x, y \in \mathbb{V}_1)$$

を満たすならば，任意の $x \in \mathbb{V}_1$ に対して $f(x) = 0$ である。

このように，単純に $\oplus$ を保存するという条件は，メビウスジャイロベクトル空間上の連続汎関数に対しては，ある意味で強すぎる。

固定されたベクトルとの内積の値による汎関数の基本性質

定理. [**W8**] $\mathbb{V}$ を実内積空間，$c \in \mathbb{V}$ を $||c|| \leq 1$ なる元とし，

$$f(x) = \langle x, c \rangle \quad (x \in \mathbb{V})$$

とする。このとき，

(i) f のメビウスジャイロベクトル空間 $\mathbb{V}_1$ への制限は，$\mathbb{V}_1$ および $(-1, 1)$ で距離 h を考えると Lipschitz 連続で，その Lipschitz 定数は $||c||$ である。

(ii) 任意の $\epsilon > 0$, $x, y \in \mathbb{V}$ および $r \in \mathbb{R}$ に対し，汎関数 f は $s \to \infty$ で次を満たす：

$$\begin{aligned} -f\,(x+y)\ \oplus_s f\,(x \oplus_s y) &= o(s^{-2+\epsilon}) \\ -\{f(x) + f(y)\} \oplus_s \{f(x) \oplus_s f(y)\} &= o(s^{-2+\epsilon}) \\ -f(rx) \oplus_s f\,(r \otimes_s x) &= o(s^{-2+\epsilon}) \\ -rf(x) \oplus_s r \otimes_s f(x) &= o(s^{-2+\epsilon}) \end{aligned}$$

Riesz 型の表現定理

定義. $\mathbb{V}$ を実内積空間とする。写像 $f : \mathbb{V}_1 \to (-1, 1)$ と正数 s に対して写像 $f_s : \mathbb{V}_s \to (-s, s)$ を

$$f_s(x) = sf\left(\frac{x}{s}\right) \quad (x \in \mathbb{V}_s)$$

によって定める。

$f : \mathbb{V}_1 \to (-1, 1)$ が漸近的ジャイロ線形であるとは，$x, y \in \mathbb{V}$ および $r \in \mathbb{R}$ に対して，上で定義された f_s が以下を満たすことをいう：

$$\begin{aligned} -\{f_s(x) \oplus_s f_s(y)\} \oplus_s f_s\,(x \oplus_s y) \to 0 \quad (s \to \infty) \\ -\{r \otimes_s f_s(x)\} \oplus_s f_s\,(r \otimes_s x) \to 0 \quad (s \to \infty) \end{aligned}$$

前述の定理より，固定されたノルム 1 以下のベクトルとの内積の値をとる（有界線形）汎関数は漸近的ジャイロ線形である。

定理. [**W8**] $\mathbb{V}$ を実 Hilbert 空間とする。$f : \mathbb{V}_1 \to (-1, 1)$ が漸近的ジャイロ線形かつ，$\mathbb{V}_1$ および $(-1, 1)$ で距離 h を考えると Lipschitz 連続で Lipschitz 定数が $L(f) \leq 1$ であるものとする。さらに，

$$\text{任意の元 } x \in \mathbb{V} \text{ に対して } \lim_{s \to \infty} f_s(x) \text{ が実数として存在する}$$

と仮定する。このとき，$c \in \mathbb{V}$ が一意に存在して

$$\lim_{s \to \infty} f_s(x) = \langle x, c \rangle \quad (x \in \mathbb{V})$$

および $||c|| \leq L(f)$ が成り立つ。

有界線形汎関数に対応する，メビウスジャイロベクトル空間上の汎関数のあるクラス

定理. [**W8**] $\mathbb{V}$ を実 Hilbert 空間，$\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ を $\mathbb{V}$ の正規直交基底とし，任意の元 $x \in \mathbb{V}_1$ に対して

$$x = \sum_{j=1}^{\infty}{}^{\oplus}\, r_j \otimes \frac{e_j}{2}$$

を直交ジャイロ展開とする。このとき

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} r_j^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\tanh^{-1}||x||}{\tanh^{-1}\frac{1}{2}}$$

が成り立つ。

定理. [**W8**] $\mathbb{V}$ を実 Hilbert 空間，$\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ を $\mathbb{V}$ の正規直交基底，$\{c_j\}_{j=1}^{\infty}$ を 2 乗総和可能な実数列とする。このとき $f : \mathbb{V}_1 \to (-1, 1)$ を

$$f(x) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} c_j r_j\right) \otimes \frac{1}{2} \quad (x \in \mathbb{V}_1)$$

によって定義することができ，f は距離 h に関して連続で，$s \to \infty$ のとき以下を満たす：

$$f_s(x \oplus_s y) \to \langle x + y, c\rangle$$

$$f_s(x) \oplus_s f_s(y) \to \langle x, c\rangle + \langle y, c\rangle$$

$$f_s(r \otimes_s x) \to \langle rx, c\rangle$$

$$r \otimes_s f_s(x) \to r\langle x, c\rangle$$

ここで $c = \sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j$ である。特に f は漸近的ジャイロ線形である。

参考文献

[A1] T. Abe, Normed gyrolinear spaces: A generalization of normed spaces based on gyrocommutative gyrogroups, Mathematics Interdisciplinary Research **1** (2016), issue 1, 143–172.

[A2] T. Abe, Complex scalar multiplications on the Poincaré disk, preprint.

[AH] T. Abe and O. Hatori, Generalized gyrovector spaces and a Mazur-Ulam theorem. Publ. Math. Debrecen **87**(2015), no. 3-4, 393–413.

[AW] T. Abe and K. Watanabe, Finitely generated gyrovector subspaces and orthogonal gyrodecomposition in the Möbius gyrovector space, J. Math. Anal. Appl. **449** (2017), no. 1, 77–90.

[AW2] T. Abe and K. Watanabe, ジャイロベクトル空間やその一般化の公理と部分空間について, 2016 年度　関数環研究集会報告集.

[H] O. Hatori, Examples and applications of generalized gyrovector spaces, Results Math. **71**(2017), no. 1-2, 295–317.

[U1] A. A. Ungar, Thomas rotation and the parametrization of the Lorentz transformation group, Found. Phys. Lett. **1**(1988), no. 1, 57–89.

[U2] A. A. Ungar, Group-like structure underlying the unit ball in real inner product spaces, Results Math. **18**(1990), no. 3-4, 355–364.

[U3] A. A. Ungar, Extension of the unit disk gyrogroup into the unit ball of any real inner product space, J. Math. Anal. Appl. **202**(1996), no. 3, 1040–1057.

[U4] A. A. Ungar, *Analytic Hyperbolic Geometry and Albert Einstein's Special Theory of Relativity*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 2008.

[W1] K. Watanabe, A confirmation by hand calculation that the Möbius ball is a gyrovector space, Nihonkai Math. J. **27**(2016), 99–115.

[W2] K. Watanabe, Orthogonal Gyroexpansion in Möbius Gyrovector Spaces, J. Funct. Spaces Vol. 2017, Article ID 1518254, 13 pages.

[W3] K. Watanabe, On a counterpart to the Riesz representation theorem in the Möbius gyrovector space, 2017 年度　関数環研究集会報告集.

[W4] K. Watanabe, Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz type inequalities related to Möbius operations, 2018 年度　関数環研究集会報告集.

[W5] K. Watanabe, A Cauchy type inequality for Möbius operations, J. Inequal. Appl. (2018) 2018: 97, 9 pages.

[W6] K. Watanabe, A Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz type inequality related to the Möbius addition, J. Math. Inequal. **12**, no. 4 (2018), 989–996.

[W7] K. Watanabe, Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz type inequalities related to Möbius operations, J. Inequal. Appl. (2019) 2019: 179, 18 pages.

[W8] K. Watanabe, A class of continuous functionals on Möbius gyrovector spaces, preprint.

[W9] K. Watanabe, On a notion of complex Möbius gyrovector spaces, preprint.

Preservers of point-reflection on generalized gyrovector spaces

Graduate School of Science and Technology, Niigata University
Satoshi Takahashi

1　導入

ノルム空間 $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ において, $f : X \to Y$ が任意の x, y に対して, $\|f(x) - f(y)\|_Y = \|x - y\|_X$ を満たす時, f は等距離写像であるという．f はノルムから導かれる距離を保存する写像である．等距離写像の研究結果の Mazur-Uram の定理 [6] は, 古くからよく知られている結果のひとつである．

定理 1.1 (Mazur-Uram の定理 [6])**.** *実線形ノルム空間 $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ において, 写像 $S : X \to Y$ が全射等距離写像ならば, $S - S(0)$ は実線形写像である．*

この定理に, 対象移動の考え方を用いて簡明な証明を与えたのが Väisälä[8] である．対称移動に着目し, Hatori, Hirasawa, Miura, Molnár[4] は inverted Jordan triple product と呼ばれる $yx^{-1}y$ という演算について閉じている群の部分集合 (この様な部分集合を本論文では twisted subgroup と呼ぶこととする) に対して, Mazur-Ulam の定理の一般化を得た．ユークリッド空間の加法群において inverted Jordan triple product の幾何的な意味は, 明らかに, y を中心とした x の対称移動である．この Mazur-Ulam の定理の一般化を証明するにあたり, [4] では距離を一般化した写像 $d_X : X \times X \to \mathbb{R}$ を保存する d-保存写像 T と, X 内での一種の対称移動を表している inverted Jordan triple product $yx^{-1}y$ について, ある条件下で $T(yx^{-1}y) = T(y)(T(x))^{-1}T(y)$ が成り立つことが示された．これは一種の等距離写像である d-保存写像 T が一種の対称移動である inverted Jordan triple product を保存するという結果である．

また Abe and Hatori[2] は, 内積空間を一般化したジャイロベクトル空間を更に一般化した, 一般化ジャイロベクトル空間と呼ばれる空間で, Mazur-Ulam の定理の一般化を得た．これを示すにあたって, [6] では一般化ジャイロベクトル空間内での $\boldsymbol{z}$ を中心とした $\boldsymbol{x}$ の一種の対称移動を $\psi_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{x}) = 2 \otimes \boldsymbol{z} \ominus \boldsymbol{x}$ という写像で表しており, $\psi_{\boldsymbol{z}}$ はユークリッド空間での対称移動と同等の性質を持つことが示されている．

本稿では, 一般化ジャイロベクトル空間内での対称移動 $\psi_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{x}) = 2 \otimes \boldsymbol{z} \ominus \boldsymbol{x}$ に関して, 一種の等

距離写像であるジャイロ距離保存写像が対称移動を保存するかどうかについて考察する. twisted subgroup が可換の場合は, $yx^{-1}y$ と y^2x^{-1}(もしくは $x^{-1}y^2$) は同値であるが, 一般に非可換の場合では, d-保存写像 T が y^2x^{-1}(もしくは $x^{-1}y^2$) を保存するかどうかは分かっていない. しかし, 一般化ジャイロベクトル空間の間のジャイロ距離保存写像は, 対称移動 $\psi_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{x}) = 2 \otimes \boldsymbol{z} \ominus \boldsymbol{x}$ ($2 \otimes \boldsymbol{y}$ を $\boldsymbol{y}^2$, $\ominus \boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{x}^{-1}$ と定義すると, $2 \otimes \boldsymbol{y} \ominus \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^2\boldsymbol{x}^{-1}$ となる) を保存するという結果を得たので, 報告したい. 本稿では, [4] 内での手法を一般化ジャイロベクトル空間に対して適用できる様に改良し, ジャイロ群特有の性質用いて, 対称移動が保存されることを示す.

2 基本的な定義と諸性質

定義 2.1 (ジャイロ群 (gyrogroup)[7])**.** 以下の条件を満たすマグマ $(G, \oplus)$ をジャイロ群いう. 左単位元と呼ばれる少なくとも 1 つの元 $\mathbf{0} \in G$ が存在し, 任意の $\boldsymbol{a} \in G$ に対して,

$(G1)$ $\mathbf{0} \oplus \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$

を満たす. また各 $\boldsymbol{a} \in G$ に対して, 左逆元と呼ばれる $\ominus \boldsymbol{a} \in G$ が存在して, $(G1)$ を満たす $\mathbf{0} \in G$ に対して,

$(G2)$ $\ominus \boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{a} = \mathbf{0}$

を満たす. 更に, 任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in G$ に対して $gyr[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\boldsymbol{c} \in G$ が一意に存在して, $\oplus$ は左ジャイロ結合法則

$(G3)$ $\boldsymbol{a} \oplus (\boldsymbol{b} \oplus \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b}) \oplus gyr[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\boldsymbol{c}$

を満たす. $\boldsymbol{c} \mapsto gyr[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\boldsymbol{c}$ で与えられる写像 $gyr[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] : G \to G$ はマグマ $(G, \oplus)$ の自己同型写像である. マグマ $(G, \oplus)$ の自己同型写像全体の集合を $Aut(G, \oplus)$ とする.

$(G4)$ $gyr[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \in Aut(G, \oplus)$

また G の自己同型写像 $gyr[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ は G の元 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in G$ から生成されるジャイロ自己同型写像と呼ばれる. $gyr : G \times G \to Aut(G, \oplus)$ は G のジャイレーター ($gyrator$) と呼ばれる. また, 任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in G$ によって生成されるジャイロ自己同型写像 $gyr[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ は左ループ性

$(G5)$ $gyr[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = gyr[\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}]$

を持つ.

定義 2.2 (ジャイロ可換ジャイロ群 (gyrocommutative gyrogroup)[7])**.** 任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in G$ に対して, ジャイロ群 $(G, \oplus)$ が以下の性質, ジャイロ交換法則

$(G6)$ $\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b} = gyr[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}](\boldsymbol{b} \oplus \boldsymbol{a})$

を満たすとき, $(G, \oplus)$ はジャイロ可換であるという.

定義 2.3 (余加算 (Coaddition)[7])**.** $(G, \oplus)$ をジャイロ群とする. ジャイロ群の余加算 $\boxplus$ は, 任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in G$ に対して,

$$\boldsymbol{a} \boxplus \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \oplus gyr[\boldsymbol{a}, \ominus \boldsymbol{b}]\boldsymbol{b} \tag{2.2}$$

によって与えられる, 第 2 の二項演算である.

また $\boldsymbol{a} \boxminus \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \boxplus (\ominus \boldsymbol{b})$ で $\boldsymbol{a} \boxminus \boldsymbol{b}$ を定義する. (2.2) で $\ominus \boldsymbol{b}$ で $\boldsymbol{b}$ を置き換え, $gyr[\boldsymbol{a}, \ominus \boldsymbol{b}]$ が自己同型写像であることに注意すると, 任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in G$ に対して,

$$\boldsymbol{a} \boxminus \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \ominus gyr[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\boldsymbol{b} \tag{2.3}$$

が得られる.

定義 2.4 (2-divisible ジャイロ群 [7])**.** $(G, \oplus)$ をジャイロ群とする. $\boldsymbol{g} \in G$ の $\dfrac{1}{2}$ は, $\dfrac{1}{2} \otimes \boldsymbol{g}$ と書き, $\dfrac{1}{2} \otimes \boldsymbol{g} \oplus \dfrac{1}{2} \otimes \boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}$ を満たす G の元である.

任意の元が $\dfrac{1}{2}$ を持つジャイロ群を 2-*divisible* ジャイロ群という.

定義 2.5 (2-torsion free ジャイロ群 [7])**.** $(G, \oplus)$ をジャイロ群とする. $\boldsymbol{g} \oplus \boldsymbol{g} = 0$ を満たす元 $\boldsymbol{g} \in G$ を 2-*torsion element* という. G の 2-*torsion element* が $\boldsymbol{g} = 0$ だけの時, $(G, \oplus)$ は 2-*torsion free* であるという.

定義 2.6 (一般化ジャイロベクトル空間 (Generalized gyrovector space)[2])**.** $(G, \oplus)$ を, 写像 $\otimes : \mathbb{R} \times G \to G$ を持つジャイロ可換ジャイロ群とする. ϕ を G から実ノルム空間 $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$ への単射とする. 以下の $(GGV0)$ から $(GGV8)$ の条件を満たす $(G, \oplus, \otimes, \phi)$ (もしくは簡単のため $(G, \oplus, \otimes)$) を一般化ジャイロベクトル空間 (以下省略のため GGV とする) という. 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{a} \in G$ 対して,

$(GGV0)$ $\|\phi(gyr[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]\boldsymbol{a})\| = \|\phi(\boldsymbol{a})\|$

全ての $\boldsymbol{a} \in G$ に対して,

$(GGV1)$ $1 \otimes \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$

を満たす. 任意の $\boldsymbol{a} \in G$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ に対して,

$(GGV2)$ $(r_1 + r_2) \otimes \boldsymbol{a} = (r_1 \otimes \boldsymbol{a}) \oplus (r_2 \otimes \boldsymbol{a})$

を満たす. 任意の $\boldsymbol{a} \in G$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ に対して,

$(GGV3)$ $(r_1 r_2) \otimes \boldsymbol{a} = r_1 \otimes (r_2 \otimes \boldsymbol{a})$

を満たす．任意の $\boldsymbol{a} \in G/\{\boldsymbol{e}\}$, $r \in \mathbb{R}/\{0\}$ に対して，

$(GGV4)$ $\phi(|r| \otimes \boldsymbol{a})/\|\phi(r \otimes \boldsymbol{a})\| = \phi(\boldsymbol{a})/\|\phi(\boldsymbol{a})\|$

を満たす．ただし e はジャイロ群 $(G, \oplus)$ の単位元である．任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{a} \in G, r \in \mathbb{R}$ に対して，

$(GGV5)$ $gyr[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}](r \otimes \boldsymbol{a}) = r \otimes gyr[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]\boldsymbol{a}$

を満たす．任意の $\boldsymbol{v} \in G$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ に対して，id_G を G 上の恒等写像とすると，

$(GGV6)$ $gyr[r_1 \otimes \boldsymbol{v}, r_2 \otimes \boldsymbol{v}] = id_G$

を満たす．

$(GGVV)$ $\{\|\phi(G)\| = \{\pm\|\phi(\boldsymbol{a})\| \in \mathbb{R} : \boldsymbol{a} \in G\}$ はベクトルのとしての和 $\oplus'$ とスカラー倍 $\otimes'$ を持つ実 1 次元ベクトル空間である．

任意の $\boldsymbol{a} \in G$, $r \in \mathbb{R}$ に対して，

$(GGV7)$ $\|\phi(r \otimes \boldsymbol{a})\| = |r| \otimes' \|\phi(\boldsymbol{a})\|$

を満たす．任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in G$ に対して，

$(GGV8)$ $\|\phi(\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b})\| \leq \|\phi(\boldsymbol{a})\| \oplus' \|\phi(\boldsymbol{b})\|$

を満たす．

補題 2.7. G が GGV ならば 2-*divisible* かつ 2-*torsion free* である．

Proof. (2-*divisible* であることの証明) GGV の定義 $(GGV2)$ では

$$(r_1 + r_2) \otimes \boldsymbol{a} = (r_1 \otimes \boldsymbol{a}) \oplus (r_2 \otimes \boldsymbol{a})$$

である．そこで $r_1 = r_2 = \dfrac{1}{2}$ とすればよい．
(2-*torsion free* であることの証明) $\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{a} = 2 \otimes \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ と仮定する．GGV の定義 $(GGV3)$ 式

$$(r_1 r_2) \otimes \boldsymbol{a} = r_1 \otimes (r_2 \otimes \boldsymbol{a})$$

より，$\boldsymbol{a} = (\dfrac{1}{2} \times 2) \otimes \boldsymbol{a} = \dfrac{1}{2} \otimes (2 \otimes \boldsymbol{a}) = \dfrac{1}{2} \otimes \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ である．よって $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ である． □

定義 2.8 (ジャイロ中点 (The gyromidpoint)[2])**.** $(G, \oplus, \otimes)$ を GGV とする．2 点 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in (G, \oplus, \otimes)$ のジャイロ中点 $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ を $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \dfrac{1}{2} \otimes (\boldsymbol{a} \boxplus \boldsymbol{b})$ と定義する．ただし，$\boxplus$ はジャイロ群 $(G, \oplus)$ の余加算である．

また $\boxplus$ が可換であるため, $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\boldsymbol{p}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$ が成り立つ.

3　GGV 上の対象移動保存性

本章では主定理を証明するための条件を [4] の条件を参考に改良し, 定義する. 定義する際に, GGV 上の対称移動について述べる必要があるため, 命題 [2, Proposition 16] を紹介する. また講演時は主定理の仮定にいくつかの条件が課されていたが, 今日までの研究である程度解消されたので, 改善されたものを主定理として紹介する. 以下 G, G_1, G_2 を GGV とする.

定義 3.1 (GGV 上のジャイロ距離 (gyrometric)[2]). 任意の $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in G$ に対して, $\rho(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\|\phi(\boldsymbol{a}\ominus\boldsymbol{b})\|$ とする. この ρ を G 上のジャイロ距離と呼ぶ. ジャイロ距離 ρ は以下の等式を満たす.

$$\rho(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\rho(\ominus\boldsymbol{a},\ominus\boldsymbol{b})=\rho(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}) \tag{4}$$

特に, $(G,\oplus,\otimes)$ が実ノルム空間ならば, ジャイロ距離はノルムから導かれる距離である.

補題 3.2 (ジャイロ距離ジャイロ三角不等式). 任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in G$ に対して, ジャイロ距離はジャイロ三角不等式

$$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\leq\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\oplus'\rho(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})$$

を満たす.

命題 3.3 ([2, Proposition 16]). $\boldsymbol{z}\in G$ に対して, $\psi_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{x})=2\oplus\boldsymbol{z}\ominus\boldsymbol{x}$ を満たす全単射な写像 $\psi_{\boldsymbol{z}}:G\to G$ は以下の性質を満たす. 任意の $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}\in G$ に対して,

(p1) ${\psi_{\boldsymbol{z}}}^{-1}=\psi_{\boldsymbol{z}}$;
(p2) $\rho(\psi_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{a}),\psi_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{b})=\rho(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$;
(p3) $\psi_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{a}$ と同値である;
(p4) $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{p}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ ならば, $\psi_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{b}$ かつ, $\psi_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}$;
(p5) $\rho(\psi_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{a}),\boldsymbol{a})=2\otimes'\rho(\boldsymbol{a},\boldsymbol{z})$.

定義 3.4 (ジャイロ距離保存写像 (The gyrometric-preserving map)[2]). $(G_1,\oplus_1,\otimes_1)$ と $(G_2,\oplus_2,\otimes_2)$ は GGV とし, ρ_1,ρ_2 は各 GGV のジャイロ距離とする. 任意の $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in G_1$ に対して, $\rho_2(T(\boldsymbol{a}),T(\boldsymbol{b}))=\rho_1(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ を満たす $T:G_1\to G_2$ をジャイロ距離保存写像という.

定義 3.5 (条件 $B(\cdot,\cdot)$). $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in G$ をとり, 固定する. $GGV(G,\oplus,\otimes,\rho)$ が以下の (1) から (3) の条件を満たすとき, $(G,\oplus,\otimes,\rho)$ は条件 $B(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ を満たすという.

(1) 任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in G$ に対して,

$$\rho(2\otimes\boldsymbol{x}\ominus\boldsymbol{b},2\otimes\boldsymbol{y}\ominus\boldsymbol{b})=\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

が成り立つ;

(2) $\sup\{\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}) : \boldsymbol{x} \in L_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\} < \infty$ が成り立つ．ただし

$$L_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}} = \{\boldsymbol{x} \in G : \rho(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}) = \rho(2 \otimes \boldsymbol{b} \ominus \boldsymbol{a},\boldsymbol{x}) = \rho(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\};$$

(3) 任意の $\boldsymbol{x} \in L_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}$ に対して，

$$\rho(2 \otimes \boldsymbol{x} \ominus \boldsymbol{b},\boldsymbol{x}) \geq K \otimes' \rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{b})$$

を満たす $K > 1$ が存在する．

定義 3.6 (条件 $C_2(\cdot,\cdot)$)**.** $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b} \in G$ をとり，固定する．$GGV(G,\oplus,\otimes,\rho)$ が以下の条件を満たすとき，$(G,\oplus,\otimes,\rho)$ は条件 $C_2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ を満たすという．任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in G$ に対して，

$$2 \otimes \boldsymbol{c} \ominus \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b},\ \rho(2 \otimes \boldsymbol{c} \ominus \boldsymbol{x}, 2 \otimes \boldsymbol{c} \ominus \boldsymbol{y}) = \rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

を満たす $\boldsymbol{c} \in G$ が存在する．

定理 3.7 (主定理)**.** $(G_1,\oplus_1,\otimes_1)$ と $(G_2,\oplus_2,\otimes_2)$ を GGV とし，ρ_1,ρ_2 をそれぞれ G_1, G_2 のジャイロ距離とする．任意の $a,b \in (G_1,\oplus_1,\otimes_1)$ をとり固定する．$T : G_1 \to G_2$ を全単射ジャイロ距離保存写像とすると，

$$T(2 \otimes_1 \boldsymbol{b} \ominus_1 \boldsymbol{a}) = 2 \otimes_2 T(\boldsymbol{b}) \ominus_2 T(\boldsymbol{a})$$

が成り立つ．

Proof. 任意の $\boldsymbol{x} \in G_1$ に対して，$\psi_{\boldsymbol{b}}(x) = 2 \otimes_1 \boldsymbol{b} \ominus_1 \boldsymbol{x}$ とおく．その時，$\psi_{\boldsymbol{b}} : G_1 \to G_1$ は well defined であり，命題 3.3. より，$\psi_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b})$, $\psi_{\boldsymbol{b}} \circ \psi_{\boldsymbol{b}} = id_{G_1}$ が成り立つ．さらにジャイロ距離ジャイロ三角不等式より，$B(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ の (2) を満たすので，$\psi_{\boldsymbol{b}}$ は [4, Corollary 3.10] の仮定を満たしている．

また，任意の $\boldsymbol{x} \in G_2$ に対して，$\varphi(\boldsymbol{x}) = 2 \otimes_2 \boldsymbol{c} \ominus_2 \boldsymbol{x}$ とおく．ただし $\boldsymbol{c} \in G_2$ は

$$\boldsymbol{c} = \frac{1}{2} \otimes_2 (T(\boldsymbol{a}) \boxplus_2 T(2 \otimes_1 \boldsymbol{b} \ominus_1 \boldsymbol{a}))$$

であり，$2 \otimes_2 \boldsymbol{c} \ominus_2 T(\boldsymbol{a}) = T(2 \otimes_1 \boldsymbol{b} \ominus_1 \boldsymbol{a})$ が成り立っている．

そして，$\varphi \circ \varphi = id_{G_2}$ であり，$\varphi : G_2 \to G_2$ は well defined な全単射ジャイロ距離保存写像である．

簡単な計算により，$\varphi(T(\boldsymbol{a})) = T(\psi_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{a}))$ と $\varphi(T(\psi_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{a}))) = T(\boldsymbol{a})$ が成り立つ．
実際，$\boldsymbol{c}$ の定め方により，

$$\varphi(T(\boldsymbol{a})) = 2 \otimes_2 \boldsymbol{c} \ominus_2 T(\boldsymbol{a}) = T(2 \otimes_1 \boldsymbol{b} \ominus_1 \boldsymbol{a}) = T(\psi_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{a}))$$

が成り立つ．left cancelation law と $\boldsymbol{c}$ の定め方により，

$$\varphi(T(\psi_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{a}))) = 2 \otimes_2 \boldsymbol{c} \ominus_2 (T(2 \otimes_1 \boldsymbol{b} \ominus_1 \boldsymbol{a})) = 2 \otimes_2 \boldsymbol{c} \ominus_2 (2 \otimes_2 \boldsymbol{c} \ominus_2 T(\boldsymbol{a})) = T(\boldsymbol{a})$$

が成り立つ．ここで [4, Theorem 2.4] より，

$$\rho_2(\varphi(T(\boldsymbol{b})), T(\boldsymbol{b})) = 0$$

を得る．さらに $\varphi(T(\boldsymbol{b})) = T(\boldsymbol{b}) \Leftrightarrow 2 \otimes_2 \boldsymbol{c} \ominus_2 T(\boldsymbol{b}) = T(\boldsymbol{b})$ を満たす．また補題 2.7 より GGV は 2-*divisible* かつ 2-*torsion free* である．よって right cancelation law, 左ループ性, [7, Theorem 3.34] より，

$$\begin{aligned}
2 \otimes_2 \boldsymbol{c} \ominus_2 T(\boldsymbol{b}) &= T(\boldsymbol{b}) \\
2 \otimes_2 \boldsymbol{c} \ominus_2 T(\boldsymbol{b}) \boxplus_2 T(\boldsymbol{b}) &= T(\boldsymbol{b}) \boxplus_2 T(\boldsymbol{b}) \\
2 \otimes_2 \boldsymbol{c} &= T(\boldsymbol{b}) \oplus_2 gyr[T(\boldsymbol{b}), \ominus_2 T(\boldsymbol{b})]T(\boldsymbol{b}) \\
&= T(\boldsymbol{b}) \oplus_2 gyr[T(\boldsymbol{b}) \ominus_2 T(\boldsymbol{b}), \ominus_2 T(\boldsymbol{b})]T(\boldsymbol{b}) \\
&= T(\boldsymbol{b}) \oplus_2 gyr[0, \ominus_2 T(\boldsymbol{b})]T(\boldsymbol{b}) \\
&= T(\boldsymbol{b}) \oplus_2 T(\boldsymbol{b}) \\
&= 2 \otimes_2 T(\boldsymbol{b}) \\
2 \otimes_2 \boldsymbol{c} &= 2 \otimes_2 T(\boldsymbol{b}) \\
\boldsymbol{c} &= T(\boldsymbol{b})
\end{aligned}$$

を得る．したがって，

$$\begin{aligned}
T(2 \otimes_1 \boldsymbol{b} \ominus_1 \boldsymbol{a}) &= 2 \otimes_2 \boldsymbol{c} \ominus_2 T(\boldsymbol{a}) \\
&= 2 \otimes_2 T(\boldsymbol{b}) \ominus_2 T(\boldsymbol{a}) \\
T(2 \otimes_1 \boldsymbol{b} \ominus_1 \boldsymbol{a}) &= 2 \otimes_2 T(\boldsymbol{b}) \ominus_2 T(\boldsymbol{a})
\end{aligned}$$

が成り立つ． □

参考文献

[1] T. Abe, Gyrometric Preserving Maps on Einstein Gyrogroups, Möbius Gyrogroups, Proper Verocity Gyrogroups, Nonlinear Functional Analysis and Applications, Vol. 19, No. 1 (2014), 1–17.

[2] T. Abe and O. Hatori, Generalized gyrovector spaces and a Mazur-Ulam theorem. Publ. Math. Debrecen. **87** (2015), 393–413.

[3] O. Hatori, Examples and Applications of Generalized Gyrovector Spaces, Results Math. **71** (2017), no. 1-2, 295–317.

[4] O. Hatori, G. Hirasawa, T. Miura and L. Molnar, Isometries and maps compatible with inverted Jordan triple products on groups, Tokyo J. Math. **35** (2012), 385–410.

[5] S. Honma and T. Nogawa, Isometries of the geodesic distances for the space of invertible positive operators and matrices. Linear Algebra Appl. **444** (2014) 152–164.

[6] S. Mazur and S. Ulam, Sur les transformationes isométriques d'espaces vectoriels normés, C. R. Acad. Sci. Paris. **194** (1932), 946–948.

[7] A. A. Ungar, Analytic Hyperbolic Geometry and Albert Einstein's Special Theory of Relativity, World Scientific, 2008.

[8] J. Väisälä, A Proof of the Mazur-Ulam Theorem, The American Mathematical Monthly, vol.110, No.7 (2003), 633–635.

A Jarosz's theorem for real-linear isometries

新潟大学大学院自然科学研究科数理物質科学専攻

Graduate School of Science and Technology, Niigata University

廣田 大輔
Daisuke Hirota

1 はじめに

Mazur-Ulam [9] の定理にもあるように, 全射等距離写像が自動的に保存する線形構造は複素線形構造ではなく, 実線形構造であるということから, 等距離写像の構造の決定において, 実線形の場合も研究することが重要であると考えた。そこで, 実線形写像に対する Jarosz [8] の定理を研究し, 二つの単位的半単純可換 Banach 環の間の単位元を保存する全射実線形等距離写像の構造を条件付きで決定することができたので, それを報告する。

2 定義

定義 1 (関数空間 , regular subspace)**.** X をコンパクト Hausdorff 空間とし, $C(X)$ を X 上の複素数値連続関数全体の集合とする。A を $C(X)$ の関数空間とし, $\mathrm{Ch}(A)$ を A の Choquet boundary とする。A を 1 を含む $C(X)$ の線形部分空間とする。A が任意の正の数 $\varepsilon > 0$, 任意の $x_0 \in \mathrm{Ch}(A)$, 任意の x_0 の開近傍 U_0 に対して以下の条件を満たす元 $f \in A$ が存在するとき, A を regular subspace であるという。

- $\|f\|_\infty = 1 + \varepsilon$
- $f(x_0) = 1$
- 任意の $x \in X \setminus U_0$に対して, $|f(x)| < \varepsilon$

定義 2 (uniform closed function algebra)**.** X を局所コンパクト Hausdorff 空間とし, $C_0(X)$ を無限遠点で消える複素数値連続関数全体の多元環とし, A をその部分多元環とする。以下の条件をみたす A を X 上の uniformly closed function algebra という。

- A は sup norm に関して閉である。
- 任意の X の元 $x, y \in X(x \neq y)$ に対して, $f(x) \neq f(y)$ となる $f \in A$ が存在する。また, 任意の元 $x \in X$ に対して, $g(x) \neq 0$ となる $g \in A$ が存在する。

定義 3 (one-invariant なセミノルム)**.** X をコンパクト Hausdorff 空間とし, A を $C(X)$ の関数空間とする。p を A 上のセミノルムとし, さらに以下の条件を満たすとき, p を one-invariant なセミノルムという。

- 任意の $f \in A$ について, $p(f+1) = p(f)$

定義 4 (p-norm)**.** $\mathbb{P}$ を二次元ユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$上の $(1,0)$ が 1 に対応するノルム全体とする。任意の $p \in \mathbb{P}$ に対して,

$$D(p) = \lim_{t \to 0+} \frac{p((1,t)) - 1}{t}$$

と定める。(この極限の存在の証明については例えば, [13] の第 3 節の Theorem 3.22 にて示されている。) X をコンパクト Hausdorff 空間とし, A を $C(X)$ の関数空間とし, $\|\cdot\|$ を A 上のノルム, $|||\cdot|||$ を A 上の one-invariant なセミノルムとする。このとき, ある $p \in \mathbb{P}$ を用いて, $\|\cdot\|$ が

$$\|a\| = p(\|a\|_\infty, |||\, a \,|||)\ (a \in A)$$

となるとき $\|\cdot\|$ を A 上の p-norm という。

3 p-norm の構造を持つ単位的半単純可換 Banach 環の例

p-norm の構造をもつ単位的半単純可換 Banach 環として以下のような例がある。まず, $\mathbb{R}^2$ 上のノルムとして

$$p_1(x,y) = |x| + |y| \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

とする。このとき, $p_1 \in \mathbb{P}$ である。

例 1. $A = C^1([0,1])$ を

$$A = C^1([0,1]) \equiv \{f \in C([0,1]) \mid f \text{ は } [0,1] \text{ 上で微分可能で } f' \text{は } [0,1] \text{ 上で連続である }\}$$

とし, 任意の $f \in A$ に対して, $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty = p_1(\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty)$ とする。このとき, $(A, \|\cdot\|)$ は p-norm の構造をもつ単位的半単純可換 Banach 環である。

例 2. (X, d_X) をコンパクト距離空間とする。

$$A = \mathrm{Lip}(X) \equiv \{f \in C(X) \mid L(f) \equiv \sup_{\substack{x,y \in Y \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{d_Y(x,y)} < \infty\}$$

とし, 任意の $f \in A$ に対して, $\|f\|_\Sigma \equiv \|f\|_\infty + L(f) = p_1(\|f\|_\infty, L(f))$ とすると, $(A, \|\cdot\|_\Sigma)$ は p-norm の構造をもつ単位的半単純可換 Banach 環である。

4 Jarosz の定理と p-norm の構造を持つ単位的半単純可換 Banach 環の間の全射複素線形等距離写像の構造

Jarosz は以下の定理を示した。 [8]

定理 (Jarosz)**.** X, Y をコンパクト Hausdorff 空間とし, A, B をそれぞれ $C(X)$ と $C(Y)$ の複素線形部分空間とし, p, $q \in \mathbb{P}$ とする。ここで, A, B は定数関数を含み, $\|\cdot\|_A, \|\cdot\|_B$ をそれぞれ A, B 上の p-norm, q-norm とし, $T : (A, \|\cdot\|_A) \to (B, \|\cdot\|_B)$ を単位的全射等距離複素線形写像と仮定する。このときもし, $D(p) = D(q) = 0$ または, A と B がそれぞれ $C(X)$ と $C(Y)$ の regular subspace であるとき T は sup norm に関しても等距離である。

T が sup norm に関して等距離であるとき, 以下の二つの定理を用いることができる。

定理 1 (Gelfand theory)**.** A,B を単位的半単純可換 Banach 環とする。$T : A \to B$ を同型写像とする。このとき同相写像 $\varphi : M_B \to M_A$ が存在して

$$\widehat{T(a)} = \hat{a} \circ \varphi \quad , \, a \in A$$

定理 2 (Nagasawa の定理 (1959) [11])**.** $(A, \|\cdot\|_1), (B, \|\cdot\|_2)$ を関数環とする。
T が A から B への全射複素線形等距離写像であるとき, $T(1)$ は絶対値が 1 の可逆関数であり, $\frac{T}{T(1)}$ は A から B への多元環としての同形写像である。

定理 1 は Gelfand の理論より古くからよく知られている定理であり, 定理 2 は Nagasawa の定理とよばれることがあり, Banach-Stone の定理を関数環の場合に拡張した定理である。A, B がそれぞれ単位的半単純可換 Banach 環であるとき, これら 2 つの定理を用いることで T の構造は以下のように決定することができる。

定理 (Jarosz) の T の構造. 同相写像 $\phi : M_B \to M_A$ が存在して,

$$\widehat{T(f)}(y) = \hat{f} \circ \varphi(y) \quad (y \in M_B)$$

ただし, ^ は Gelfand 変換を表す。

5 主定理

主定理. X, Y をコンパクト Hausdorff 空間とし, A, B をそれぞれ $C(X)$ と $C(Y)$ の複素線形部分空間とし, p, $q \in \mathbb{P}$ とする。ここで, A, B は定数関数を含み, $\|\cdot\|_A, \|\cdot\|_B$ をそれぞれ A, B 上の p-norm, q-norm とし, $T : (A, \|\cdot\|_A) \to (B, \|\cdot\|_B)$ を単位的全射等距離実線形写像, $T(i) = i$ または $T(i) = -i$ と仮定する。このときもし, $D(p) = D(q) = 0$ または, A と B がそれぞれ $C(X)$ と $C(Y)$ の regular subspace であるとき, T は sup norm に関しても等距離である。

主定理を示す前に以下の命題から単位的半単純可換 Banach 環は Gelfand 変換を通すことで $C(M_A)$ の regular subspace であることに注意する。

命題 (Jarosz [8] Proposition 2)**.** $(A, \|\cdot\|)$ を単位的半単純可換 Banach 環とする。このとき, $\hat{A}$ は $C(M_A)$ の regular subspace である。

主定理の証明の概略. Case1: $T(i) = i$ のとき
この場合は Jarosz [8] の方法を適用することで証明することができる。
Case2: $T(i) = -i$ のとき.
$\overline{B} = \{\overline{g} \mid g \in B\}$ とし, 任意の元 $\overline{g} \in \overline{B}$に対して, $\|\overline{g}\|_2 = q(\|\overline{g}\|_\infty, |||\ \overline{g}\ |||)$, ただし, $|||\ \overline{g}\ ||| = |||\ g\ |||$ とすると, $\overline{B}$ は p-norm が定義された $C(Y)$ の regular subspace である。ここで, $T_0 : A \to \overline{B}$を $T_0(f) = \overline{T(f)}$ と定めると, T_0 は単位的全射等距離実線形写像で $T_0(i) = i$ となるので, Case1 を適用することで, T_0 は sup norm に関して等距離である。
ゆえに,

$$\|T(f)\|_\infty = \|\overline{T(f)}\|_\infty = \|T_0(f)\|_\infty = \|f\|_\infty$$

となるので、T は sup norm に関しても等距離である。

$\square$

A, B がそれぞれ単位的半単純可換 Banach 環で, T が sup norm に関して等距離写像であるとき 4 章の定理 1 と以下の Miura [10] を用いることで T の構造を決定することができる。

定理 (Miura(2011) [10])**.** *X, Y* を局所コンパクト Hausdorff 空間とし, A, B をそれぞれ, X と Y 上の uniformly closed function algebra とする。$T : A \to B$ が全射実線形等距離写像であるとき, 連続関数$\kappa : \mathrm{Ch}(B) \to \mathbb{T}$ と 開かつ閉集合である $\mathrm{Ch}(B)$ の部分集合 K, そして, 同相写像$\varphi : \mathrm{Ch}(B) \to \mathrm{Ch}(A)$ が存在して, 以下が成り立つ。

$$T(f)(y) = \begin{cases} \kappa(y)f(\varphi(y)) & (y \in K) \\ \kappa(y)\overline{f(\varphi(y))} & (y \in \mathrm{Ch}(B) \setminus K) \end{cases}$$

主定理の T の構造. 同相写像 $\phi : M_B \to M_A$ が存在して、

- $T(i) = i$ のとき、 $\widehat{T(f)}(y) = \hat{f} \circ \varphi(y) \quad (y \in M_B)$
- $T(i) = -i$ のとき, $\widehat{T(f)}(y) = \overline{\hat{f} \circ \varphi(y)} \quad (y \in M_B)$

参考文献

[1] A. Browder, *Introduction to function algebras.* W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam 1969 xii+273 pp. (Reviewer: H. S. Bear) 46.55

[2] S.Banach, *Théorie des opérations linéaires.* (French) [Theory of linear operations] Reprint of the 1932 original. Éditions Jacques Cabay, Sceaux, 1993.iv+128 pp.198 F. ISBN 2-87647-148-5.

[3] M.Cambern, *Isometries of certain Banach algebras*, Studia Math, 25 (1965), 217-225

[4] K. deLeeuw, W. Rudin and J. Wermer, *The isometries of some function spaces*, Proc. Amer. Math. Soc, 11(1960), 694-698

[5] O. Hatori, *Hermitian Operators and Isometries on Banach Algebra of Continuous Maps with Values in Unital Commutative C^*-algebra*, Hindawi Journal of Function Spaces, Volume 2018, Article ID 8085304, 14 pages 3-9

[6] O. Hatori, S. Oi, *Isometries on Banach algebras of vector-valued maps*, Acta Sci Math. (Szeged), 84, (2018), 151-183

[7] O. Hatori, *Isometries on Banach algebras*, to apear RIMS 講義録

[8] K. Jarosz, *Isometries in semisimple, commutative Banach algebras.* Proc. Amer. Math. Soc. 94 (1985), no. 1, 65-71. (Reviewer: Shûichi Ohno) 46J05

[9] S. Mazur and S. Ulam, *Sur les transformations isométriques d'espaces vectoriels normés*, C. R. Acad. sci, Paris, 194(1932), 946-948

[10] T. Miura, *Real-linear isometries between function algebras.* Cent. Eur. J. Math. 9 (2011), no. 4, 778-788. 46J10

[11] M. Nagasawa, *Isomorphisms between commutative Banach algebras with an application to rings of analytic functions.* Kōdai Math. Sem. Rep. 11 1959 182-188. 46. 00

[12] M. H. Stone, *Applications of the theory of Boolean rings to general topology*, Trans Amer Math Soc **41** (1937), 375-481

[13] K. Tanabe, *Isometries on Spaces of Lipschiz Maps with Values in a Uniform Algebra*, thesis for master degree, 2019

[14] J. Väisälä, *A proof of the Mazur-Ulam theorem*, Amer Math Monthly, 110(2003), 633-635

[15] 竹之内　修, 阪井　章, 貴志　一男, 神保　敏弥, 関数環, 数理科学シリーズ 8, 培風館, 1977

[16] 羽鳥　理, 距離構造, 代数構造, 位相構造, Lecture Note

関数環論における Mathematica を用いた研究

防衛大学校数学教育室，瀬戸 道生

0　はじめに

昨年，Mathematica を本質的に使う機会が２度あった．関数環論に関わることでこのようなことは少ないと思われるのでここに報告する．

1　内田君の卒業研究

この節では内田君（防衛大学校）の卒業研究 [3] を紹介する．

1.1　制御理論

A, B, C, D を適切なサイズの行列とし，次の線形システムを考える．

$$\begin{cases} y_n = Au_n + Bx_n \\ x_{n+1} = Cu_n + Dx_n \quad (n \geq 0). \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

u_n は入力，y_n は出力，x_n は状態 (state) と呼ばれる．ここで，

$$\widehat{\varphi}(j) = \begin{cases} A & (j = 0) \\ BD^{j-1}C & (j \geq 1) \end{cases}$$

と定めると

$$y_n = \sum_{j=0}^{n} \widehat{\varphi}(j) u_{n-j}$$

が成り立つ．さらに，φ を $\widehat{\varphi}(j)$ のフーリエ変換とする（制御理論では Z 変換と呼ばれる）．もし，$|\lambda|$ が十分小さければ

$$\varphi(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} \widehat{\varphi}(j)\lambda^j = A + \lambda B(I - \lambda D)^{-1}C$$

が成り立つ．φ はシステム (A, B, C, D) の伝達関数 (transfer function) と呼ばれる．伝達関数の意味を簡単に説明しよう．

$$U(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j \lambda^j, \quad Y(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} y_j \lambda^j$$

と定めると，

$$Y(\lambda) = \varphi(\lambda) U(\lambda)$$

が成り立つ．従って，伝達関数はフーリエ変換した先での入力と出力の比である．次に，$(n+1) \times (n+1)$ のユニタリ行列

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (D \text{ が } n \times n)$$

を考える．このとき，システム (A, B, C, D) はユニタリシステムと呼ばれる．ユニタリシステムに関し次が知られている．

定理 1. (A, B, C, D) をユニタリシステムとする．このとき，その伝達関数 φ は次数 n の有限ブラシュケ積である．

このように，システムの伝達関数を通じて，制御理論の問題とハーディ空間上の作用素論，不変部分空間の理論が関連する．

1.2 シューアアルゴリズム

$$\mathcal{S}(\mathbb{D}) = \{\varphi \in H^\infty(\mathbb{D}) : \|\varphi\|_\infty \leq 1\}$$

と定める．$\mathcal{S}(\mathbb{D})$ はシューアクラスと呼ばれる．任意の $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{D})$ に対し，関数列 $\{f_n\}_{n \geq 0}$ と数列 $\{\gamma_n\}_{n \geq 0}$ を以下のように帰納的に定める．

$$\begin{aligned} f_0(z) &:= \varphi(z), \quad \gamma_0 := f_0(0) \\ f_n(z) &:= \frac{f_{n-1}(z) - \gamma_{n-1}}{z(1 - \overline{\gamma_{n-1}} f_{n-1}(z))}, \quad \gamma_n := f_n(0). \end{aligned}$$

特に，$(\gamma_0, \gamma_1, \ldots)$ は φ のシューアパラメータと呼ばれる．このとき，$f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{D})$ かつ $\gamma_n \in \overline{\mathbb{D}}$ は自明であろう．さらに，次のことが知られている．

- $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ s.t. $|\gamma_{n_0}| = 1 \Leftrightarrow \varphi$ は n_0 次の有限ブラシュケ積．

- シューアアルゴリズムは $\mathcal{S}(\mathbb{D})$ の関数の連分数展開を与える．実際，

$$\begin{aligned}
\varphi(z) = f_0(z) &= \gamma_0 + \frac{(1-|\gamma_0|^2)zf_1(z)}{1+\overline{\gamma_0}zf_1(z)} \\
&= \gamma_0 + \cfrac{(1-|\gamma_0|^2)z}{\overline{\gamma_0}z + \cfrac{1}{f_1(z)}} \\
&= \gamma_0 + \cfrac{(1-|\gamma_0|^2)z}{\overline{\gamma_0}z + \cfrac{1}{\gamma_1 + \cfrac{(1-|\gamma_1|^2)z}{\overline{\gamma_1}z + \cfrac{1}{f_2(z)}}}} \\
&\;\;\vdots
\end{aligned}$$

と計算すればよい．

1.3 観察と実験

初等整数論での連分数展開は整数の範囲で収まるが，シューアアルゴリズムは $\mathbb{D}$ の点全てが出てくる．従って，手計算でシューアパラメータを求めるのはほぼ不可能なのであるが，現代は Mathematica がある．島根大時代に見聞した青木研の卒業研究に影響を受け，平成３０年度の卒業研究のテーマとして，「シューアパラメータの振る舞いを Mathematica で調べること」を内田君に提案した．

まず，

$$\varphi(z) = e^{i\theta}\prod_{j=1}^{n}\frac{z-\alpha_j}{1-\overline{\alpha_j}z} \quad (\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{D})$$

のとき，$\{e^{i\theta}\}\times\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\} \mapsto (\gamma_0,\ldots,\gamma_n)$ は全単射である．従って，有限ブラシュケ積をランダムに選べば[1]，シューアパラメータもランダムに分布するように思われる．ところが，半径 60/100 の開円板から零点を 8 個ランダムに選び，対応するシューアパラメータの絶対値を計算をすると，図 1 のようなグラフが多数得られた．ランダムに選んだはずなのに規則性が見えるというのは奇妙なことである．さらに，図 1 の例において，零点の一つを境界付近のものにとりかえると，図 2 のようにグラフが変化することが確認できた．以上のことを踏まえ，次の予想を立てた．

予想． $\mathbb{D}_r$ を半径 $0<r<1$ の開円板とする．このとき，

$$0<\forall r<1, \quad \exists N\in\mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad \forall n \ge N \quad \text{and} \quad \forall \alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{D}_r,$$

$$0 \le |\gamma_0| \le |\gamma_1| \le \cdots \le |\gamma_{n-1}| < |\gamma_n| = 1$$

[1] $\mathbb{D}$ 上の一様分布を考え，零点をランダムに選ぶということ．

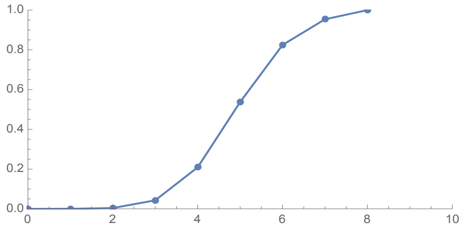

図 1: $n = 8$, $r = 60/100$ の例

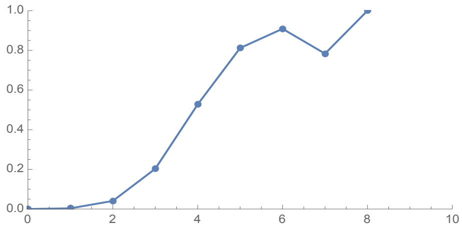

図 2: 図 1 の例において，零点の一つを境界付近のものにとりかえた．

が成り立つであろう．ここで $(\gamma_0, \gamma_1, \ldots)$ は $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ を零点としてもつ有限ブラシュケ積のシューアパラメータとする．

この予想を Mathematica を用いて検証した結果が次の表 1 である．表 1 の ◯ は指定した n と r に対し，$\mathbb{D}_r$ から n 個の零点をランダムに選ぶと，対応する有限ブラシュケ積のシューアパラメータの絶対値がすべての例で単調に増加したことを，$\times$ はその単調性が崩れた例が現れたことを意味する．従って，予想に反する例は得られなかった．内田君の卒業後，片方氏（一関高専）の協力があり当初のプログラムを大幅に改良できたが，予想を証明（または反証）することはできていない．

	30/100	40/100	45/100	50/100	60/100	65/100
3	◯	×	×	×	×	×
4	◯	×	×	×	×	×
5	◯	◯	◯	×	×	×
6	◯	◯	◯	×	×	×
7	◯	◯	◯	×	×	×
8	◯	◯	◯	◯	◯	×

表 1: 行が次数 n, 列が半径 r

2　シュワルツ-ピックの不等式

$z = (z_1, z_2)$ と $w = (w_1, w_2)$ を $\mathbb{D}^2$ の点とし，

$$b_{w_j}(z_j) = \frac{z_j - w_j}{1 - \overline{w_j} z_j} \quad (j = 1, 2)$$

と定める．このとき，

$$|b_{w_1}(z_1)|^2 + |b_{w_2}(z_2)|^2 - |b_{w_1}(z_1) b_{w_2}(z_2)|^2 = 1 - (1 - |b_{w_1}(z_1)|^2)(1 - |b_{w_2}(z_2)|^2) > 0$$

から

$$d(z, w) = \sqrt{|b_{w_1}(z_1)|^2 + |b_{w_2}(z_2)|^2 - |b_{w_1}(z_1) b_{w_2}(z_2)|^2}$$

を定義することができる．この d に関し，S [2] にて次を示した．

定理 2 (S [2])**.** $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ を $\mathbb{D}^2$ 上の正則自己写像とする．このとき，

$$0 \leq d(\psi(z), \psi(w)) \leq \sqrt{2} d(z, w) < \sqrt{2} \quad (z, w \in \mathbb{D}^2)$$

が成り立つ．

これは，シュワルツ-ピックの不等式の $\mathbb{D}^2$ 版である．実際，その証明を $\mathcal{S}(\mathbb{D})$ に適用すると，通常のシュワルツ-ピックの不等式の迂遠な証明が得られる．

（シュワルツの補題の関数解析的証明）． まず，H^2 を $\mathbb{D}$ 上のハーディ空間とし，T_f を f から定まるテープリッツ作用素，$P_{\mathcal{M}}$ を閉部分空間 $\mathcal{M}$ に対応する直交射影とする．このとき，$f(0) = 0$ をみたす $f \in \mathcal{S}(\mathbb{D})$ に対し $f \in zH^2$ であることから，ダグラスの値域包含定理により，

$$\exists \gamma > 0 \quad \text{s.t.} \quad T_f T_f^* \leq \gamma P_{zH^2} = \gamma T_z T_z^*$$

が成り立つ．ここで，P_{zH^2} が直交射影であることと $\|T_f\| \leq 1$ から $\gamma = 1$ と選べることがわかる．よって，k_λ を H^2 の再生核とすれば，

$$\frac{|f(\lambda)|^2}{1 - |\lambda|^2} = \langle T_f T_f^* k_\lambda, k_\lambda \rangle \leq \langle T_z T_z^* k_\lambda, k_\lambda \rangle = \frac{|\lambda|^2}{1 - |\lambda|^2} \quad (\lambda \in \mathbb{D})$$

が成り立つ． □

ダグラスの値域包含定理の本質的な部分はリースの表現定理であるから，リースの表現定理からシュワルツの不等式が導かれると言ってもよいだろう．さて，そうすると次に「d は距離関数か？」が問題となる．当初，負の項があるので d は距離関数にならないだろうと思い，昨年の７月に手計算で２週間ほど反例を探したがうまくいかなかった．そこで，次の２週間に Mathematica でグラフを描き，反例のある場所を特定しようとした．ところが，際どい場所はあったものの，どうも当初の予想は誤っているのではないかと思うようになった．結局８月に入り，次を示すことができた．

Proposition 3. *d is a distance on $\mathbb{D}^2$.*

Proof. Let z and w be two points in $\mathbb{D}^2$. We denote $z = (z_1, z_2)$ and $w = (w_1, w_2)$. Firstly, it is trivial that $d(z,w) = d(w,z)$ by the definition of d. Secondly, let $d_j(z_j, w_j)$ be the usual pseudo-hyperbolic distance between z_j and w_j in $\mathbb{D}$. Then we have

$$1 - (d(z,w))^2 = \{1 - (d_1(z_1,w_1))^2\}\{1 - (d_2(z_2,w_2))^2\}. \tag{1}$$

Hence, if $d(z,w) = 0$ then $d_j(z_j,w_j) = 0$ for each $j = 1,2$, that is, $z_1 = w_1$ and $z_2 = w_2$. Thirdly, we shall show the triangle inequality. Since d is invariant under the action of $\mathrm{Aut}(\mathbb{D}^2)$, it suffices to show that

$$d(z,w) \le d(z,0) + d(0,w).$$

We set $|z_j| = r_j$ and $|w_j| = s_j$ for $j = 1,2$. Then the inequality

$$d_j(z_j,w_j) \le \frac{r_j + s_j}{1 + r_j s_j} \tag{2}$$

is well known, in fact, which is equivalent to the triangle inequality for d_j. Moreover we note that

$$1 - (d(z,0))^2 = 1 - (r_1^2 + r_2^2 - r_1^2 r_2^2) = (1 - r_1^2)(1 - r_2^2). \tag{3}$$

Then, it follows from (1), (2) and (3) that

$$\begin{aligned}
(d(z,w))^2 &= 1 - \{1 - (d_1(z_1,w_1))^2\}\{1 - (d_2(z_2,w_2))^2\} \\
&\le 1 - \left\{1 - \left(\frac{r_1 + s_1}{1 + r_1 s_1}\right)^2\right\}\left\{1 - \left(\frac{r_2 + s_2}{1 + r_2 s_2}\right)^2\right\} \\
&= 1 - \frac{(1 - r_1^2)(1 - s_1^2)(1 - r_2^2)(1 - s_2^2)}{(1 + r_1 s_1)^2 (1 + r_2 s_2)^2} \\
&= 1 - \frac{\{1 - (d(z,0))^2\}\{1 - (d(0,w))^2\}}{(1 + r_1 s_1)^2 (1 + r_2 s_2)^2}.
\end{aligned}$$

Hence, we have

$$\begin{aligned}
&(1 + r_1 s_1)^2 (1 + r_2 s_2)^2 \{(d(z,0) + d(0,w))^2 - (d(z,w))^2\} \\
&\ge (1 + r_1 s_1)^2 (1 + r_2 s_2)^2 \left\{(d(z,0) + d(0,w))^2 - \left(1 - \frac{\{1 - (d(z,0))^2\}\{1 - (d(0,w))^2\}}{(1 + r_1 s_1)^2 (1 + r_2 s_2)^2}\right)\right\} \\
&= (1 + r_1 s_1)^2 (1 + r_2 s_2)^2 \left\{(d(z,0) + d(0,w))^2 - 1\right\} + \{1 - (d(z,0))^2\}\{1 - (d(0,w))^2\} \\
&\ge (d(z,0) + d(0,w))^2 - 1 + \{1 - (d(z,0))^2\}\{1 - (d(0,w))^2\} \\
&= 2d(z,0)d(0,w) + (d(z,0)d(0,w))^2 \\
&\ge 0.
\end{aligned}$$

Therefore we have

$$(d(z,0) + d(0,w))^2 - (d(z,w))^2 \ge 0.$$

This concludes the proof. □

この話にはまだ続きがある．[2] の投稿直前，証明の方法はまったく異なるが，Proposition 3 が Agler-McCarthy [1] の Lemma 9.9 から簡単に導かれることに気づいた．このような事情と査読者の提案もあり，この Proposition 3 の証明は [2] から外すことにした．しかし，将来に何らかの役に立つこともあるかもしれないのでここに掲載する．

参考文献

[1] J. Agler and J. E. McCarthy, *Pick interpolation and Hilbert function spaces*. Graduate Studies in Mathematics, 44. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[2] M. Seto, *Indefinite Schwarz-Pick inequalities on the bidisk*, New York J. Math. 26, pp. 116–128, 2020.

[3] 内田 敬介，シューアアルゴリズムを用いた伝達関数の研究，平成３０年度卒業論文，防衛大学校.

Compact homomorphisms between algebras of $C(K)$-valued Lipschitz functions

Department of Mathematics and System Development, Shinshu University　Shinnosuke Izumi

1　要旨

距離空間上で定義された Banach 環に値をとる Lipschitz 関数からなる Banach 環をとりあげ, その間の準同型写像とそのコンパクト性について報告する．特に, Lipschitz 環として, コンパクト Hausdorff 空間上の複素数値連続関数環に値をとる場合を考える．なお, 内容については高木啓行氏 (信州大学) との共著論文 [3] が基になっている．

2　Lipschitz 環の定義と性質

最初に, Lipschitz 関数の定義を述べる．

定義 2.1 (X, d_X) をコンパクト距離空間とし, $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ を $\mathbb{C}$ 上の *Banach* 環とする．

(i) X 上の $\mathcal{A}$ に値をとる関数 f が,

$$\mathcal{L}_{X,\mathcal{A}}(f) = \sup_{\substack{x,x' \in X \\ x \neq x'}} \frac{\|f(x) - f(x')\|_{\mathcal{A}}}{d_X(x, x')} < \infty,$$

をみたすとき, f を ***Lipschitz* 関数**といい, $\mathcal{L}_{X,\mathcal{A}}(f)$ を f の ***Lipschitz* 定数**という．

(ii) X 上の $\mathcal{A}$ に値をとる *Lipschitz* 関数からなる集合を $\mathrm{Lip}(X, \mathcal{A})$ と書く．

(iii) $\mathcal{A} = \mathbb{C}$ の場合, $\mathbb{C}$ を省略して $\mathrm{Lip}(X)$ と書く．

次に, $\mathrm{Lip}(X, \mathcal{A})$ の基本的な性質について述べる．

命題 2.1 (X, d_X) をコンパクト距離空間とし, $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ を $\mathbb{C}$ 上の *Banach* 環とする．

(i) $\mathrm{Lip}(X, \mathcal{A}) \subset C(X, \mathcal{A})$ である．ただし, $C(X, \mathcal{A})$ は X 上の $\mathcal{A}$ に値をとる連続関数からなる *Banach* 環である．

(ii) $\mathrm{Lip}(X,\mathcal{A})$ は各点での和・スカラー積・積と, ノルム

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}(X,\mathcal{A})} = \|f\|_{C(X,\mathcal{A})} + \mathcal{L}_{X,\mathcal{A}}(f) \qquad \big(f \in \mathrm{Lip}(X,\mathcal{A})\big)$$

に関して *Banach* 環になる.

(iii) $\mathcal{A}$ が可換ならば, $\mathrm{Lip}(X,\mathcal{A})$ もまた可換である.

(iv) $\mathcal{A}$ が単位元をもつならば, $\mathrm{Lip}(X,\mathcal{A})$ もまた単位元をもつ.

3 Lipschitz 環の間の準同型写像について

3.1 定義と先行結果

最初に準同型写像と単位的写像の定義を述べる.

定義 3.1 (準同型写像) $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ をそれぞれ単位元 $e_{\mathcal{A}}$, $e_{\mathcal{B}}$ をもつ $\mathbb{C}$ 上の *Banach* 環とし, T を $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ への写像とする.

(i) T が和・スカラー積・積の構造を保つ. すなわち,

$$\begin{aligned} T(a+b) &= Ta + Tb \\ T(ka) &= kTa \qquad\qquad (a, b \in \mathcal{A}, k \in \mathbb{C}) \\ T(ab) &= (Ta)(Tb) \end{aligned}$$

をみたすとき, T を**準同型写像 *(homomorphism)*** という.

(ii) T が $Te_{\mathcal{A}} = e_{\mathcal{B}}$ をみたすとき, T を**単位的 *(unital)*** という.

Banach 環の間の準同型写像については, 次の定理が知られている.

定理 A (cf.[7]) $\mathcal{A}$ を *Banach* 環とし, $\mathcal{B}$ を半単純可換 *Banach* 環とする. このとき, T が $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ への準同型写像ならば, T は連続である.

定理 A は, Banach 環 $\mathcal{A}$ から半単純可換 Banach 環 $\mathcal{B}$ への準同型写像の自動的連続性を主張している.

次に, Lipschitz 環の間の準同型写像についての先行結果を述べる. 1963 年に, D. R. Sherbert は [8] の中で, $\mathrm{Lip}(X)$ から $\mathrm{Lip}(Y)$ への単位的準同型写像を次のように特徴付けた:

定理 B (Sherbert, [8]) X と Y をコンパクト距離空間とする. このとき, T が $\mathrm{Lip}(X)$ から $\mathrm{Lip}(Y)$ への単位的準同型写像であるための必要十分条件は, Y から X への *Lipschitz* 写像 φ を用いて, T が

$$(Tf)(y) = f\big(\varphi(y)\big) \qquad (f \in \mathrm{Lip}(X), y \in Y)$$

と表されることである.

その後, 2013 年には, F. Botelho and J. Jamison は, $\mathrm{Lip}(X,\mathcal{A})$ から $\mathrm{Lip}(Y,\mathcal{A})$ への単位的準同型写像を, ある条件の下で特徴付けた. ただし, $\mathcal{A}$ は, 収束する複素数列からなる Banach 環 $\mathbf{c}$, または, 有界な複素数列からなる Banach 環 ℓ^∞ である.

ここで, $\mathbf{c}$ と ℓ^∞ が単位元を持つ可換 C^* 環であることに注意する. すると, Gel'fand-Naimark の定理 (cf.[7, Theorem 11.18]) から, 任意の単位元を持つ可換 C^* 環は, あるコンパクト Hausdorff 空間 K 上の複素数値連続関数からなる単位元を持つ可換 C^* 環 $C(K)$ と $*$-等距離同型となる. したがって, 可換 C^* 環値 Lipschitz 環の間の準同型写像を特徴付けるうえでは, $\mathrm{Lip}(X,C(K))$ を考えれば十分であることがわかる.

2016 年に, S. Oi は [6] の中で, $\mathrm{Lip}(X,C(K))$ 上の準同型写像を次のように特徴付けた:

定理 C (Oi, [6]) (X,d_X) をコンパクト距離空間とし, (Y,d_Y) を連結なコンパクト距離空間とする. また, K と M をコンパクト *Hausdorff* 空間とする. このとき, T が $\mathrm{Lip}(X,C(K))$ から $\mathrm{Lip}(Y,C(M))$ への単位的準同型写像であるための必要十分条件は, 条件 *(a), (b)* をみたす Y から X への写像の族 $\{\varphi_\eta\}_{\eta\in M}$ と, M から K への連続写像 ψ を用いて, T が

$$\big[(Tf)(y)\big](\eta) = \big[f(\varphi_\eta(y))\big](\psi(\eta)) \qquad \big(f\in \mathrm{Lip}(X,C(K)), y\in Y,\ \eta\in M\big)$$

と表されることである.

(a) 各 $y\in Y$ に対して, $M\ni\eta\mapsto\varphi_\eta(y)\in Y$ は連続である.

(b) $\displaystyle\sup_{\eta\in M}\sup_{\substack{y,y'\in Y\\ y\neq y'}}\frac{d_X(\varphi_\eta(y),\varphi_\eta(y'))}{d_Y(y,y')}<\infty.$

3.2 主定理

F. Botelho and J. Jamison の結果や S. Oi の結果では, 準同型写像が単位的であることと, Y が連結であることが仮定されている. そこで, これらの仮定を取り除き, 準同型写像を完全に特徴付ける. そのために, $f\in\mathrm{Lip}(X,C(K))$ を $x\in X$ と $\xi\in K$ を変数とする関数とみなし, $[f(x)](\xi)$ の代わりに $f(x,\xi)$ と書く. また, $x\in X$ に対して, $f(x)$ の代わりに f_x と書く. さらに, $\xi\in K$ に対して, X 上の関数 f^ξ を $f^\xi(x)=f(x,\xi)$ で定義する. このとき次の命題が成り立つ:

命題 3.1 (X,d_X) をコンパクト距離空間とし, K をコンパクト *Hausdorff* 空間とする. また, $f: X\times K\to\mathbb{C}$ とする. このとき, $f\in\mathrm{Lip}(X,C(K))$ であるための必要十分条件は, $f\in C(X\times K)$ かつ

$$\mathcal{L}_{X,C(K)}(f)=\sup_{\substack{x,x'\in X\\ x\neq x'}}\frac{\|f_x-f_{x'}\|_{C(K)}}{d_X(x,x')}<\infty$$

をみたすことである. さらに, $\|f\|_{C(X,C(K))}=\|f\|_{C(X\times K)}$ が成り立つ.

命題 3.1 の考え方に基づき, 次の定理を得た.

定理 1 (Takagi-I. [3]) (X, d_X) と (Y, d_Y) をコンパクト距離空間とする. また, K と M をコンパクト *Hausdorff* 空間とする. このとき, T が $\mathrm{Lip}(X, C(K))$ から $\mathrm{Lip}(Y, C(M))$ への準同型写像であるための必要十分条件は, $Y \times M$ の開かつ閉部分集合 $\mathcal{D}$ と, 条件 *(i)* をみたす $\mathcal{D}$ から X への連続写像 φ と, 条件 *(ii)* をみたす $\mathcal{D}$ から K への連続写像 ψ が存在し, 任意の $f \in \mathrm{Lip}(X, C(K))$ に対してに対して, T が

$$(Tf)(y,\eta) = \begin{cases} f\bigl(\varphi(y,\eta), \psi(y,\eta)\bigr) & \bigl((y,\eta) \in \mathcal{D}\bigr) \\ 0 & \bigl((y,\eta) \in (Y \times M) \setminus \mathcal{D}\bigr) \end{cases} \tag{1}$$

と表されることである.

(i) 次をみたす定数 $L \geq 0$ が存在する:

$$(y,\eta), (y',\eta) \in \mathcal{D},\ y \neq y' \ \Rightarrow\ \frac{d_X\bigl(\varphi(y,\eta), \varphi(y',\eta)\bigr)}{d_Y(y,y')} \leq L.$$

(ii) 任意の $\eta \in M$ に対して, $\mathcal{D}^\eta = \{y \in Y : (y,\eta) \in \mathcal{D}\}$ の開かつ閉集合であるような有限分割 $V_1^\eta, \ldots, V_{n_\eta}^\eta$ で,

各 $i = 1, \ldots n_\eta$ に対して, ψ^η が V_i^η 上で定値

かつ

$$d_Y(V_i^\eta, V_j^\eta) \geq r > 0 \qquad (i \neq j), \tag{2}$$

となるものが存在する. ただし, r は η に依存しない.

さらに, T が単位的であるための必要十分条件は $\mathcal{D} = Y \times M$ となることである.

3.3 準備

ここでは, 定理 1 の証明に必要ないくつかの命題について述べる. なお証明については, 論文 [3] や [6] を参照されたい.

命題 3.2 任意の $(x_0, \eta_0) \in X \times K$ と, (x_0, η_0) の任意の開近傍 $\mathcal{U}$ に対して,

$$\begin{aligned} &0 \leq f \leq 1 \\ &f(x_0, \eta_0) = 1 \\ &f(x, \xi) \leq m < 1 \qquad \bigl((x,\xi) \in (X \times K) \setminus \mathcal{U}\bigr) \end{aligned}$$

となる $f \in \mathrm{Lip}(X, C(K))$ と定数 $m > 0$ が存在する.

命題 3.3 *Banach* 環 $\mathrm{Lip}(X, C(K))$ は半単純である.

命題 3.4 $\mathrm{Lip}(X, C(K))$ の極大イデアル空間は $X \times K$ と同一視される.

3.4 定理 1 の証明の概要

この節では, 定理 1 の証明の概要について述べる. 各補題の証明の詳細については [3] を参照されたい. まず, 次の条件の下で, 定理 1 の十分性を証明する:

(A-1) $Y \times M$ の開かつ閉部分集合 $\mathcal{D}$ が存在する.

(A-2) 2 つの連続写像 $\varphi : \mathcal{D} \to X$, $\psi : \mathcal{D} \to K$ が存在する.

(A-3) T が (1) で表される.

(A-4) φ が条件 (i) をみたす.

(A-5) ψ が条件 (ii) をみたす.

命題 3.1 より, T が, 任意の $f \in \mathrm{Lip}(X, C(K))$ に対して, $Tf \in C(Y \times M)$ かつ

$$\mathcal{L}_{Y,C(M)}(Tf) = \sup_{\substack{y,y' \in Y \\ y \neq y'}} \frac{\|(Tf)_y - (Tf)_{y'}\|_{C(M)}}{d_Y(y, y')} < \infty$$

をみたす準同型写像であることを示す.

最初に, 条件 (A-1)–(A-3) から次の補題をえる:

補題 3.1 *(A-1)–(A-3) を仮定する. このとき, 任意の* $f \in \mathrm{Lip}(X, C(K))$ *に対して,* $Tf \in C(Y \times M)$ *である.*

次に, 条件 (A-1) と有向点族の一般論から次の補題をえる:

補題 3.2 *(A-1) を仮定する. このとき,*

$$\inf\bigl\{d_Y(y, y') \ : \ ある\ \eta \in M\ に対して\ (y, \eta) \in \mathcal{D}\ かつ\ (y', \eta) \in (Y \times M) \setminus \mathcal{D}\bigr\} > 0.$$

である.

最後に, 条件 (A-1)–(A-5) と補題 3.1, 3.2 から次の補題をえる:

補題 3.3 *(A-1)–(A-5) を仮定する. このとき,* T *は* $\mathrm{Lip}(X, C(K))$ *から* $\mathrm{Lip}(Y, C(M))$ *への準同型写像である.*

したがって, 条件 (A-1)–(A-5) をみたすとき, T が $\mathrm{Lip}(X, C(K))$ から $\mathrm{Lip}(Y, C(M))$ への準同型写像であることがわかった.

次に, 定理 1 の必要性を証明する. すなわち, T が $\mathrm{Lip}(X, C(K))$ から $\mathrm{Lip}(Y, C(M))$ への準同型写像ならば, 条件 (A-1)–(A-5) をみたすことを証明する. ここで, 命題 3.3 と定理 A から, T は連続であることに注意する. $T = O$ の場合, $\mathcal{D} = \emptyset$ ととれば, (1) は自明だから, $T \neq O$ の場合を考える.

最初に, 命題 3.4 を用いると次の補題をえる:

補題 3.4 *T が (1) で表されるような, $Y \times M$ の開かつ閉部分集合 $\mathcal{D}$ と, 2つの写像 $\varphi : \mathcal{D} \to X$, $\psi : \mathcal{D} \to K$ が存在する.*

また, 命題 3.2 を用いると次の補題をえる:

補題 3.5 *写像 $\varphi : \mathcal{D} \to X$ と $\psi : \mathcal{D} \to K$ は連続である.*

次に, T の有界性から次の補題をえる:

補題 3.6 *φ が条件 (i) をみたす.*

次に, $0 < r \leq \frac{1}{\|T\|}$ ととれば, 次の補題をえる:

補題 3.7 *$(y, \eta), (y', \eta) \in \mathcal{D}$ が $d_Y(y, y') < r$ をみたすならば, $\psi^\eta(y) = \psi^\eta(y')$ である.*

最後に, 補題 3.7 から次の補題をえる:

補題 3.8 *ψ が条件 (ii) をみたす.*

補題 3.4, 3.5 から条件 (A-1)–(A-3) をみたすことがわかる. また, 補題 3.6 から条件 (A-4) をみたすこともわかる. 最後に, 補題 3.7, 3.8 から条件 (A-5) をみたすことがわかる. 以上で, 定理 1 を証明することができた.

4 Lipschitz 環の間のコンパクトな準同型写像について

この節では次の問題を考える:

問題 1 *Lipschitz 環の間の準同型写像はいつコンパクトとなるか?*

4.1 先行結果と主定理

1990 年に, H. Kamowitz and S. Scheinberg は [5] の中で, Lip(X) から Lip(Y) への単位的準同型写像がコンパクトとなるための必要十分条件を与えている. それを述べるために 1 つ定義を与える.

定義 4.1 ([5]) *(X, d_X) と (Y, d_Y) を距離空間とする. このとき Y から X への写像 φ が,*

$$\lim_{d_Y(y,y') \to 0} \frac{d_X\big(\varphi(y), \varphi(y')\big)}{d_Y(y, y')} = 0$$

をみたすとき, φ を **超縮小写像 (supercontraction)** *という.*

定理 D (Kamowitz and Scheinberg, [5]) *(X, d_X) と (Y, d_Y) をコンパクト距離空間とする. このとき, 定理 B の単位的準同型写像がコンパクトとなるための必要十分条件は, φ が超縮小写像となることである.*

2013年に, F. Botelho and J. Jamisonが, [1] のなかで, $\mathrm{Lip}(X,\mathbf{c})$ から $\mathrm{Lip}(Y,\mathbf{c})$ への単位的準同型写像や, $\mathrm{Lip}(X,\ell^\infty)$ から $\mathrm{Lip}(X,\ell^\infty)$ への単位的準同型写像がコンパクトとなるための十分条件を, 超縮小写像を用いて与えている. しかしながら, その条件は必要条件になっていない. そこで, $\mathrm{Lip}(X,C(K))$ から $\mathrm{Lip}(Y,C(M))$ への準同型写像がコンパクトとなるための必要十分条件を考察し, 次の結果を得た.

定理 2 (Takagi-I. [3]) *(X,d_X) と (Y,d_Y) をコンパクト距離空間とし, K, M をコンパクト Hausdorff 空間とする. また, T を定理 1 で述べた $\mathrm{Lip}(X,C(K))$ から $\mathrm{Lip}(Y,C(M))$ への準同型写像とする. このとき, T がコンパクトとなるための必要十分条件は, 次の 2 つの条件 (iii), (iv) をみたすことである.*

(iii) 任意の $\varepsilon>0$ に対して,

$$(y,\eta),(y',\eta)\in\mathcal{D},\ 0<d_Y(y,y')<\delta \ \Rightarrow\ \frac{d_X\bigl(\varphi(y,\eta),\varphi(y',\eta)\bigr)}{d_Y(y,y')}<\varepsilon$$

となる $\delta>0$ が存在する.

(iv) 任意の $y\in Y$ に対して, $\mathcal{D}_y=\{\eta\in M:(y,\eta)\in\mathcal{D}\}$ の開かつ閉集合であるような有限分割 $\Omega_y^1,\ldots,\Omega_y^{n_y}$ で,

各 $i=1,\ldots n_y$ に対して, ψ_y が Ω_y^i 上で定値

となるものが存在する.

4.2　定理 2 の証明

この節では, 定理 2 の証明の概要について述べる. 各補題の証明の詳細については, 定理 1 と同様, [3] を参照されたい. $\mathbb{B}_{\mathrm{Lip}(X,C(K))}$ を $\mathrm{Lip}(X,C(K))$ の単位球とする. すなわち,

$$\mathbb{B}_{\mathrm{Lip}(X,C(K))}=\bigl\{f\in\mathrm{Lip}(X,C(K)):\|f\|_{\mathrm{Lip}(X,C(K))}\le 1\bigr\}$$

とする.

まず, 次の条件の下で, 定理 2 の十分性を証明する:

(B-1) φ が条件 (iii) をみたす.

(B-2) ψ が条件 (iv) をみたす.

最初に, 条件 (B-2) から次の補題をえる:

補題 4.1 *(B-2) を仮定する. $(y_0,\eta_0)\in\mathcal{D}$ とする. 任意の $\varepsilon>0$ に対して,*

$$\eta\in\Theta\ \Rightarrow\ \sup_{f\in\mathbb{B}_{\mathrm{Lip}(X,C(K))}}\bigl|(Tf)(y_0,\eta)-(Tf)(y_0,\eta_0)\bigr|<\varepsilon$$

となる η_0 の開近傍 $\Theta\subset\mathcal{D}_{y_0}$ が存在する.

また, T が有界であることに注意すると, Arzelá-Ascoli の定理 (cf.[2, Theorem IV.6.7]) と補題 4.1 から次の補題をえる:

補題 4.2 *(B-2)* を仮定する. このとき, $T\big(\mathbb{B}_{\mathrm{Lip}(X,C(K))}\big)$ は $C(Y \times M)$ の相対コンパクト集合である.

次に, 条件 (B-1) を用いると次の補題をえる.

補題 4.3 任意の $\varepsilon > 0$ に対して,

$$\|Tf\|_{\mathrm{Lip}(Y,C(M))} \leq \varepsilon + c_\varepsilon \|Tf\|_{C(Y\times M)} \qquad \big(f \in \mathbb{B}_{\mathrm{Lip}(X,C(K))}\big)$$

となる $c_\varepsilon > 0$ が存在する.

最後に, 補題 4.2, 4.3 から次の補題をえる:

補題 4.4 *(B-1), (B-2)* を仮定する. このとき, $T\big(\mathbb{B}_{\mathrm{Lip}(X,C(K))}\big)$ は $\mathrm{Lip}(Y, C(M))$ の相対コンパクト集合である.

補題 4.4 から, 条件 (B-1), (B-2) が成り立つならば, T はコンパクトであることがわかった.
次に, 定理 2 の必要性を証明する. すなわち, T がコンパクトであるときに条件 (B-1), (B-2) をみたすことを示す.
最初に, H. Kamowitz and S. Scheinberg [5] による証明の手法を改良し用いると次の補題をえる:

補題 4.5 φ は条件 *(iii)* をみたす.

次に, 論文 [4] で扱われている考え方を用いると次の補題をえる:

補題 4.6 任意の η_0 に対して,

$$\Theta \text{ 上で } \psi_y \text{ が定値}$$

となる η_0 の開近傍 $\Theta \subset \mathcal{D}_y$ が存在する.

最後に, 補題 4.6 から次の補題をえる:

補題 4.7 ψ は条件 *(iv)* をみたす.

補題 4.5, 4.7 から条件 (B-1), (B-2) をみたすことがわかる. 以上で定理 2 が証明することができた.

5　定理 1, 2 の系

定理 1 の仮定で, T を単位的準同型写像とし, (Y, d_Y) を連結なコンパクト距離空間とすれば, 定理 C が得られる. したがって, 定理 1 は定理 C の一般化になっている. また, $\mathbf{c}$ や ℓ^∞ は単位元を持つ可換 C^* 環だから, 定理 1, 2 は F. Botelho and J. Jamison [1] の一般化にもなっている.

K が一点集合の場合, $\mathrm{Lip}(X, C(K))$ は $\mathrm{Lip}(X)$ と等距離同型となる. そこで, K と M が一点集合の場合を考える. すると, 定理 1, 2 から次の結果が得られる:

系 1 (X, d_X) と (Y, d_Y) をコンパクト距離空間とする.

(I) T *が* $\mathrm{Lip}(X)$ *から* $\mathrm{Lip}(Y)$ *への準同型写像であるための必要十分条件は,* Y *の開かつ閉部分集合* Y_0 *と,* Y_0 *から* X *への Lipschitz 写像* φ *が存在し, 任意の* $f \in \mathrm{Lip}(X)$ *に対して,* T *が*

$$(Tf)(y) = \begin{cases} f\bigl(\varphi(y)\bigr) & \bigl(y \in Y_0\bigr) \\ 0 & \bigl(y \in Y \setminus Y_0\bigr) \end{cases} \tag{3}$$

と表されることである. さらに, T *が単位的であるための必要十分条件は,* $Y_0 = Y$ *となることである.*

(II) T *を (3) の形で与えられた* $\mathrm{Lip}(X)$ *から* $\mathrm{Lip}(Y)$ *への準同型写像とする. このとき,* T *がコンパクトとなるための必要十分条件は,* φ *が* Y_0 *上の超縮小写像となることである.*

したがって, 定理 1, 2 は, D. R. Sherbert [8], H. Kamowitz and S. Scheinberg [5] の結果の一般化になっている.

一方で, X が一点集合の場合, $\mathrm{Lip}(X, C(K))$ は $C(K)$ と等距離同型となる. よって, 系 1 と同様, 定理 1, 2 から次の 3 つの系が得られる:

1. $C(K)$ から $C(M)$ へのコンパクトな準同型写像.
2. $\mathrm{Lip}(X)$ から $C(M)$ へのコンパクトな準同型写像.
3. $C(K)$ から $\mathrm{Lip}(Y)$ へのコンパクトな準同型写像.

参考文献

[1] F. Botelho and J. Jamison, *Homomorphisms on a class of commutative Banach algebras*, Rocky Mountain J. Math. **43** (2013), 395–416.

[2] N. Dunford and J. T. Schwartz, “Linear Operators. Part I”, Interscience, 1988.

[3] S. Izumi and H. Takagi, *Compact homomorphisms between algebras of $C(K)$-valued Lipschitz functions*, J. Math. Anal. Appl. **467** (2018), 315–330.

[4] H. Kamowitz, *Compact weighted endomorphisms of $C(X)$*, Proc. Amer. Math. Soc. **83** (1981), 517–521.

[5] H. Kamowitz and S. Scheinberg, *Some properties of endomorphisms of Lipschitz algebras*, Studia Math. **96** (1990), 255–261.

[6] S. Oi, *Homomorphisms between algebras of Lipschitz functions with the values in function algebras*, J. Math. Anal. Appl. **444** (2016), 210–229.

[7] W. Rudin, "Functional Analysis", 2nd ed. McGraw-Hill, Inc., New York, 1991.

[8] D. R. Sherbert, *Banach algebras of Lipschitz functions*, Pacific J. Math. **13** (1963), 1387–1399.

Banach algebra isometries revisited

Osamu Hatori[1]

Institute of Science and Technology, Niigata University

1 序

距離を保存する写像を等距離写像と呼ぶ。等距離写像の研究の歴史は非常に古くまで遡ることができる。平面間の等距離写像が回転と裏返しと平行移動を組み合わせてできることの証明は今日では線形代数を少しだけ知っていれば容易である。Fleming and Jamison [12, p.19] は，Coolidge [8, p.273] によると出版されたものとしては 1831 年の Chasles [7] によるものがある，としている。さらに，Euler[11] は 1776 年に 3 次元の場合の研究を行っているので，2 次元の場合の結果はさらにに古くから知られていたと想像しやすい。(cf. [12, Notes and Remarks 1.6])

近代的な等距離写像の研究は，コンパクト距離空間上の実数値連続関数全体上の全射等距離写像に対する Banach の定理 [3, Theorem XI. 3] に始まり，1937 年の Stone [58, Theorem 83] による一般化やその後の複素化などを経て，単位的可換 C^* 環の間の全射等距離複素線形写像が加重同形写像であることを今日は Banach-Stone の定理と呼んでいる。1932 年の Mazur-Ulam の定理 [40] があるためか，Banach や Stone は等距離写像に線形性を仮定していなかった。Mazur-Ulam の定理はノルム空間の間の全射等距離写像は「代数的な中点」を保存することを主張し，従ってそのような写像は実線形等距離写像 + 定数であることが分かる。Mazur-Ulam の定理は，距離を保存する写像が自動的に線形構造を保存することを主張している点に着目すべきであり，関数解析学が創始されたときからこのような形で「保存問題」が意識されていたことがおもしろい。ところで，Banach は ℓ^p 空間上の等距離写像も記述し [3]，$L^p[0,1]$ の場合についても出版する意向を示していたようであるが，結局 Lamperti [37] により補填されたかたちである。Banach により始まった等距離写像の研究は，各種の空間や集合上の問題として発展し，現在でも活発に研究がなされている。

2 等距離写像と積の構造

本稿ではバナッハ環上の等距離写像について，特に可換バナッハ環の場合について述べたい。バナッハ環や一般にノルム空間上の距離はそのノルムによって定められることが多い。したがって，その上の等距離写像は，実線形構造と相性がよいのはむしろ自然である。一方，Banach-Stone の定理は，二つの単位的可換 C^* 環がバナッハ空間として等距離同形であれば，バナッハ環として等距離同形であることを主張する。距離の構造とは一見関係のなさそうな積の構造を保存するところに筆者は興味を惹かれる。本稿では「バナッハ空間として等距離同形 $\longrightarrow$ バナッハ環としてあ

[1]This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, a Joint Usage/Research Center located in Kyoto University. This work was supported by JSPS KAKENHI Grant Numbers 19K03536.

るいは Jordan バナッハ環として同形」に焦点をあててバナッハ環上の等距離写像を概観したい。初めに，Banach-Stone の定理をはじめとする等距離写像に関する古典的な結果（Banach-Stone の定理，Schur の定理，Kadison の定理）に対して，保存問題の視点から見た証明を与えたい。全射複素線形等距離写像は，定義通りに距離構造を保存するが，その他いろいろな構造や集合を保存しているが，そのような視点に基づく証明には興味がもたれる。

Kadison による Banach-Stone の定理の非可換化が与えられたのは 1950 年代の初頭である [30, 31]。同時期に Wermer の maximality theorem [64] により関数環理論が始まり，それは正則関数のなす環を抽象的に扱うことを念頭に発展していった。ほどなく Nagasawa [46] は Banach-Stone の定理を関数環の場合に拡張し，平面領域上の有界正則関数全体のバナッハ環に対する Chevalley-Kakutani の定理 [32] に応用した。その後，正則関数のなす環とは限らない空間上の等距離写像についての研究も盛んに行われるようになり現在でも活発に研究されている。Lipschitz 環上の等距離写像の研究は de Leeuw [9] に始まり，Cambern [5]， Rao and Roy [55] により引き継がれると同時に連続微分可能関数のバナッハ環や絶対連続関数のバナッハ環の研究も開始され，現在に至るまで多くの数学者により多様な研究がなされている。

なお，等距離写像についての基本的な文献として Fleming and Jamison の本 [12, 13] がある。

3　Banach-Stone の定理

今日 Banach-Stone の定理というと，等距離写像に複素線形性を仮定して述べるのが通例である。

Banach-Stone の定理． 写像 T を，コンパクト *Hausdorff* 空間 X 上の複素数値連続関数全体の *Banach* 空間 $C(X)$ から同様の $C(Y)$ の上への複素線形全射等距離写像とする。このとき，$T(1)$ は絶対値が 1 である連続関数であり，同相写像 $\varphi : Y \to X$ が存在して

$$T(f) = T(1) f \circ \varphi, \quad f \in C(X) \tag{3.1}$$

である。逆に (3.1) で与えられる $T : C(X) \to C(Y)$ は線形全射等距離写像である。このとき，$C(X)$ と $C(Y)$ は *Banach*$*$ 環として等距離 $*$ 同形である。

今日では各種の証明が知られている。Banach 自身による証明や他の証明方法については [3] や [12] を参照いただきたい。次は，バナッハ空間の間の等距離複素線形写像を一般的に扱えるという意味でも標準的な証明方法である。

・extreme point argument：全射複素線形等距離写像 T の双対写像 T^* を考える方法。双対写像が双対空間の間の全射等距離写像であることから T^* は双対空間の閉単位球の間の端点を保存する。双対空間の閉単位球の端点を調べることにより極大イデアル空間の間の同相写像 φ を決定する。

また，連続関数やベクトル値連続写像の空間の場合には次のような方法もある。

・peak point argument：ある点で peak する peaking function（$\|f\|_\infty = 1$ かつ $f^{-1}(1) = f^{-1}(\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\})$ の族の T による像が共通の一意的な weak peak point をもつ。この対応は全単射であることがわかり，その逆の対応が φ である。

・Lumer's method：エルミート作用素を決定し，それをもとにして等距離写像を決定する方法。$C(X)$ や Lipschitz 環などのエルミート作用素が豊富な空間に対して有効な方法である。

本稿では，等距離写像がユニタリー群を保存することに着目した証明を紹介する。ユニタリー群は全体の積の構造と密接な関係をもつので，全射複素線形等距離写像が積の構造を保存することが見える証明である。

3.1 ユニタリー群の保存問題の解としての Banach-Stone の定理の証明

$|f| = 1$ であるような $f \in C(X)$ を以下でユニタリー関数と呼ぶ。その全体を $U_{C(X)}$ であらわすことにする。$U_{C(X)}$ は $C(X)$ のユニタリー群と呼ばれることもある。簡単な計算で，$C(X)$ の単位球の端点とユニタリー関数は一致することがわかる。Banach-Stone の定理のユニタリー群に着目した証明を述べる。

Banach-Stone の定理の証明. ユニタリー群は $C(X)$ の単位球の端点であり，等距離写像は端点を保存するので $T(U_{C(X)}) = U_{C(Y)}$ である。したがって，$T(1)$ はユニタリー関数である。そこで与えられた T に対して $\overline{T(1)}T$ を考えることにより，初めから $T(1) = 1$ として一般性を失わない。次に，任意の $u \in C_{\mathbb{R}}(X)$ (X 上の実数値連続関数全体）と任意の実数 t に対して $\exp(itu) \in U_{C(X)}$ なので，$T(\exp(itu)) \in U_{C(Y)}$ である。T の複素線形性と連続性により

$$T(\exp(itu)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n T(u^n)}{n!} \in U_{C(Y)}$$

であるから

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n T(u^n)}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-it)^n \overline{T(u^n)}}{n!} = 1 \tag{3.2}$$

である。$T(1) = 1$ としたことを考慮して，式 (3.2) の t の 1 次の項を両辺比較して，

$$T(u) = \overline{T(u)}$$

がわかる。ここで $u \in C_{\mathbb{R}}(X)$ はなんでもよかったので $T(u^2) = \overline{T(u^2)}$ でもあることもわかる。このことを考慮して式 (3.2) の t の 2 次の項を比較すると，

$$\frac{i^2 T(u^2)}{2!} + \frac{iT(u)}{1!}\frac{-iT(u)}{1!} + \frac{(-i)^2 T(u^2)}{2!} = 0$$

である。したがって，

$$T(u^2) = T(u)^2$$

がわかる。T の線形性から，任意の $u, v \in C_{\mathbb{R}}(V)$ に対して

$$T(uv) = \frac{1}{2}\big(T((u+v)^2 - u^2 - v - 2\big) = \frac{1}{2}\big(T(u+v)^2 - T(u)^2 - T(v)^2\big) = T(u)T(v)$$

が成り立つ。T の複素線形性を考慮して，$T(fg) = T(f)T(g)$ が任意の $f, g \in C(X)$ に対して成立することがわかる。以上から，$T\colon C(X) \to C(Y)$ は多元環としての同型写像である。Gelfand 理論により同相写像 $\varphi : Y \to X$ が存在して，$T(f) = f \circ \varphi$, $f \in C(X)$ であるが，特に $T(1) = 1$ を仮定した議論を行ってきたことを考慮して，一般には

$$T(f) = T(1) f \circ \varphi, \quad f \in C(X)$$

が成り立つことがわかる。

□

4 単位的 C^* 環のユニタリー群を保存する写像

3 章では，等距離写像の問題をユニタリー群を保存する写像に関する保存問題として扱う方法について，Banach-Stone の定理をもとにして述べた。Kadison の定理 [30] もそのような方向で証明できる。

4.1 ユニタリー群を保存する写像

まず，単位的 C^* 環の間のユニタリー群を保存する複素線形写像を記述しよう。単位的 C^* 環 A に対して，そのユニタリー元全体を A のユニタリー群といい，U_A であらわそう。

定義 4.1. A と B を単位的 C^* 環とする。複素線形写像 $\Phi : A \to B$ が積（*resp.* *2* 乗）を保存する（$\Phi(ab) = \Phi(a)\Phi(b),\ a, b \in A$（*resp.* $\Phi(a^2) = \Phi(a)^2,\ a \in A$））とき，$\Phi$ は準同形写像（*resp.* *Jordan*-準同形写像）とよばれる。さらに対合 $*$ を保存する（$\Phi(a^*) = \Phi(a)^*,\ a \in A$）とき Φ は $*$ 準同形写像（*resp.* *Jordan* $*$ 準同形写像）とよばれる。

行列環の間のユニタリー群を保存する写像についての Marcus の定理 [39] はよく知られている。複素数係数 n 次正方行列全体のバナッハ環（ノルムはスペクトルノルム）を $M_n(\mathbb{C})$ で表す。ユニタリー行列全体を $U_{M_n(\mathbb{C})}$ であらわし，ユニタリー群という。

Marcus の定理． 複素線形写像 $\Phi : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ が $\Phi(U_{M_n(\mathbb{C})}) \subset U_{M_n(\mathbb{C})}$ をみたすとする。このとき，$U, V \in U_{M_n(\mathbb{C})}$ が存在して

$$\Phi(A) = UAV, \quad A \in M_n(\mathbb{C}),$$

または

$$\Phi(A) = UA^tV, \quad A \in M_n(\mathbb{C})$$

が成り立つ。ここで，A^t は A の転置行列を表す。

次は Marcus の定理の拡張であり，よく知られていると考えているが（cf. [54]），直接述べてある文献を見つけられなかった。証明は今年度の RIMS の講究録などで参照されたい。証明は 3 章におけるものと同様であり，ユニタリー保存性に基づくものである。

定理 4.1. A と B を単位的 C^* 環とする。$\Phi : A \to B$ を複素線形写像で $\Phi(U_A) \subset U_B$ とする。このとき $\Phi(1) \in U_B$ であり，*Jordan* $*$-準同形写像 $J : A \to B$ が存在して

$$\Phi(a) = \Phi(1)J(a), \quad a \in A$$

である。

定理 4.1 の系として Banach-Stone の定理が直ちに従う。また行列環は素環（prime ring）なので Herstein の定理 [27] より Jordan 同形写像は同形写像か反同形写像であり，Noether-Skolem の定理により同形写像の形が決まる。したがって，定理 4.1 から Schur の定理も従う。

Schur の定理． $T : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ を複素線形等距離写像とする。このとき，ユニタリー行列 U と V が存在して

$$T(A) = UAV, \quad A \in M_n(\mathbb{C}) \tag{4.1}$$

か

$$T(A) = UA^tV, \quad A \in M_n(\mathbb{C}) \tag{4.2}$$

である。逆に (4.1) または (4.2) で与えられる写像 $T : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ は全射複素線形等距離写像である。

4.2 Kadison の定理

単位的 C^* 環の間の等距離写像を記述した Kadison の定理 [30] について述べる。行列環 $M_n(\mathbb{C})$ の閉単位球の端点 (extreme point) はユニタリー行列全体と一致するので定理 4.1 は Schur の定理に応用できる。$B(H)$ の場合も含めて C^* の閉単位球の端点はユニタリーだけではないことがよく知られている（cf. [12, 30]）が，全射複素線形等距離写像がユニタリーを保存することは簡単に分かる（cf. [12, Lemma 6.2.4]）。従って，定理 4.1 から Kadison の定理が直ちに従う！

Kadison の定理． A と B と単位的 C^* 環とする。$\Phi : A \to B$ を線形全射等距離写像とする。このとき $\Phi(1) \in U_B$ であり，A から B の上への *Jordan∗* 同形写像 J が存在して $\Phi = \Phi(1)J$ である。逆に $u \in U_B$ と A から B の上への *Jordan∗* 同形写像 J に対して，$\Phi = uJ$ で $\Phi : A \to B$ を定めると，Φ は線形全射等距離写像である。

5 Nagasawa の定理

ユニタリー群を保存する写像を記述することにより，Banch-Stone の定理，そして一般に Kadison の定理が証明できることを述べた。単位的 C^* 環の場合には，全射複素線形等距離写像が積や Jordan 積に言及することをユニタリー群の保存性に帰着できた。単位的 C^* 環にはユニタリーが豊富に存在し，ユニタリー群は積の構造と密接であるから，それを保存する等距離写像が積に言及することには説得力はある。一方，一般にはバナッハ環のユニタリー群は大きいとは言えず，それでも全射等距離写像が積の構造を保存する現象は散見する。正則関数のつくるバナッハ環では定数関数のみがユニタリーであるが，そのような空間上の等距離写像もやはり積の構造を保存する。バナッハ環の間の等距離写像が積や Jordan 積の構造に言及する理由が明確になったとは言い切れない気がする。典型的な例として Nagasawa の定理を紹介する。

Banach-Stone の定理の帰結である写像の形を荷重合成作用素という。単位的可換 C^* 環とは限らない連続関数からなるバナッハ環や Banach 空間の間の等距離写像が荷重合成作用素となるかという問題意識のもと多くの研究がなされている。関数環の間の全射等距離写像は荷重合成作用素であることは Nagasawa の定理 [46] として知られている。単位的可換 C^* 環は関数環なので，Nagasawa の定理は Banach-Stone の定理を関数環の場合に拡張した定理ともいえる。

Nagasawa の定理． T を関数環 A から関数環 B の上への複素線形等距離写像であるとする。このとき，$T(1)$ は絶対値が 1 である可逆関数であり，$\frac{T}{T(1)}$ は A から B への多元環としての同形写像である。

Gelfand 理論により，A から B への多元環としての同形写像は極大イデアル空間上の合成作用素で表現できるので，Nagasawa の定理は関数環の間の全射複素線形等距離写像は荷重合成作用素であることを主張している。de Leeuw, Rudin and Wermer [10] は独立に同様の結果をえた。Nagasawa の定理と同様に，単位円板 D 上のハーディー環 $H^\infty(D)$ の全射等距離写像の問題に応用した。また [10] では，$H^\infty(D)$ がハーディー空間 $H^1(D)$ で稠密であり，全射等距離写像が $H^\infty(D)$ では積の構造を保存することに着目し，$H^1(D)$ 上の全射複素線形等距離写像の形が決定された。ほどなくして Forelli [14] は $H^p(D)$ 上の全射とは限らない複素線形等距離写像を扱いその構造を決定した。その際にも "積の構造" に着目することが証明の重要なポイントである。その後，正則関数の空間上の複素線形等距離写像の研究が盛んに行われるようになった。等距離写像の形を決定するにあたり，正則関数の空間に内在する "積の構造" に着目することがポイントであるように思う。なお，Miura [41] (cf. [22]) は単位元の仮定のない "関数環" の場合に全射実線形等距離写像を決定し，Nagasawa の定理を拡張した。

6 連続関数からなるバナッハ環上の等距離写像

整数全体を $\mathbb{Z}$ とする。複素平面上の単位円周を $\mathbb{T}$ とし，その上の複素数値連続関数でフーリエ級数が絶対収束するようなもの全体

$$W(\mathbb{T}) = \{f \in C(\mathbb{T}) : \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| <\}$$

にノルム $\|f\|_W = \sum |\hat{f}(n)|$ をノルムとしたバナッハ環は Wiener 環とよばれる単位的半単純可換バナッハ環である。Wiener 環は数列空間 $\ell^1(\mathbb{Z})$ の Fourier 変換あるいは Gelfand 変換と考えることができる。Wiener 環の閉部分環

$$W_+(\mathbb{T}) = \{f \in W(\mathbb{T}) : \hat{f}(n) = 0, \forall n < 0\}$$

は $W(\mathbb{T})$ とバナッハ空間として等距離同形である。実際 $\tau : \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 0\} \to \mathbb{Z}$ を全単射として $T : W(\mathbb{T}) \to W_+(\mathbb{T})$ を，$f \in W(\mathbb{T})$ に対して $T(f)(z) = \sum_{n\geq 0} \hat{f}(n) z^{\tau(n)}$ により定めると T は全射複素線形等距離写像である。一方 $W(\mathbb{T})$ の極大イデアル空間は $\mathbb{T}$ であり，$W_+(\mathbb{T})$ のそれは単位閉円板 $\bar{D}$ であり両者は同相ではないから，$W(\mathbb{T})$ と $W_+(\mathbb{T})$ はバナッハ環として同形ではない。このように「バナッハ空間として等距離同形 $\longrightarrow$ バナッハ環としてあるいは Jordan バナッハ環として同形」は，一般には望めないことがわかる。前章までに見たように，単位的 C^* 環（実は単位元の仮定はいらない [52]），関数環は「バナッハ空間として等距離同形 $\longrightarrow$ バナッハ環としてあるいは Jordan バナッハ環として同形」をみたすバナッハ環である。このような性質をもつバナッハ環は多くはないように考えられる。可換の場合においては，Jarosz による研究 [28] や Jarosz and Pathak [29] の研究がある。

6.1 Jarosz の定理

Jarosz [28] は単位元を保存する全射複素線形等距離写像が多元環としての同形写像であるような半単純可換バナッハ環をそのノルムの特徴に着眼することにより研究してる。それは，Nagasawa

[46] による関数環，de Leeuw [9] による Lipschitz 環，さらに Cambern [5]，Rao and Roy [55] による Lipschitz 環，連続微分関数の環，絶対連続関数の環などの研究をうけて，連続関数のバナッハ環やバナッハ空間上の等距離写像をあつかったものであり，本稿のテーマでもある「バナッハ空間として等距離同形 $\longrightarrow$ バナッハ環としてあるいは Jordan バナッハ環として同形」を抽象的に扱った先駆的な論文である。

定義 6.1. *2* 次元空間 $\mathbb{R}^2$ 上のノルム p で $p((1,0)) = 1$ をみたすもの全体を $\mathcal{P}$ とおく。$p \in \mathcal{P}$ に対して

$$D(p) = \lim_{t \to +0} (p(1,t) - 1)/t$$

と定める。

任意の $p \in \mathcal{P}$ に対して $D(p)$ は有限の値として存在することは [26] で示されている。

定義 6.2. コンパクト *Hausdorff* 空間 X に対して，A を $C(X)$ の複素線形部分空間で定数関数を含むものとする。空間 A 上の半ノルム（*seminorm*）$|||\cdot|||$ が $|||a+1||| = |||a|||$ $(a \in A)$ をみたすとき，$|||\cdot|||$ は 1-不変であるという。ここで 1 は恒等的に実数値 1 をとる関数である。A 上のノルム $\|\cdot\|$ に対して，$p \in \mathcal{P}$ が存在して $\|\cdot\| = p(\|\cdot\|_\infty, |||\cdot|||)$ であるとき，$\|\cdot\|$ を p-ノルムという。ただし，$\|\cdot\|_\infty$ は上限ノルム（*sup norm*）である。

コンパクト Hausdorff 空間 K とする。K 上の複素数値連続関数 f に対して

$$L(f) = \sup\left\{\frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)} : x, y \in K,\ x \neq y\right\}$$

を f の Lipschitz 定数とよぶ。Lipschitz 定数が有限であるような f を Lipschitz 関数と呼ぶ。その全体

$$\mathrm{Lip}(K) = \{f \in C(K) : L(f) < \infty\}$$

は単位的可換多元環である。$\mathrm{Lip}(K)$ には多様な完備ノルムが定義できる。

$$\|f\|_{\max} = \max\{\|f\|_\infty, L(f)\}, \quad f \in \mathrm{Lip}(K),$$

$$\|f\|_+ = \|f\|_\infty + L(f), \quad f \in \mathrm{Lip}(K)$$

などはその例である。顕著なこととして，$\mathrm{Lip}(K)$ はノルム $\|\cdot\|_+$（今後，和ノルムと呼ぶ）に関して単位的半単純可換バナッハ環であり，その極大イデアル空間は K であることが知られている。そこで $(\mathrm{Lip}(K), \|\cdot\|_+)$（単に，$\mathrm{Lip}(K)$ と省略することもある）を Lipschitz 環と呼ぶ。和ノルムは，$p(x,y) = |x| + |y|$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ に対して，p-ノルムである。max ノルム（$\|\cdot\|_{\max}$ をそう呼ぶことにする）も $p(x,y) = \max\{|x|,|y|\}$ に対する p-ノルムであり，$D(p) = 0$ である。max ノルムは K が 2 点以上からなる場合は submultiplicative ではないので，その場合は $(\mathrm{Lip}(K), \|\cdot\|_{\max})$ はバナッハ環ではない。

有界閉区間 $[0,1]$ 上の複素数値連続微分可能関数全体からなる単位的可換多元環 $C^1[0,1]$ は，和ノルム

$$\|f\|_+ = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty, \quad f \in C^1[0,1]$$

により単位的半単純可換バナッハ環であり，その極大イデアル空間は $[0,1]$ である。max ノルム

$$\|f\|_{\max} = \max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\}, \quad f \in C^1[0,1]$$

は $C^1[0,1]$ 上の完備ノルムを与える。max ノルムは submultiplicative ではない。有界閉区間 $[0,1]$ 上の絶対連続関数全体からなる単位的可換多元環にも同様なノルムが定義できるがここでは省略する（[55] など参照のこと）。

Jarosz (1983)． コンパクト *Hausdorff* 空間 X と Y に対して，A と B をそれぞれ $C(X)$ と $C(Y)$ の複素線形部分空間で定数関数を含むものとする。また，$p, q \in \mathcal{P}$ とし，$\|\cdot\|_A$ は A 上の p-ノルム，$\|\cdot\|_B$ は B 上の q-ノルムとする。さらに，$T : A \to B$ を $(A, \|\cdot\|_A)$ から $(B, \|\cdot\|_B)$ の上への全射複素線形等距離写像とする。さらに，$T(1) = 1$ とする。このとき，$D(p) = D(q) = 0$ であるか，または A と B が *regular (Jarosz* の用語*)* であるならば，T は上限ノルム（*sup norm*）に関しても等距離写像である。

空間 A が regular であることの定義は [28, p.67] を参照のこと。A が単位的半単純可換バナッハ環であり，X が極大イデアル空間であるならば，A は regular である。したがって

系 6.1. *A, B を，それぞれある $p, q \in \mathcal{P}$ に対する p-ノルム，q-ノルムによる単位的半単純可換バナッハ環で X, Y がそれぞれ A, B の極大イデアル空間であるとする。このとき，$T(1) = 1$ であるような $(A, \|\cdot\|_A)$ から $(B, \|\cdot\|_B)$ の上への全射複素線形等距離写像 T に対して，同相写像 $\varphi : Y \to X$ が存在して*

$$T(f) = f \circ \varphi, \qquad f \in A$$

が成り立つ。特に，A と B はバナッハ環として等距離同形である。

証明. Jarosz の定理から T は上限ノルムに関する等距離写像である。したがって，T は A の一様閉包 $\bar{A}$ から B の一様閉包 $\bar{B}$ の上への上限ノルムに関する全射等距離写像 $\tilde{T}$ に拡張できる。すると Nagasawa の定理により $\tilde{T}$ は多元環としての同形写像である。よって，その A への制限 $T : A \to B$ は多元環としての同形写像である。すると Gelfand 理論により，該当の $\varphi : Y \to X$ の存在がわかる。

□

Jarosz の定理における条件 $T(1) = 1$ は本質的である。Weaver [62, p.242] は Lipschitz 関数からなる多元環に，いわゆる max norm をいれたバナッハ空間上の全射複素線形等距離写像であるが，上限ノルムに関して等距離ではなく，荷重合成作用素でない例を示している ([63, p.61] にも同じ例がある)。

Jarosz の定理と [28, Lemma 2] の原証明は，興味深く明快なアイディアによるものである。証明の方針変更などは必要はないが，議論に対する多少の修正により読みやすくなると思う。詳細は [19] にある。

6.2 Lipschitz 環上の等距離写像と Rao and Roy の問題

Lipschitz 環上の等距離写像の研究は de Leeuw [9] に始まり，Cambern [5]， Rao and Roy [55] により引き継がれると同時に連続微分可能関数のバナッハ環や絶対連続関数のバナッハ環の研究も開始され，現在に至るまで多くの数学者により多様な研究がなされている。

Rao and Roy [55] は単位閉区間 $[0,1]$ 上の関数からなる多元環 $\mathrm{Lip}[0,1]$, $C^1[0,1]$ と絶対連続関数全体 $\mathrm{AC}[0,1]$ 上の等距離写像を研究した。集合の包含関係としては $C^1[0,1] \subset \mathrm{Lip}[0,1] \subset \mathrm{AC}[0,1]$ であり，$f \in \mathrm{AC}[0,1]$ (resp. $\mathrm{Lip}[0,1]$, $C^1[0,1]$) について $f' \in L^1[0,1]$ (resp. $L^\infty[0,1]$, $C[0,1]$) である。主なノルムは $\|f\|_\infty + \|f'\|_1$, $f \in \mathrm{AC}[0,1]$ (resp. $\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$, $f \in \mathrm{Lip}[0,1], C^{[}0,1]$) である。全射複素線形等距離写像は荷重合成作用素であることが示されている。多元環 $\mathrm{AC}[0,1]$，$\mathrm{Lip}[0,1]$, $C^1[0,1]$ はこの和ノルムに関して単位的半単純可換バナッハ環であり，その上の全射複素線形等距離写像は荷重合成作用素であることが示されている。さらに，簡単な計算により，$L(f) = \|f\|_\infty$, $f \in \mathrm{Lip}[0,1]$ であることから，コンパクト距離空間 K に対して $(\mathrm{Lip}(K), \|\cdot\|_+)$ 上の全射複素線形等距離写像が K 上の等距離写像を用いて記述できるかどうかを問題として取り上げた。

Jarosz and Pathak は，Rao and Roy の問題に対して肯定的な ” 解 ” を示した [29, Example 8]。そこではコンパクト距離空間 K_j $(j = 1,2)$ に対して $\mathrm{Lip}(K_1)$ から $\mathrm{Lip}(K_2)$ の上への全射複素線形等距離写像 T に対して $T(1)$ が絶対値 1 の複素数であることを示すことが肝要であった。$|T(1)| = 1$ が示されてしまえば，$\overline{T(1)}T$ に対して [29, Theorem 4]（cf. [28, Theorem]）を適用して，T が K 上の等距離写像に関する荷重合成作用素であることが証明できる。等式 $|T(1)| = 1$ を示すために [29, Example 8] では $\mathrm{Lip}(K_j)$ の双対空間の単位球の端点（extreme point）を調べているが，その過程には確認できない箇所があり，Jarosz and Pathak の解答は不完全であるとされた（cf. [24, pp.152–153]）。和ノルムを定めた $\mathrm{Lip}(K_j)$ の双対空間の単位球の端点の全容は，現在でも，少なくとも直接的な把握は筆者にはできていない。Hatori and Oi [24] は，ある種の ” ベクトル値バナッハ環 ” 上の全射複素線形等距離写像の形を決定した（cf. [19]）。 その際に，Choquet 理論を用いて双対空間の単位球の端点の一部分を解析し，$|T(1)| = 1$ に当たる等式を示した。結果として Rao and Roy の問題を最終的に肯定的に解決した。その過程で用いた Jarosz の定理 [28, Theorem] の証明の修正は [19] で詳しく述べられている。また，[19] では合成写像部分が BJ 型であることの Lumer's method による証明も示してある。

6.3 単位的可換 C^* 環に値をとる写像からなるバナッハ環とその上の等距離写像

Nikou and O'Farrell [47] はベクトル値写像からなるある種のバナッハ環を適切四つ組とよんだ([25] の Def.2.2 の直後のコメントも参照のこと）。Hatori and Oi [24] は単位的可換 C^* 環に値をとる写像からなるバナッハ環でいくつかの条件をみたすものを L 型適切四つ組と定義した [24, Definition 4]。L 型適切四つ組は，Nikou and O'Farrell の適切四つ組の特別なものである。和ノルムをもつ Lipschitz 環，単位的可換 C^* 環に値をとる Lipschitz 写像からなる和ノルムに関するバナッハ環，連続的微分可能関数全体の和ノルムに関するバナッハ環，単位的可換 C^* 環に値をとる連続的微分可能写像全体の和ノルムに関するバナッハ環などは L 型適切四つ組の例である。L 型適切四つ組上の全射複素線形等距離写像は [24, Theorem 8] で決定された。それより少し一般的なバナッハ環（自然な $C(Y)$ 値化）に対する定理を [19, Theorem 14] で述べた。どちらの定理からも Rao and Roy の問題の肯定的解答が得られ。前者において L 型適切四つ組の場合の結果として述べられた理由は，等距離写像を荷重合成作用素で表現する際に合成作用素部分が BJ 型であることの証明に，適切四つ組の間の準同形写像を記述した [25, Proposition 3.2] を用いたためである。荷重合成作用素の表現について，[19, Theorem 14] の証明では，Lumer's method を用いた証明を与えた。L 型適切四つ組や自然な $C(Y)$ 値化は，$C(Y)$ に値をとる Lipschitz 写像全体 $\mathrm{Lip}(K, C(Y))$

や $C(Y)$ に値をとる連続的微分可能関数からなるバナッハ環 $C^1([0,1],C(Y))$，$C^1(\mathbb{T},C(Y))$ をモデルに抽象化したバナッハ環である。コンパクト Hausdorff 空間 Y が 1 点集合の場合を考えれば，$\mathrm{Lip}(K)$, $C^1[0,1]$，$C^1(\mathbb{T})$ の抽象化と考えることもできる。

Rao and Roy の問題の肯定的解答は [24, Theorem 8] で与えられたが，その後改良された [19, Theorem 14] の方が多少読みやすいはずなので，ここではそちらを採録する。

定義 6.3 ([19] の Definition 12). X と Y をコンパクト *Hausdorff* 空間とする。B を $C(X)$ の単位元を含む部分環で X の点を分離するとし（$\forall x,y\in X$ に対して，$f(x)\neq f(y)$ であるような $f\in B$ が存在する），それ自身（何らかのノルムに関して）バナッハ環であるとする。$\widetilde{B}$ は $C(X\times Y)$ の単位元を含む部分環で，$B\otimes C(Y)\subset\widetilde{B}$ であり，それ自身がバナッハ環であるとする。さらに $X\times Y$ が $\widetilde{B}$ の極大イデアル空間であり，$\widetilde{B}$ は複素共役（$f\in\widetilde{B}$ ならば $\bar{f}\in\widetilde{B}$）とする。さらに，つぎの条件が成り立つとき $\widetilde{B}$ は B の自然な $C(Y)$ 値化であるという：条件）コンパクト *Hausdorff* 空間 $\mathfrak{M}$ と複素線形写像 $D:\widetilde{B}\to C(\mathfrak{M})$ で，$\ker D=1\otimes C(Y)$ かつ $D(C_{\mathbb{R}}(X\times Y)\cap\widetilde{B})\subset C_{\mathbb{R}}(\mathfrak{M})$ が成り立ち，ノルムの条件

$$\|F\|_{\widetilde{B}}=\|F\|_{\infty(X\times Y)}+\|D(F)\|_{\infty(\mathfrak{M})},\quad F\in\widetilde{B}$$

をみたす。

単位的な半単純可換バナッハ環の Gelfand 変換は上の定義の B の条件をみたす。

定理 6.2 ([19] の Theorem 14). コンパクト *Hausdorff* 空間 X_j（$j=1,2$）に対して，B_j は $C(X_j)$ の単位元を含む部分環で X_j の点を分離するとし，それ自身（何らかのノルムに関して）バナッハ環であるとする。$\widetilde{B_j}$ を B_j の自然な $C(Y_j)$ 値化であるとする。任意の $F\in\widetilde{B_j}$ と，Y_j 上で $|h|=1$ である任意の $h\in C(Y_j)$ に対して，

$$\|(1\otimes h)F\|_{\widetilde{B_j}}=\|F\|_{\widetilde{B_j}}$$

が成り立つとする。このとき，$T:\widetilde{B_1}\to\widetilde{B_2}$ を全射複素線形等距離写像とする。すると，Y_2 上 $|h|=1$ である $h\in C(Y_2)$ と，連続写像 $\varphi:X_2\times Y_2\to X_1$ で任意の $y\in Y_2$ に対して $\varphi(\cdot,y):X_2\to X_1$ が同相写像であるものと，同相写像 $\tau:Y_2\to Y_1$ が存在して，

$$T(F)(x,y)=h(y)F(\varphi(x,y),\tau(y)),\quad (x,y)\in X_2\times Y_2$$

が任意の $F\in\widetilde{B_1}$ に対して成立する。

証明などについては [24] と [19] を参照されたい。

B_j を Lipschitz 環とし定理 6.2 を適用すると次のようである。

系 6.3. コンパクト距離空間 K_j（$j=1,2$）とコンパクト *Hausdorff* 空間 Y_j（$j=1,2$）に対して，K_j 上の $C(Y_j)$ 値 *Lipschitz* 写像全体に和ノルムを定めたバナッハ環を $\mathrm{Lip}(K_j,C(Y_j))$ とする。この時，$T:\mathrm{Lip}(K_1,C(Y_1))\to\mathrm{Lip}(K_2,C(Y_2))$ を全射複素線形等距離写像とする。すると，Y_2 上 $|h|=1$ である $h\in C(Y_2)$ と，連続写像 $\varphi:X_2\times Y_2\to X_1$ で任意の $y\in Y_2$ に対して $\varphi(\cdot,y):X_2\to X_1$ が全射等距離写像であるものと，同相写像 $\tau:Y_2\to Y_1$ が存在して，

$$T(F)(x,y)=h(y)F(\varphi(x,y),\tau(y)),\quad (x,y)\in X_2\times Y_2$$

が任意の $F\in\mathrm{Lip}(K_1,C(Y_1))$ に対して成立する。

定理 6.2 を適用すれば，$y \in Y_2$ に対して $\varphi(\cdot, y) : X_2 \to X_1$ が全射等距離写像であること以外の部分は証明できる。任意の $y \in Y_2$ に対して $\varphi(\cdot, y) : X_2 \to X_1$ が全射等距離写像であることは，対象が Lipschitz 環であるという特殊事情により証明できる。

また系 6.3 においてコンパクト Hausdorff 空間 Y_j を 1 点からなるものとすると，$C(Y_j)$ と複素数全体 $\mathbb{C}$ はバナッハ環として等距離同形であることから $\mathrm{Lip}(K_j)$ と $\mathrm{Lip}(K_j, C(Y_j))$ はバナッハ環として等距離同形であり，次が成立することがわかる。Rao and Roy の問題に対する解である。

系 6.4. コンパクト距離空間 X_j（$j = 1, 2$）に対して，X_j 上の複素数値 *Lipschitz* 関数全体 $\mathrm{Lip}(X_j)$ に和ノルム $\|\cdot\|_\infty + L(\cdot)$ を定める。この時，全射複素線形等距離写像を $T : \mathrm{Lip}(X_1) \to \mathrm{Lip}(X_2)$ とする。すると，$|T(1)| = 1$ であり，さらに全射等距離写像 $\varphi : X_2 \to X_1$ が存在して，

$$T(f) = T(1) f \circ \varphi, \qquad f \in \mathrm{Lip}(X_1)$$

が成り立つ。

全射複素線形等距離写像 $T : C^1([0,1], C(Y_1)) \to C^1([0,1], C(Y_2))$ の形も定理 6.2 により次のようである：$|h| = 1$ である $h \in C(Y_2)$ が存在し，同相写像 $\varphi : [0,1] \times Y_2 \to [0,1] \times Y_1$ と $\tau : Y_2 \to Y_1$ が存在して，任意の $y \in Y_2$ に対して $\varphi(t, y) = t$, $t \in [0,1]$，または $\varphi(t, y) = 1 - t$, $t \in [0,1]$ であり，

$$T(F)(t, y) = h(y) F(\varphi(t, y), \tau(y)), \quad (t, y) \in [0,1] \times Y_2$$

が任意の $F \in C^1([0,1], C(Y_1))$ に対して成立する [24, Corollary 18]。 特に Y_j が 1 点集合である場合は Rao and Roy の結果 [55, Theorem 4.1] である。また $\mathbb{T}$ を単位円周としたとき $C^1(\mathbb{T}, C(Y_j))$ 上の全射複素線形等距離写像についても同様の結果が定理 6.2 より導かれる（cf. [24, Corollary 19]）。

Lipschitz 環や連続微分可能関数全体には，和ノルム以外にも max ノルムはじめバナッハ空間としてのノルムがある。そのようなノルムに関する等距離写像の研究も多数なされている（cf. [4, 33, 34, 35, 36, 43]）。

7　最近の話題から

最近は次のような観点からの研究も盛んに行われている。

・線形性（実，複素）を仮定しない等距離写像の研究：全射等距離写像は Mazur-Ulam の定理により実線形＋定数となるので，実線形性の仮定のもとでの研究もある（cf. [35, 36, 41, 42]）。

・部分集合上の等距離写像の研究：Mankiewicz [38] はノルム空間の連結開集合の間の全射等距離写像がノルム空間全体の等距離写像に拡張できること，したがってそれは実線形＋定数の形であることを示した。Hatori and Molnár [23] は単位的 C^* 環のユニタリー群の間の等距離写像や正値可逆元全体（positive cone）の間の Thompson 等距離写像を研究した。その後，Positive cone 上の各種の距離による等距離写像の研究が盛んに行われている（[44] やその参考文献を参照されたい）。Tingley 問題 [59] は，ノルム空間の単位球面の間の全射等距離写像はノルム空間全体の等距離写像に拡張するかを問題としている。多くの研究があるが，反例はなく実 2 次元の場合も未解決である。Peralta [53] やその参考文献を参照されたい。特筆すべき最近の結果として Mori and

Ozawa [45] がある。特に，単位的 C^* 環の単位球面から任意のバナッハ空間の単位球面の全射等距離写像が等距離写像として全体に拡張することが示された。

・ベクトル値の Lipschitz 環の間の等距離写像の研究：ベクトルを可換とは限らない単位的 C^* 環とすることを志向した研究がある。Oi [50] は行列に値をとる写像からなる Lipschitz 環上の 1 を保存する等距離写像を，Lumer's method を用いて決定した。

8　付録１：バナッハ空間としての同形性と等距離同形性

二つのバナッハ空間 $\mathfrak{B}_1$ と $\mathfrak{B}_2$ において全単射な有界線形変換 $S : \mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{B}_2$ が存在するとき，$\mathfrak{B}_1$ と $\mathfrak{B}_2$ はバナッハ空間として同形であるという。さらに，S が等距離であるならば，$\mathfrak{B}_1$ と $\mathfrak{B}_2$ は等距離同形であるという。同形性の問題はバナッハ空間の位相構造を研究し，一方等距離同形性の問題はバナッハ空間の幾何構造の違いまで問題にするので，両者は異なる問題意識を背景にしている。

バナッハ空間として同形でも多元環の構造がことなる $C(X)$ と $C(Y)$ の例を一つ上げる。

例 8.1. 通常の位相を $X = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, y = 0\} \cup \{(x, y) : x = 0, 0 \leq y \leq 1\}$ と閉区間 $Y = [-1, 2]$ に入れる。写像 $T : C(X) \to C(Y)$ を，$f \in C(X)$ に対して

$$(T(f))(x) = \begin{cases} f(x, 0), & -1 \leq x \leq 1 \\ f(0, x-1) - f(0, 0) + f(1, 0), & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

と定める。すると，T は全単射有界線形作用素であり，その作用素ノルムは 3 である。また，X と Y は同相ではないので，*Gelfand* 理論により $C(X)$ と $C(Y)$ は多元環として同形ではない。

9　付録２：Banach の問題と Mazur-Ulam の定理

線形距離空間（Banach の本 [3] では完備線形距離空間を F-space とよぶ）上の全射等距離写像が affine（線形写像＋定数）であるかどうかは，Banach の問題として知られている [3, p.150] (cf. [6, p.94])。有限次元の場合は Charzynski [6] により解決されているが，一般の場合は今日でも未解決であると思われる (cf. [56])。ノルム空間ではない F-space の例として，Zygmund F-algebra, Privalov class, Smirnov class 等の正則関数のなす空間がある (cf. [20, 60])。

Mazur and Ulam [40] (cf. [3]) は，ノルム空間における点対象移動が距離を 2 倍に伸ばすこと（以下の証明の式 (9.1) の部分が該当）に依存した証明を与えた。Väisälä [61] が別証明を与えたが，この点対称移動の原理を用いている。以下で Väisälä のアイディアに従った証明を述べる。線形距離空間 (V, d) において，$d(2y - x, x) \geq kd(y, x)$ $(x, y \in V)$ をみたす定数 $k > 1$ が存在するような場合は，同様の証明方法でその上の全射等距離写像は affine であることが導かれる (cf. [56, Theorem 2.8])。一般に線形距離空間では上記のような点対象移動の原理は成り立たない。

Mazur-Ulam の定理． g をノルム空間 E からノルム空間 F の**上への**等距離写像とする。このとき，$g - g(0)$ は実線形写像である。

証明. 次は Väisälä [61] の証明のアイディアによる。

任意の $a, b \in E$ に対して

$$g\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{g(a)+g(b)}{2}$$

を示せば十分である。そこで，簡単のため $c = \frac{a+b}{2}$，$c' = \frac{g(a)+g(b)}{2}$ とおく。$\lambda = \|g(c) - c'\|$ とする。$\lambda = 0$ を示す。

$\varphi : E \to E$ を $\varphi(x) = 2c - x$，$\psi : F \to F$ を $\psi(u) = 2c' - u$ により定義すると，φ は等長写像で，$\varphi(c) = c$, $\varphi(a) = b$, $\varphi(b) = a$ であり，

$$\|\varphi(x) - x\| = 2\|x - c\| \quad (x \in E) \tag{9.1}$$

が成り立つ。ψ についても同様の性質が成り立つ。そこで，$h = \varphi \circ g^{-1} \circ \psi \circ g$ と $h : E \to E$ を定めると h は E 上の等長写像である。更に

$$\|\varphi \circ h(x) - y\| = \|\varphi(x) - h(y)\| \tag{9.2}$$

が任意の $x, y \in E$ に対して成り立つことを用いて

$$\|h^{(2^n)}(c) - c\| = 2^{n+1}\lambda$$

が任意の自然数 n に対して成り立つことが分かる。($n = 1$ のとき：

$$\begin{aligned}\|h(c) - c\| &= \|\varphi \circ g^{-1} \circ \psi \circ g(c) - c\| = \|g^{-1} \circ \psi \circ g(c) - \varphi(c)\| \\ &= \|g^{-1} \circ \psi \circ g(c) - c\| = \|\psi \circ g(c) - g(c)\| = 2\|g(c) - c'\| = 2\lambda\end{aligned}$$

であり，$\|\varphi \circ h(x) - y\| = \|\varphi(x) - h(y)\|$ より

$$\begin{aligned}2^2\lambda = 2\|h(c) - c\| &= \|\varphi \circ h(c) - h(c)\| = \|\varphi(c) - h \circ h(c)\| \\ &= \|c - h \circ h(c)\| = \|h^{(2^1)}(c) - c\|.\end{aligned}$$

n のとき等式

$$2^{n+1}\lambda = \|h^{(2^n)}(c) - c\|$$

が成立したとして $n+1$ のとき：(9.1) と (9.2) を用いて

$$\begin{aligned}2^{n+2}\lambda &= 2\|h^{(2^n)}(c) - c\| = \|\varphi(h^{(2^n)}(c)) - h^{(2^n)}(c)\| \\ &= \|\varphi(h^{(2^n-1)}(c)) - h^{(2^n+1)}(c)\| = \cdots = \|\varphi(c) - h^{(2^n+2^n)}(c)\| = \|c - h^{(2^{n+1})}(c)\|\end{aligned}$$

である。）一方 $h(a) = a$ であることから $h^{(2^n)}(a) = a$ なので

$$2^{n+1}\lambda = \|h^{(2^n)}(c) - c\| \le \|h^{(2^n)}(c) - h^{(2^n)}(a)\| + \|a - c\| = 2\|c - a\|$$

が任意の n に対していえるので，$\lambda = 0$ である。

□

参考文献

[1] T. Abe and O. Hatori, *Generalized Gyrovector Spaces and a Mazur-Ulam theorem*, Publ. Math. Debrecen **87** (2015), 393–413

[2] J. Araujo and J. J. Font, *Linear isometries between subspaces of continuous functions*, Trans. Amer. Math. Soc., **349** (1997), 413–428

[3] S. Banach, *Theory of linear operations*, Translated from the French by F. Jellet. With comments by A. Pełczyński and Cz. Bessaga, North Holland Mathematica Library, **38**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1987. x+237 pp.

[4] F. Botelho and J. Jamison, *Surjective isometries on spaces of differentiable vector-valued functions*, Studia Math., **192** (2009), 39–50

[5] M. Cambern, *Isometries of certain Banach algebras*, Studia Math., **25** (1964/65), 217–225

[6] Z. Charzyński, *Sur les transformations isométriques des espaces du type (F)* , Sudia Math., **13** (1953), 94–121.

[7] M. Chasles, Bull. des Sciences Mathematiques de Ferrussae, **XXIV** (1831), 321

[8] J. Coolidge, *A history of geometrical methods*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1940. xviii+451 pp.

[9] K. de Leeuw, *Banach space of Lipschitz functions*, Studia Math., **21** (1961/62), 55–66

[10] K. de Leeuw, W. Rudin and J. Wermer, *The isometries of some function spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **11** (1960), 694–698

[11] L. Euler, *Formvlae generales pro translatione qvacvnqve corporvm rigidorvm*, Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae pro Anno MDCCLXXV, Tom. **XX** (1776), 189–207

General formulas for any translation of rigid bodies, English translation by Johan Sten

[12] R. J. Fleming and J. E. Jamison, *Isometries on Banach Spaces: Function Spaces*, Chapman & Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 129. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2003. x+97 pp.

[13] R. J. Fleming and J. E. Jamison, *Isometries in Banach Spaces. Vol. 2. Vector-valued Function Spaces*, Chapman & Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 138. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2008. x+234 pp.

[14] F. Forelli, *The isometries of H^p*, Canad. J. Math., **16** (1964), 721–728

[15] I. M. Gelfand, *On normed rings*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **23** (1939), 430–432

[16] I. M. Gelfand, *To the theory of normed rings. II. On absolutely convergent trigonometric series and integrals*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **25** (1939), 570–572

[17] I. M. Gelfand, *To the theory of normed rings. III. On the ring of almost periodic functions*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **25** (1939), 573–574

[18] I. M. Gelfand, *Normierte Ringe*, Rec. Math. (Mat. Sbornik), N. S. **9(51)** (1941), 3–24

[19] O. Hatori, *Hermitian operators and isometries on Banach algebras of continuous maps with values in unital commutative C^*-algebras*, J. Funct. Spaces, **2018**, Art. ID 8085304, 14pp.

[20] O. Hatori, Y. Iida, S. Stević and S. Ueki, *Multiplicative isometries on F-algebras of holomorphic functions*, Abst. Appl. Anal. 2012, Art. ID 125987, 16pp.

[21] O. Hatori, S. Lambert, A. Luttman, T. Miura, T. Tonev and R. Yates, *Spectral preservers in commutative Banach algebras.* Function spaces in modern analysis, 103–123, Contemp. Math., **547**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011.

[22] O. Hatori and T. Miura, *Real linear isometries between function algebras. II*, Cent. Eur. J. Math., **11** (2013), 1838–1842

[23] O. Hatori and L. Molnár, *Isometries of the unitary groups and Thompson isometries of the spaces of invetible positive elements in C^*-algebras*, J. Math. Anal. Appl., **409** (2014), 158–167

[24] O. Hatori and S. Oi, *Isometries on Banach algebras of vector-valued maps*, Acta Sci. Math. (Szeged), **84** (2018), 151–183

[25] O. Hatori, S. Oi and H. Takagi, *Peculiar homomorphisms on algebras of vector-valued maps*, Studia Math., **242** (2018), 141–164

[26] O. Hatori and K. Tanabe, *Note on the proof of the existence of $D(p)$ of a theorem of Jarosz*, Nihonkai Math. J., **30** (2019), 27–29

[27] I. N. Herstein, *Jordan homomorphisms*, Trans. Amer. Math. Soc., **81** (1956), 331-341

[28] K. Jarosz, *Isometries in semisimple, commutative Banach algebras*, Proc. Amer. Math. Soc., **94**(1985), 65–71

[29] K. Jarosz and V. D. Pathak, *Isometries between function spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **305** (1988), 193–206.

[30] R. V. Kadison, *Isometries of operator algebras,* Ann. of Math. **54** (1951), 325–338.

[31] R. V. Kadison, *A generalized Schwarz inequality and algebraic invariants for operator algebras,* Ann. of Math. **56** (1952), 494–503.

[32] S. Kakutani, *Rings of analytic functions*, Lectures on functions of a complex variable, The Univ. of Michigan Press, Ann Arbor, (1955), 71–83

[33] K. Kawamura, *Banach-Stone type theorems for C^1-function spaces over Riemannian manifolds*, Acta Sci. Math. (Szeged), **83** (2017), 551–591

[34] K. Kawamura, *Perturbations of norms on C^1-function spaces and associated isometry groups*, Topology Proc., **51** (2018), 169–196

[35] K. Kawamura, H. Koshimizu and T. Miura, *Norms on $C^1([0,1])$ and their isometries*, Acta Sci Math. (Szeged), **84** (2018), 239–261

[36] K. Kawamura and T. Miura, *Real-linear surjective isometries between function spaces*, Topology Appl., **226** (2017), 66–85

[37] J. Lamperti, *On the isometries of certain function-spaces*, Pacific. J. Math., **8** (1958), 459–466

[38] P. Mankiewicz, *On extension of isometries in normed linear spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys., **20** (1972), 367–371

[39] M. Marcus *All linear operators leaving the unitary group invariant*, Duke Math. J. **26** (1959), 155–163

[40] S. Mazur and S. Ulam, *Sur les transformations isométriques d'espaces vectoriels normés*, C. R. Acad. Sci, Paris, **194** (1932), 946–948

[41] T. Miura, *Real-linear isometries between function algebras*, Cent. Eur. J. Math., **9** (2011), 778–788

[42] T. Miura, *Surjective isometries between function spaces*, Contemp. Math., **645** (2015), 231–239

[43] T. Miura and H. Takagi, *Surjective isometries on the Banach space of continuously differentiable functions*, Contemp. Math., **687** (2017), 181–192

[44] L. Molnár, *Maps between the positive definite cones of operator algebras preserving a norm of a geodesic correspondence*, Acta Sci. Math. (Szeged), **84** (2018), 451–463

[45] M. Mori and N. Ozawa, *Mankiewicz's theorem and the Mazur-Ulam property for C^*-algebras*, Studia Math., Published online: 6 August 2019

[46] M. Nagasawa, *Isomorphisms between commutative Banach algebras with an application to rings of analytic functions*, Kōdai Math. Sem. Rep., **11** (1959), 182–188

[47] A. Nikou and A. G. O'Farrell, *Banach algebras of vector-valued functions*, Glasg. Math. J., **56** (2014), 419–426; Corrigendum, Glasg. Math. J., Trust 2019

[48] M. Nagumo, *Einige analytische Untersuchungen in linearen metrischen Ringen*, Japan. J. Math., **13** (1936), 61-80

[49] W. Novinger, *Linear isometries of subspaces of spaces of continuous functions*, Studia Math., **53** (1975), 273–276

[50] S. Oi, *Hermitian operators and isometries on algebras of matrix-valued Lipschitz maps*, Linear Multilinear Algebras, Published online: 08 October 2018

[51] T. W. Palmer, *Banach algebras and the general theory of *-algebras. Vol. I. Algebras and Banach algebras*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 49, Cambridge University Press, Cambridge, 1994

[52] A. L. Paterson and A. M. Sinclair, *Characterizations of isometries between C^*-algebras*, J. London Math. Soc., **2** (1972), 755–761

[53] A. M. Peralta, *A survey on Tingley's problem for operator algebras*, Acta Sci. Math. (Szeged), **84** (2018), 81–123

[54] M. Rais, *The unitary group preserving maps (the infinite dimensional case)*, Linear Multilinear Algebras, **20** (1987), 337–345

[55] N. V. Rao and A. K. Roy, *Linear isometries of some function spaces*, Pacific J. Math., **38** (1971), 177–192

[56] T. M. Rassias, *Properties of isometric mappings*, J. Math. Anal. Appl., **235** (1999), 108–121.

[57] C. E. Rickart, *General theory of Banach algebras*, The University Series in Higher Mathematics, D. van Nostrand Co., Inc., Princeton, N.J.-Toronto-London-New York, 1960. xi+394 pp.

[58] M. H. Stone, *Applications of the theorey of Boolean rings to general topology*, Trans. Amer. Math. Soc., **41** (1937), 375–481

[59] D. Tingley, *Isometries of the unit sphere*, Geom. Dedicata, **22** (1987), 371–378

[60] S. Ueki, *Isometries of the Zygmund F-algebra*, Proc. Amer. Math. Soc., **140** (2012), 2817–2824

[61] J. Väisälä, *A proof of the Mazur-Ulam theorem*, Amer. Math. Monthly, **110** (2003), 633–635

[62] N. Weaver, *Isometries of noncompact Lipschitz spaces*. Canad. Math. Bull., **38** (1995), 242–249

[63] N. Weaver, *Lipschitz algebras*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1999. xiv+223 pp.

[64] J. Wermer, *On algebras of continuous functions*, Proc. Amer. Math. Soc., **4** (1953), 866–869

[65] K. Yosida, *On the group embedded in the metrical complete ring*, Jap. J. Math., **13** (1936), 459–472

[66] W. Żelazko, *Banach Algebras*, Translated from the Polish by Marcin E. Kuczma, Elsivier Publishing Co., Amsterdam-London-New York; PWN–Polish Scientifc Publishers, Warsaw, 1973. xi+182 pp.

Institute of Science and Technology
Niigata University
Niigata 950-2102
JAPAN

Isometries on spaces of differentiable functions with several norms

National Institute of Technology, Yonago College Hironao Koshimizu

1 Introduction

Let $(E, \|\cdot\|_E)$ and $(F, \|\cdot\|_F)$ be normed linear spaces over the complex filed $\mathbb{C}$. A mapping $T : (E, \|\cdot\|_E) \to (F, \|\cdot\|_F)$ is called an *isometry* if

$$\|Tf - Tg\|_F = \|f - g\|_E$$

for all $f, g \in E$. The linear isometries on function spaces have been studied ([1, 2, 4, 5, 8, 9, 10]). The source of this subject is the classical Banach-Stone theorem, which characterizes the surjective complex-linear isometry on $C(X)$, the Banach algebra of all continuous complex-valued functions on a compact Hausdorff space X, equipped with the supremum norm

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| : t \in X\} \quad (f \in C(X)).$$

The Mazur-Ulam theorem [7] implies that every surjective isometry T with $T0 = 0$ is real-linear. Hence, we consider a characterization of surjective real-linear isometries between function spaces. For example, Ellis [3] gave the characterization of surjective real-linear isometries on $C(X)$, and hence we can get the form of surjective, not necessarily linear, isometries on $C(X)$.

In this paper, we treat with the space of continuously differentiable functions, as follows. We denote by $C^{(n)}([0,1])$ the normed linear space of all n-times continuously differentiable complex-valued functions on the closed unit interval $[0,1]$ with a norm. Note that we may regard $C^{(0)}([0,1])$ as $C([0,1])$. For example, $C^{(n)}([0,1])$ with one of the following norms is a Banach space;

$$\|f\|_C = \sup_{t\in[0,1]} \sum_{k=0}^{n} \frac{|f^{(k)}(t)|}{k!},$$

$$\|f\|_\Sigma = \sum_{k=0}^{n} \frac{\|f^{(k)}\|_\infty}{k!},$$

$$\|f\|_\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} |f^{(k)}(0)| + \|f^{(n)}\|_\infty,$$

for $f \in C^{(n)}([0,1])$. In particular, $(C^{(n)}([0,1]), \|\cdot\|_C)$ and $(C^{(n)}([0,1]), \|\cdot\|_\Sigma)$ are Banach algebras. In 2018, Kawamura and Miura with the author [6] gave the characterization of surjective real-linear isometries on $C^{(1)}([0,1])$ with respect to a certain norm including these norms. The main theorem of this paper generalizes the result to $C^{(n)}([0,1])$.

2 Results

Let D be a compact connected subset of $[0,1]^{n+1}$ and $c_k > 0$ for each $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. We define

$$\|f\|_{<D,\{c_k\}>} = \sup_{(r_0,r_1,\ldots,r_n)\in D} \left\{ \sum_{k=0}^{n} c_k |f^{(k)}(r_k)| \right\}$$

for each $f \in C^{(n)}([0,1])$. If $D_1 = \{(r, r, \ldots, r) \in [0,1]^{n+1} : r \in [0,1]\}$ and $c_k = 1/k!$, then $\|f\|_{<D_1,\{\frac{1}{k!}\}>} = \|f\|_C$. If $D_2 = [0,1]^{n+1}$ and $c_k = 1/k!$, then $\|f\|_{<D_2,\{\frac{1}{k!}\}>} = \|f\|_\Sigma$. If $D_3 = \{0\}^n \times [0,1]$ and $c_k = 1$, then $\|f\|_{<D_3,\{1\}>} = \|f\|_\sigma$.

We denote by p_k the projection from $[0,1]^{n+1}$ to the k-th coordinate in $[0,1]$ for $k = 0, 1, \ldots, n$, that is,

$$p_k(r_0, r_1, \ldots, r_n) = r_k \quad ((r_0, r_1, \ldots, r_n) \in [0,1]^{n+1}).$$

Since $p_k(D)$ is a compact connected subset of $[0,1]$, we write $p_k(D) = [a_k, b_k]$ with $a_k \leq b_k$. We denote $a + ib\epsilon$ by $[a+ib]^\epsilon$ for $a, b \in \mathbb{R}$ and $\epsilon \in \{\pm 1\}$. For each $z \in \mathbb{C}$, $[z]^\epsilon = z$ if $\epsilon = 1$, and $[z]^\epsilon = \overline{z}$ if $\epsilon = -1$.

Proposition 1. *The function $\|\cdot\|_{<D,\{c_k\}>}$ is a norm on $C^{(n)}([0,1])$ if and only if $\bigcup_{k=0}^{n} p_k(D) = [0,1]$.*

Proposition 2. *If $p_n(D) = [0,1]$, then the norm $\|\cdot\|_{<D,\{c_k\}>}$ is equivalent to $\|\cdot\|_\Sigma$. Hence, $(C^{(n)}([0,1]), \|\cdot\|_{<D,\{c_k\}>})$ is a Banach space.*

Theorem 3. *Suppose that $\bigcup_{k=0}^{n} p_k(D) = [0,1]$. If $T : (C^{(n)}([0,1]), \|\cdot\|_{<D,\{c_k\}>}) \to (C^{(n)}([0,1]), \|\cdot\|_{<D,\{c_k\}>})$ is a surjective real-linear isometry, then there exist a permutation τ of $\{0, 1, \ldots, n\}$, a function $w_k \in C^{(n-k)}([a_k, b_k])$ with $|w_k| = \frac{c_{\tau(k)}}{c_k}$, a $C^{(n-k)}$-diffeomorphism $\varphi_k : [a_k, b_k] \to [a_{\tau(k)}, b_{\tau(k)}]$ and $\delta_k \in \{\pm 1\}$ (for $k = 0, 1, \ldots, n$) such that*

$$(Tf)^{(k)} = w_k [f^{(\tau(k))} \circ \varphi_k]^{\delta_k} \quad \text{on} \quad [a_k, b_k]$$

for all $f \in C^{(n)}([0,1])$ and for all k.

Now we define the set

$$L = \{k \in \{0, 1, \ldots, n\} : a_k < b_k\}.$$

Proposition 4. *(1) If $k, \ell \in L$, then $\delta_k = \delta_\ell$.*
(2) If $k, \ell \in L$ with $[a_k, b_k] \cap [a_\ell, b_\ell] \neq \emptyset$, then $\varphi_k = \varphi_\ell$ on $[a_k, b_k] \cap [a_\ell, b_\ell]$.
(3) If $k \in L$, then $\tau(k) = k$. Hence, w_k is a unimodular function on $[a_k, b_k]$.

The proposition yields the following result immediately.

Corollary 5. *Suppose that $\bigcup_{k=0}^{n} p_k(D) = [0,1]$ and that $L = \{0, 1, \ldots, n\}$. If $T : (C^{(n)}([0,1]), \|\cdot\|_{<D,\{c_k\}>}) \to (C^{(n)}([0,1]), \|\cdot\|_{<D,\{c_k\}>})$ is a surjective real-linear isometry, then there exist a* *function* $w_k \in C^{(n-k)}([a_k, b_k])$ *with* $|w_k| = 1$*, a* $C^{(n-k)}$*-diffeomorphism* $\varphi_k : [a_k, b_k] \to [a_k, b_k]$ *(for* $k = 0, 1, \ldots, n$*) and* $\delta \in \{\pm 1\}$ *such that*

$$(Tf)^{(k)} = w_k [f^{(k)} \circ \varphi_k]^{\delta} \quad \textit{on} \quad [a_k, b_k]$$

for all $f \in C^{(n)}([0, 1])$ *and for all* k*.*

By Theorem 3 and Corollary 5, we can get the characterization of surjective real-linear isometries for several norms.

Example 1. Let $E \in \{C, \Sigma\}$. A surjective real-linear isometry $T : (C^{(n)}([0, 1]), \| \cdot \|_E) \to (C^{(n)}([0, 1]), \| \cdot \|_E)$ if and only if there exist $\lambda \in \mathbb{T}$ and $\delta \in \{\pm 1\}$ such that T has one of the following forms;
(a) $(Tf)(t) = \lambda [f(t)]^{\delta} \quad (\forall t \in [0, 1], \forall f \in C^{(n)}([0, 1]))$,
or
(b) $(Tf)(t) = \lambda [f(1 - t)]^{\delta} \quad (\forall t \in [0, 1], \forall f \in C^{(n)}([0, 1]))$.

Example 2. A surjective real-linear isometry $T : (C^{(n)}([0, 1]), \| \cdot \|_{\sigma}) \to (C^{(n)}([0, 1]), \| \cdot \|_{\sigma})$ if and only if there exist a permutation τ of $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, constants $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{T}$, a unimodular continuous function $w : [0, 1] \to \mathbb{T}$, a homeomorphism $\varphi : [0, 1] \to [0, 1]$ and $\delta_k \in \{\pm 1\}$ for $k = 0, 1, \ldots, n$ such that

$$(Tf)(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_k [f^{(\tau(k))}(0)]^{\delta_k}}{k!} t^k + \int_0^t \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{n-1}} w(t_n) [f^{(n)}(\varphi(t_n))]^{\delta_n} dt_n \ldots dt_2 dt_1$$

for all $t \in [0, 1]$ and for all $f \in C^{(n)}([0, 1])$.

Example 3. Let $D_4 = \{0\} \times [0, 1] \times [0, 1]$ and let $c_0 = c_1 = c_2 = 1$. We see that $\|f\|_{<D_4, \{1\}>} = |f(0)| + \|f'\|_{\infty} + \|f''\|_{\infty}$. Then a surjective real-linear isometry $T : (C^{(2)}([0, 1]), \| \cdot \|_{<D_4, \{1\}>}) \to (C^{(2)}([0, 1]), \| \cdot \|_{<D_4, \{1\}>})$ if and only if there exist $\lambda, \mu \in \mathbb{T}$ and $\delta_0, \delta_1 \in \{\pm 1\}$ such that T has one of the following forms;
(a) $(Tf)(t) = \lambda [f(0)]^{\delta_0} + \mu [f(t) - f(0)]^{\delta_1} \quad (\forall t \in [0, 1], \forall f \in C^{(2)}([0, 1]))$,
or
(b) $(Tf)(t) = \lambda [f(0)]^{\delta_0} + \mu [f(1 - t) - f(1)]^{\delta_1} \quad (\forall t \in [0, 1], \forall f \in C^{(2)}([0, 1]))$.

Example 4. Let $D_5 = [0, \frac{1}{2}] \times [0, 1]$ and let $c_0 = c_1 = 1$. Then a surjective real-linear isometry $T : (C^{(1)}([0, 1]), \| \cdot \|_{<D_5, \{1\}>}) \to (C^{(1)}([0, 1]), \| \cdot \|_{<D_5, \{1\}>})$ if and only if there exist $\lambda \in \mathbb{T}$, a unimodular continuous function $w : [0, 1] \to \mathbb{T}$ with $w = \lambda$ on $[0, \frac{1}{2}]$, a homeomorphism $\varphi : [0, 1] \to [0, 1]$ with $\varphi(t) = t$ on $[0, \frac{1}{2}]$ and $\delta \in \{\pm 1\}$ such that

$$(Tf)(t) = \begin{cases} \lambda [f(t)]^{\delta} & (t \in [0, \frac{1}{2}]) \\ \lambda [f(\frac{1}{2})]^{\delta} + \int_{\frac{1}{2}}^{t} w(s) [f'(\varphi(s))]^{\delta} ds & (t \in [\frac{1}{2}, 1]) \end{cases}$$

for all $f \in C^{(1)}([0, 1])$.

References

[1] F. Botelho and J. Jamison, *Surjective isometries on spaces of differentiable vector-valued functions*, Studia Math. **192** (2009), 39-50.

[2] M. Cambern, *Isometries of certain Banach algebras*, Studia Math. **25** (1965), 217–225.

[3] A. J. Ellis, *Real characterizations of function algebras amongst function spaces*, Bull. London Math. Soc. **22** (1990), 381–385.

[4] R. Fleming and J. Jamison, *Isometries on Banach spaces: function spaces*, Chapman & Hall/CRC Monogr. Surv. Pure Appl. Math. 129, Boca Raton, 2003.

[5] O. Hatori and T. Miura, *Real linear isometries between function algebra. II*, Cent. Eur. J. Math. **11** (2013), 1838–1842.

[6] K. Kawamura, H. Koshimizu and T. Miura, *Norms on* $C^1([0,1])$ *and their isometries*, Acta Sci. Math. (Szeged) **84** (2018), no. 1–2, 239–261.

[7] S. Mazur and S. Ulam, *Sur les transformationes isométriques d'espaces vectoriels normés*, C. R. Acad. Sci. Paris **194** (1932), 946–948.

[8] T. Miura, *Real-lienar isometries between function algebras*, Cent. Eur. J. Math. **9** (2001), 778-788.

[9] V.D. Pathak, *Isometries of* $C^{(n)}[0,1]$, Pacific J. Math. **94** (1981), no. 1, 211–222.

[10] N.V. Rao and A.K. Roy, *Linear isometries of some function spaces*, Pacific J. Math. **35** (1971), 177–192.

Hermitian operators on Banach algebras of vector-valued continuous maps

新潟県立八海高等学校　大井　志穂

1　導入

バナッハ空間 B_i に対して，B_1 から B_2 への全射等距離写像を U とおく。このとき，全射等距離写像 U は荷重合成作用素であるかという問いは次の Banach-Stone の定理からただちに導かれる。

Theorem 1 *Let X_i be a compact Hausdorff space. Then U is a surjective complex-linear isometry from $C(X_1)$ onto $C(X_2)$ with $\|\cdot\|_\infty$ if and only if there exists a homeomorphism $\varphi : X_2 \to X_1$ and a continuous function $\alpha \in C(X_2)$ with $|\alpha| = 1$ such that*

$$Uf(x) = \alpha(x)f(\varphi(x)), \quad f \in C(X_1),\ x \in X_2.$$

Banach 空間上のエルミート作用素の研究は，Vidav [9] と Lumer [6, 7] によって始められ，Lumer は Banach 空間上に定義された半内積を用いて，エルミート作用素を次のように定義した。

Definition 2 *Banach* 空間 B に対して，有界線形作用素 $T : B \to B$ がエルミート作用素であるとは，B 上のある半内積 $[\cdot, \cdot]$ に対して，

$$[Ta, a] \in \mathbb{R}, \quad a \in B$$

をみたすときをいう。

Banach 空間の間の全射等距離写像とエルミート作用素は，非常に強い関連がある。例えば，次のような事実が知られている。

Fact 3 *Let B_i be a Banach space for $i = 1, 2$. Suppose that $T : B_1 \to B_1$ is a Hermitian operator and $U : B_1 \to B_2$ is a surjective linear isometry. Then we have*

$$UTU^{-1} : B_2 \to B_2$$

is a Hermitian operator.

この事実を用いて Banach 空間上の等距離写像を決定する方法を，Lumer の方法と呼ぶ。Lumer の方法を適応して，全射等距離写像を決定するためにはまず，対応する Banach 空間上のエルミート作用素を決定することが必要である。1980 年に Fleming and Jamison は論文 [2] において，ベクトル値連続写像全体からなる Banach 空間の間に定義されたエルミート作用素を決定した。

Theorem 4 *Let E be a Banach space and X a compact Hausdorff space. Then $T : C(X,E) \to C(X,E)$ is a Hermitian operator if and only if for any $x \in X$ there exists a Hermitian operator $\phi(x) : E \to E$ such that*

$$TF(x) = \phi(x)(F(x)), \quad F \in C(X,E), x \in X.$$

このエルミート作用素の特徴づけを用いて，Fleming and Jamison は全射等距離写像の形が決定されるための十分条件を次のように得た。

Theorem 5 *Let E be a Banach space on which the set of all Hermitian operators has real dimension one. Then $U : C(X_1,E) \to C(X_2,E)$ is a surjective linear isometry if and only if there exist a homeomorphism $\varphi : X_2 \to X_1$ and a continuous function $x \mapsto V(x)$ from X_2 into the space of bounded linear operators on E given its strong topology with for each $x \in X_2$, $V(x)$ is an isometry on E and*

$$UF(x) = V(x)F(\varphi(x)), \quad F \in C(X_1,E), x \in X_2.$$

$E = \mathbb{C}$ の場合，複素数上のエルミート作用素は，実数の multiplication operator 全体であることが知られているため，上の定理の条件を満たす。よってこの定理は Banach-Stone の定理の一般化を与えた定理である。この報告書では，全射等距離写像がいまだ決定できていない Banach 空間に対して，その解決を図る方法としてエルミート作用素を決定することを第一の課題とし，その成果を報告する。

2 主結果

等距離写像が決定できていない Banach 空間として，Lipschitz 環がある。2019 年の Hatori and Oi [5] において，コンパクト距離空間 X 上に定義された複素数値リプシッツ関数全体からなる Banach 環 $\mathrm{Lip}(X)$ の間の全射等距離写像が荷重合成作用素になることが最終的に証明されたが，ベクトル値 Lipschitz 環の間の全射等距離写像はいまだほとんど決定されていないのが現状である。この問題を解決するための一つの方法としてエルミート作用素を用いる Lumer の方法を考える。まず，ベクトル値 Lipschitz 環上のエルミート作用素の特徴づけが次のように得られた。

Theorem 6 *Let X be a compact metric space and E a Banach space. Then a bounded linear operator $T : \mathrm{Lip}(X,E) \to \mathrm{Lip}(X,E)$ is a Hermitian operator with $\|\cdot\|_s = \|\cdot\|_\infty + L(\cdot)$ if and only if there exists a Hermitian operator ϕ on E such that*

$$TF(x) = \phi(F(x)), \quad F \in \mathrm{Lip}(X,E).$$

Lipschitz 環上のエルミート作用素に関する定理は，2014 年に Botelho, Jamison, Jiménez-Vargas and Villegas-Vallecillos によって，論文 [1] において $E = \mathbb{C}$ の場合が解決されたのが始まりである。この定理はその定理を含んだ一般的な定理となっている。

3 応用

Theorem 6 を用いることで，いくつかのベクトル値 Lipschitz 環上の全射等距離写像の形が部分的に決定できることも分かっている。最後にそれらの定理を紹介し，本報告書を締める。

Theorem 7 *[3, 4] Let X_i be a compact metric space and Y_i a compact Hausdorff space. Then U is a linear isometry from $\mathrm{Lip}(X_1, C(Y_1))$ onto $\mathrm{Lip}(X_2, C(Y_2))$ such that $U(1) = 1$ if and only if there exist a continuous map $\varphi : X_2 \times Y_2 \to X_1$ such that $\varphi(\cdot, y) : X_2 \to X_1$ is a surjective isometry for each $y \in Y_2$, and a homeomorphism $\tau : Y_2 \to Y_1$ which satisfy that*

$$UF(x, y) = F(\varphi(x, y), \tau(y)) \quad x \in X_2, y \in Y_2 \tag{1}$$

for every $F \in \mathrm{Lip}(X_1, C(Y_1))$.

実は，Hatori and Oi [5] において，Theorem 7 の条件 $U(1) = 1$ を外したとしても，全射等距離写像は荷重合成作用素に限ることが示されている。詳しくは [5] を参照してもらいたいが，$U(1)$ を決定するための議論において，Lumer の方法は直接的に関係していないことに注意する。

Theorem 8 *[8] Let X_j be a compact metric space for $j = 1, 2$. Then $U : \mathrm{Lip}(X_1, M_n(\mathbb{C})) \to \mathrm{Lip}(X_2, M_n(\mathbb{C}))$ is a linear surjective isometry such that $U(1) = 1$ if and only if there exists a unitary matrix $V \in M_n(\mathbb{C})$, and a surjective isometry $\varphi : X_2 \to X_1$, such that*

$$(UF)(x) = VF(\varphi(x))V^{-1}, \quad F \in \mathrm{Lip}(X_1, M_n(\mathbb{C})),\ x \in X_2$$

or

$$(UF)(x) = VF^t(\varphi(x))V^{-1}, \quad F \in \mathrm{Lip}(X_1, M_n(\mathbb{C})),\ x \in X_2,$$

where $F^t(y)$ denote transpose of $F(y)$ for $y \in X_1$.

参考文献

[1] F. Botelho, J. Jamison, A. Jiménez-Vargas and M. Villegas-Vallecillos, *Hermitian operators on Banach algebras of Lipschitz functions,* Proc. Amer. Math, Soc. **142** (2014), 3469–3481.

[2] R. J. Fleming and J. E. Jamison, *Hermitian Operators on $C(X, E)$ and the Banach-Stone Theorem,* Math. Z., **170** (1980), 77–84.

[3] O. Hatori and S. Oi, *Hermitian operators on Banach algebras of vector-valued Lipschitz maps*, J. Math. Anal. Appl. **452** (2017), 378–387;

[4] O. Hatori and S. Oi, *Corrigendum to "Hermitian operators on Banach algebras of vector-valued Lipschitz maps" [J. Math. Anal. Appl. 452 (2017) 378–387] [MR3628025].*

[5] O. Hatori and S. Oi, *Isometries on Banach algebras of vector-valued maps,* Acta Sci. Math. (Szeged), **84** (2018), 151–183.

[6] G. Lumer, *Semi-inner product of bounded maps into Banach space,* Trans. Amer. Math. Soc. **100** (1961), 26–43.

[7] G. Lumer, *On the isometries of reflexive Orlicz spaces,* Ann. Inst. Fourier, (1963), 99–109.

[8] S. Oi, *Hermitian operators and isometries on algebras of matrix-valued Lipschitz maps,* Linear and Multilinear Algebra, in press, DOI: 10.1080/03081087.2018.1530723.

[9] I. Vidav, *Eine metrische Kennzeichnung der selbstadjungierten Operatoren*, Math. Z. **66** (1956), 121–128

Weighted composition operators on spaces of functions with derivative

Shûichi Ohno

1 Introduction

Throughout this paper, let $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ be the space of all analytic functions on the open unit disk $\mathbb{D}$. For each function $u \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ and an analytic self-map φ of $\mathbb{D}$, we may define the weighted composition operator $M_u C_\varphi$ by

$$(M_u C_\varphi f)(z) = u(z) f \circ \varphi(z)$$

for $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ and $z \in \mathbb{D}$. When $u \equiv 1$, $M_u C_\varphi = C_\varphi$ is a composition operator. By the Littlewood's subordination theorem, we know that C_φ is bounded on the Hardy spaces. We refer to [9, 25] for an overview of composition operators.

(Weighted) composition operators have been extensively investigated on various analytic function spaces during recent decades. The main theme is to characterize the operator-theoretic behavior of weighted composition operators in terms of the function-theoretic properties of the weight u and the symbol φ.

We here will consider weightted composition operators on spaces of functions with derivative in some analytic function spaces.

2 The space S^p

For $1 \le p < \infty$, let H^p be the classical Hardy space of all analytic functions f on the open unit disk $\mathbb{D}$ such that

$$\|f\|_{H^p}^p = \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f^*(e^{i\theta})|^p d\theta < \infty,$$

where $f^*(e^{i\theta}) = \lim_{r \to 1} f(re^{i\theta})$ a.e. on the boundary $\partial\mathbb{D}$ of $\mathbb{D}$. From now on, we will write f^* by f also and put $dm = d\theta/2\pi$. Let H^∞ be the Banach algebra of all bounded analytic functions f on $\mathbb{D}$, endowed with the supremum norm

$$\|f\|_\infty = \sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)|.$$

See [12] or [23] for any standard reference of the Hardy spaces.

We focus our work on the following spaces. For $1 \le p \le \infty$, the space S^p is the collection of all functions $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ such that $f' \in H^p$. Then S^p is a Banach space with the norm

$$\|f\|_{S^p} = |f(0)| + \|f'\|_{H^p},$$

which is called "the derivative Hardy space" by some authors.

For each $\lambda \in \mathbb{D}$, the evaluation of function in S^2 at λ is a bounded linear functional and for each $f \in S^2$,

$$f(\lambda) = \langle f, K_\lambda \rangle,$$

where

$$K_\lambda(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\overline{\lambda} z)^n}{n^2}.$$

Then S^p is a Banach algebra.

Basic Facts.

(1) By a classical result of Privalov [12, Theorem 3.11], each $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ is continuous on $\overline{\mathbb{D}}$ and absolutely continuous on $\partial\mathbb{D}$ if and only if $f' \in H^1$. Thus, it holds

$$S^\infty \subset S^p \subset S^1 \subset A = A(\mathbb{D}) \text{ (the disk algebra).}$$

Here $A = A(\mathbb{D})$ is the disk algebra endowed with the norm

$$\|f\|_A = \sup\{|f(z)| : z \in \overline{\mathbb{D}}\}.$$

(2) The inclusion operator $j_p : S^p \to A$ is compact if and only if $1 < p \le \infty$.

(3) The polynomials are dense in S^p.

(4) The polynomials are dense in S^∞ with respect to the supremum norm of A.

To characterize the compactness, we will need the so-called "weak convergence theorem" obtained by adapting the proof of [9, Proposition 3.11].

Proposition 2.1 *For $1 \le p, q \le \infty$, let $X = S^p$ or H^p and $Y = S^q, H^q$ or A. Let $u \in Y$ and φ an analytic self-map of $\mathbb{D}$. Suppose that $M_u C_\varphi : X \to Y$ is bounded. The $M_u C_\varphi : X \to Y$ is compact (weakly compact) if and only if whenever $\{f_n\}$ is a bounded sequence in X and f_n converges to 0 uniformly on every compact subset of $\mathbb{D}$, $\|M_u C_\varphi f_n\|_Y \to 0$ ($\{M_u C_\varphi f_n\}$ is a weak null sequence in Y).*

Recall that C_φ is compact on S^2 if and only if $\|\varphi\|_\infty < 1$ ([20, 25]).

Since

$$(M_u C_\varphi f)' = u' f \circ \varphi + u \varphi' f' \circ \varphi,$$

the study of $M_u C_\varphi : S^p \to S^q$ is equivalent to the study of any of these operators: $M_u C_\varphi : S^p \to H^q$ and $M_{u\varphi'} C_\varphi : H^p \to H^q$.

We could modify Theorem 2.1 of Contreras and Hernández-Díaz [8].

Theorem 2.2 (Contreras and Hernández-Díaz (2004)[8]) *For $1 \leq p, q \leq \infty$, let $u \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ and φ an analytic self-map of $\mathbb{D}$.*

(1) $M_u C_\varphi : S^p \to S^q$ is bounded if and only if $u \in S^q$ and $M_{u\varphi'} C_\varphi : H^p \to H^q$ is bounded.

(2) Suppose $(p, q) \neq (1, \infty)$. Then $M_u C_\varphi : S^p \to S^q$ is compact if and only if $u \in S^q$ and $M_{u\varphi'} C_\varphi : H^p \to H^q$ is compact.

The boundedness of $M_u C_\varphi : S^p \to S^q$ implies that u and $u\varphi$ are in S^q, so u and $u\varphi$ extend continuously to $\overline{\mathbb{D}}$. Then φ extends continuously almost everywhere to $\overline{\mathbb{D}}$ and φ is not necessarily in the disk algebra.

(1) Let $u(z) = (1-z)^2$ and $\varphi(z) = exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$. Then $u\varphi \in A$ and $\varphi \notin A$.

(2) Let $u(z) = (1-z)^2$ and $\varphi(z) = \dfrac{1}{2} exp\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)$. Then $M_u C_\varphi : S^1 \to S^1$ is compact, but $u\varphi \in A$ and $\varphi \notin A$.

The boundedness and compactness of weighted composition operators acting different Hardy spaces are characterized in [6, 7, 11], using the notions of Carleson measures.

Problem. Characterize the boundedness and compactness of operators $M_{u\varphi'} C_\varphi : H^p \to H^q$ by the function-theoretic properties of the weight $u\varphi'$ and the symbol φ.

Next we consider the excluded case.

Theorem 2.3 (Contreras and Hernández-Díaz (2004)[8]) *For $u \in S^\infty$ and an analytic self-map φ of $\mathbb{D}$ such that $M_u C_\varphi : S^1 \to S^\infty$ is bounded, the following hold.*

(1) $M_u C_\varphi : S^1 \to S^\infty$ is compact if and only if $\|\varphi\|_\infty < 1$ or

$$\lim_{|\varphi(z)| \to 1} |u'(z)| = \lim_{|\varphi(z)| \to 1} \frac{|u(z)\varphi'(z)|}{1 - |\varphi(z)|^2} = 0.$$

(2) $M_u C_\varphi : S^1 \to S^\infty$ is weakly compact if and only if $\|\varphi\|_\infty < 1$ or

$$\lim_{|\varphi(z)| \to 1} |u'(z)| = 0.$$

Furthermore we consider the Hilbrt-Schmidtness of $M_u C_\varphi$ on S^2.

Let T be a bounded linear operator on a Hilbert space $\mathcal{H}$ with the orthonomal basis $\{e_n\}$. Then T is called a Hilbrt-Schmidt operator on $\mathcal{H}$ if and only if

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|_{\mathcal{H}}^2 < \infty.$$

Theorem 2.4 *$M_u C_\varphi$ is Hilbrt-Schmidt on S^2 if and only if*

$$\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{|u(e^{i\theta})\varphi'(e^{i\theta})|^2}{1 - |\varphi(e^{i\theta})|^2} \, dm(\theta) < \infty.$$

3 $S^1 \to A$

Recall that the inclusion operator $j_p : S^p \to A$ is compact if and only if $1 < p \leq \infty$.

Contreras and Hernández-D*í*az [8] considred the operator M_uC_φ acting from S^p to H^q for $1 \leq p, q \leq \infty$, but the case between S^1 and the disk algebra has been left.

Theorem 3.1 *$M_uC_\varphi : S^1 \to A$ is bounded if and only if $u\varphi^k \in A$ for $k = 0, 1, 2, \ldots$.*

Theorem 3.2 *$M_uC_\varphi : S^1 \to A$ is compact if and only if $u \equiv 0$.*

4 The space S_A

Let A be the disk algebra. Then S_A denotes the space of all analytic functions f on the open unit disk $\mathbb{D}$ such that $f' \in A$. Then S_A is a Banach space with the norm

$$\|f\|_{S_A} = |f(0)| + \|f'\|_A,$$

where $\|f\|_A = \sup\{|f(z)| : z \in \overline{\mathbb{D}}\}$.

Theorem 4.1 *Suppose that $u, \varphi \in A$ with $\varphi(\overline{\mathbb{D}}) \subset \overline{\mathbb{D}}$. Then $M_uC_\varphi : S_A \to S_A$ is bounded if and only if $u, u\varphi \in S_A$.*

Theorem 4.2 *Let $u, \varphi \in A$with $\varphi(\overline{\mathbb{D}}) \subset \overline{\mathbb{D}}$. And assume that $u, u\varphi \in S_A$. Then the following conditions are equivalent.*

(i) $M_uC_\varphi : S_A \to S_A$ *is compact.*

(ii) $M_{u\varphi'}C_\varphi : A \to A$ *is compact.*

(iii) $\|\varphi\|_\infty < 1$ *or* $\lim_{|\varphi(z)| \to 1} |u(z)\varphi'(z)| = 0$.

By the Julia-Carathéodory theorem, a condition (iii) implies that $\lim_{|\varphi(z)| \to 1} |u(z)| = 0$. Then $M_uC_\varphi : A \to A$ is compact.

参考文献

[1] R.F. Allen, R.C. Heller and M.A. Pons, Compact differences of composition operators on weighted Dirichlet spaces, Cent.Eur. J.Math. 12(2014), no.7,1040–1051.

[2] R.F. Allen, R.C. Heller and M.A. Pons, Multiplication operators on $S^2(\mathbb{D})$, Acta. Sci. Math.(Szeged) 81(2015), no.3-4, 575–587.

[3] W. Al-Rawashdeh, Weighted composition operators between weighted Bergman and S^p spaces, Bull. Math. Anal. Appl. 5(2013), no.4, 54–64.

[4] W. Al-Rawashdeh, Composition operators from weighted Bergman spaces to S^p spaces, New Zealand J. Math. 47(2017), 141–150.

[5] S.C. Arora and M. Mukherjee and A. Panigrahi, Weighted composition operators on the space $S^p(\mathbb{D})$, Bull. Calcutta Math.Soc. 88(1996), no.2, 151–154.

[6] M. D. Contreras and A. G. Hernández-D$\acute{\imath}$az, Weighted composition operators on Hardy spaces, J. Math. Anal. Appl. 263(2001), no.1, 224–233.

[7] M. D. Contreras and A. G. Hernández-D$\acute{\imath}$az, Weighted composition operators between different Hardy spaces, Integral Equations Operator Theory 46(2003), no.2, 165–188.

[8] M.D. Contreras and A.G. Hernández-D$\acute{\imath}$az, Weighted composition operators on spaces of functions with derivative in a Hardy space, J. Operator Theory 52(2004), no.1,173–184.

[9] C. C. Cowen and B. D. MacCluer, Composition Operators on Spaces of Analytic Functions, CRC Press, Boca Raton, 1995.

[10] Ž. Čučković and B. Paudyal, Invariant subspaces of the shift plus complex Volterra operator, J. Math. Anal. Appl. 426(2015), no.2, 1174–1181.

[11] Ž. Čučković and R. Zhao, Weighted composition operators between different weighted Bergman spaces and different Hardy spaces, Illinois J. Math. 51(2007), no.2, 479–498.

[12] P.L. Duren, Theory of H^p Spaces. Academic Press, New York, 1970.

[13] L. Gu and S. Luo, Composition and multiplication operators on the derivative Hardy space $S^2(\mathbb{D})$. Complex Var. Elliptic Equ.63(2018), no.5, 599–624.

[14] A. Gupta and A. Malhotra, Complex symmetric weighted composition operators on the sapce $\mathcal{H}_1^2(\mathbb{D})$, to appear in Complex Var. Elliptic Equ..

[15] K.C. Heller, Composition Operators on $S^2(\mathbb{D})$, Thesis (Ph.D.)-University of Virginia, 2010, 143 pp.

[16] K.C. Heller, Adjoints of linear fractional composition operators on $S^2(\mathbb{D})$, J. Math. Anal. Appl.394(2012),no.2,724–737.

[17] K.C. Heller, Commutators of linear fractional composition operators on $S^2(\mathbb{D})$, Houston J. Math.43(2017),no.4,1111–1131.

[18] E. Ko, J.E. Lee and J. Lee, Multiplication and Toeplitz operators on the generalized derivative Hardy space, Complex Anal.Oper.Theory 13(2019),no.8,4143–4164.

[19] Q. Lin, J. Liu and Y. Wu, Volterra type operators on $S^p(\mathbb{D})$ spaces, J. Math. Anal. Appl. 461(2018), no.2, 1100–1114.

[20] B.M. MacCluer, Composition operators on S^p, Houston J. Math., 13(1987), no.2, 245–254

[21] W.P Novinger and D.M. Oberlin, Linear isometries of some normed spaces of analytic functions, Canad. J. Math. 37(1985), no.1, 62–74.

[22] R. Roan, Composition operators on the space of functions with H^p-derivative, Houston J. Math.,4(1978), no.3,423–428.

[23] W. Rudin, Real and Complex Analysis, Third Edition, McGraw-Hill, New York, 1987.

[24] J.H. Shapiro, Compact composition operators on spaces of boundary-regular holomor-phic functions, Proc.Amer.Math.Soc.100(1987), no.1, 49–57.

[25] J.H. Shapiro, Composition Operators and Classical Function Theory, Springer-Verlag, New York, 1993.

[26] K. Zhu, Operator Theory on Function Spaces, Marcel Dekker, New York, 1990 ; Second Edition, Amer. Math. Soc., Providence, 2007.

[27] N. Zorboska, Composition operators on S_a spaces, Indiana Univ. Math. J. 39(1990), no.3, 847–857.