2007年度 関数環研究集会

報　告　集

2008年 5月

2007年度の関数環研究集会は，2007年11月26日(月)・27日(火)の2日間，信州大学 理学部にて開催されました。大勢の方々にご参加いただき，12の講演が行われました。2日間，有意義な情報交換や活発な討論ができ，充実した集会になりました。ご講演くださった皆様をはじめ，ご参加くださった皆様，そして，集会にご協力くださいました皆様に，心よりお礼申し上げます。

講演者の方々には報告原稿をお書きいただきましたので，ここに取りまとめ，報告集といたします。

世話人： 信州大学 理学部　高木 啓行

2007年度 関数環研究集会 プログラム

11月26日 (月)

11月27日 (火)

Nevanlinna 型空間における因数分解定理について

岩手医科大学共通教育センター　　飯田 安保 (Yasuo IIDA)

Nenvanlinna class や Hardy 空間といった Nevanlinna 型空間に属する関数では、それぞれにおいて因数分解定理が知られている。この報告集では種種の空間での因数分解定理を紹介し、その因数分解定理の違いを生み出す factor について考察する。なお、ここでは単位円板における Nevanlinna 型空間について考えるものとする。

1. Nevanlinna 型空間の定義

まず、単位円板 $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ 上の Nevanlinna 型空間の定義を与える。

定義 1-1

> f を 単位円板 $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ 上の正則関数とする。 また $T = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ とする。
>
> 1. $\displaystyle\sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta < +\infty$ を満たすとき、 $f \in N$ とする。
>
> （注意） $f \in N$ のとき、$f^*(e^{i\theta}) := \displaystyle\lim_{r \to 1^-} f(re^{i\theta})$ が a.e. $e^{i\theta} \in T$ で存在する。
>
> 2. $f \in N$ で $\displaystyle\sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta = \int_0^{2\pi} \log^+ |f^*(e^{i\theta})| d\theta$ を満たすとき、$f \in N_*$ とする。
>
> 3. $p > 1$ とする。$\displaystyle\sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} \left(\log^+ |f(re^{i\theta})|\right)^p d\theta < +\infty$ を満たすとき、$f \in N^p$ とする。
>
> 4. $0 < q < \infty$ とする。$\displaystyle\sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^q d\theta < +\infty$ を満たすとき、 $f \in H^q$ とする。

N を Nevanlinna class, N_* を Smirnov class, N^p を Privalov space, H^q を Hardy space と呼ぶ。これらの空間のあいだには、包含関係 $H^q \subset N^p \subset N_* \subset N$ $(p > 1; 0 < q < \infty)$ が成り立つ。N とその部分空間 $N_*; N^p; H^q$ 等を総称して Nevanlinna 型空間と呼ぶ [I]。

2. Nevanlinna 型空間に属する関数の因数分解定理について

① N の場合

定理 2-1([RR])

> N に属する関数 f は以下のように因数分解される：
>
> $$f(z) = \frac{aB(z)F(z)S_1(z)}{S_2(z)} \quad (z \in U) \cdots\cdots (*)$$
>
> ここで各 factor は以下の通りである：
>
> (i) a は絶対値 1 の複素定数.
>
> (ii) $B(z) = z^m \prod_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{a_n} \frac{a_n - z}{1 - \overline{a_n} z} \quad (z \in U)$ ：f **の零点** $\{a_n\}$ **からなる** Blaschke **積**
>
> (iii) $F(z) = \exp\left(\int_T \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \log h(\zeta)\, d\sigma(\zeta) \right)$ ：N **に対する外関数** (outer function)
>
> ここで $\log h \in L^1(T)$ で、σ は T 上の normalized Lebesgue measure である.
>
> (iv) $S_j(z) = \exp\left(-\int_T \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d\mu_j(\zeta) \right)$ ：**内関数** (inner function)
>
> ここで μ_1, μ_2 はともに positive measure で、どちらも σ に関して singular で、互いに singular である.
>
> 逆に、関数 f が $(*)$ の形で表されるとき、$f \in N$ である。

2 N_* の場合

定理 2-2([RR])

> N_* に属する関数 f は以下のように因数分解される：
>
> $$f(z) = aB(z)F(z)S_1(z) \quad (z \in U)$$
>
> ここで $a, B(Z), F(z), S_1(z)$ は N の場合と同じである。

※ N に属する関数の因数分解定理で $\mu_2 = 0$、つまり $S_2(z) \equiv 1$ となる場合である。

3 N^p の場合

定理 2-3([I])

> $p > 1$ とする。N^p に属する関数 f は以下のように因数分解される：
>
> $$f(z) = aB(z)F(z)S_1(z) \quad (z \in U)$$
>
> ここで $a, B(Z), F(z), S_1(z)$ は N の場合と同じであるが、外関数の条件として $\log^+ h \in L^p(T)$ が追加される。

※この外関数を特に「N^p **に対する外関数**」と呼んだりする。

4 H^q の場合

定理 2-4([RR])

> $0 < q < 1$ とする。H^q に属する関数 f は以下のように因数分解される：
>
> $$f(z) = aB(z)F(z)S_1(z) \quad (z \in U)$$
>
> ここで $a; B(Z); F(z); S_1(z)$ は N の場合と同じであるが、外関数の条件として $h \in L^q(T)$ が追加される。

3. その他の空間の因数分解定理について

5 クラス K について

Shapiro と Shields は共著の論文 [SS] の中で、N は通常導入される距離位相に関して非連結であり、かつ無限個の連結成分があることを示し、さらに「N の原点を含む連結成分は N_* である」という予想をした。これは後に Roberts によって否定的に解決された。ここでは、その Roberts の結果を紹介しよう。

定理 3-1([R])

> $K = \left\{ \frac{f}{S_1} : f \in N_* \right\}$ とする。ただし $S_1(z) = \exp\left(-\int_T \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d\mu(\zeta) \right)$ で、μ は T 上の continuous nonnnegative singular measure とする。このとき、K は N の原点を含む連結成分である。

（注）$N_* \subset K$ である。

6 クラス N_*^+ について

Privalov は自身の著作の中で次のようなクラス N_*^+ を導入した：

定義 3-2([P])

> N に属する関数 f が $\sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} |\log|f(re^{i\theta})||d\theta = \int_0^{2\pi} |\log|f^*(e^{i\theta})||d\theta$ を満たすとき、$f \in N_*^+$ とする。

このクラスに属する関数に成り立つ因数分解定理は、以下のように“ inner part ”が無い形となる。

定理 3-3([M])

> N_*^+ に属する関数 f は以下のように因数分解される：
>
> $$f(z) = aB(z)F(z) \quad (z \in U)$$
>
> ここで $a; B(Z); F(z)$ は N の場合と同じである。

⑦ クラス M について

定義 3-4([CK])

> U 上の正則関数 f が $\displaystyle\int_0^{2\pi} \log^+ Mf(\theta)\,d\theta < +\infty$ を満たすとき、$f \in M$ とする。
>
> ここで、$Mf(\theta) = \sup\limits_{0<r<1} |f(re^{i\theta})|$ とする。

この空間 M は N^p と N_* の間に属する。もっと詳しく述べると、以下の包含関係が成り立つ：

$$H^q \subsetneq N^p \subsetneq M \subsetneq N_* \subsetneq N \quad (0 < q < \infty\,;\, p > 1)$$

M については、その外関数が M に属さないような場合があるので、これまでの形式のような因数分解定理は一般には考えられない [CK]。

さて、今までにあげた空間①から⑥までのそれぞれにおける、因数分解の factor の条件は次の表のようにまとめられる：

	a	B(z)	F(z)	$S_1(z)$	$S_2(z)$
N	$a \in T$	Blaschke 積	$\log h \in L^1(T)$	内関数	内関数
N_*	$a \in T$	Blaschke 積	$\log h \in L^1(T)$	内関数	恒等的に 1
N^p	$a \in T$	Blaschke 積	$\log h \in L^1(T)$ $\log^+ h \in L^p(T)$	内関数	恒等的に 1
H^q	$a \in T$	Blaschke 積	$\log h \in L^1(T)$ $h \in L^q(T)$	内関数	恒等的に 1
N_*^+	$a \in T$	Blaschke 積	$\log h \in L^1(T)$	恒等的に 1	恒等的に 1
K	$a \in T$	Blaschke 積	$\log h \in L^1(T)$	内関数	(*)

(*) $S_1(z) = \exp\left(-\displaystyle\int_T \frac{\zeta + z}{\zeta - z}\,d\mu(\zeta)\right)$ で、μ は T 上の continuous nonnnegative singular measure.

4. Nevanlinna 空間の因数分解定理の考察と今後の課題

これまでの内容からわかるように、それぞれの Nenvanlinna 型空間の因数分解定理で異なってくる factor は、外関数と内関数である。

実際、外関数 $F(z)=\exp\left(\int_{T}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\log h(\zeta)\,d\sigma(\zeta)\right)$ では、その積分の中にある T 上の関数 $h(\zeta)$ の満たす条件が各空間によって異なっている。

また内関数 $S_j(z)=\exp\left(-\int_{T}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\,d\mu_j(\zeta)\right)$ においても、その積分の測度がゼロであったり、continuous nonnnegative singular であったりというような条件の違いがある。

これらの事実をもとにして、外関数や内関数の条件を変えることによって、新しい関数空間を作り出すことは出来ないだろうか？　また、そういった空間が新たに考えられた場合に、その空間を（N や H^p における本来の定義（？）のような）積分を使った同値な条件で表すことが出来ないだろうか？

筆者はこのような問題に現在取り組んでいる。

参考文献

[CK] B.R. Choe and H.O. Kim, On the Boundary Behavior of Functions Holomorphic on the Ball, Complex Variables, 20 (1992), 53-61.

[E] C.M. Eoff, A representation of N_{α}^{+} as a union of weighted Hardy spaces. Complex Variables 23 (1993), 189-199.

[I] Y.Iida、Representations of Nevanlinna-type spaces by weighted Hardy spaces, Tokyo J. Math. 24(2) (2001), 369-375.

[M] R.Meštrović, A characterization of an subclass of the Smirnov class, Math.Montisnigri 7 (1996), 29-34.

[P] I.I. Privalov, Boundary properties of analytic functions, Moscow University Press, Moscow, 1941. (Russian)

[R] J.W. Roberts, The component of the origin in the Nevanlinna class, Ill. J. Math. 19 (1975), 553-559.

[RR] M.Rosenblum and J.Rovnyak, Topics in Hardy Classes and Univalent Functions, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 1994.

[SS] J.H. Shapiro and A. Shields, Unusual topological properties of the Nevanlinna class, Amer. J. Math 97 (1975), 915-936.

Yasuo Iida
Department of Mathematics
Iwate Medical University
Yahaba, Iwate 028-3694
Japan
E-mail: yiida@iwate-med.ac.jp

代数的閉な連続関数環について

筑波大学数理物質科学研究科数学専攻　川村一宏

1　代数的閉な連続関数環

compact Hausdor® space X に対して，X 上定義された複素数値連続関数全体のなす環を C(X) で表す。C(X) が代数的閉であるとは，C(X) に係数を持つ任意のモニックな代数方程式

$$z^n + a_{n\,¡\,1} z^{n\,¡\,1} + ¢¢¢ + a_0 = 0 \quad (a_{n\,¡\,1}; : : : ; a_0\ 2\ C(X))$$

が C(X) 内に根を持つことである。本稿で考察するのは次の問題である。

問題　代数的閉な連続関数環を持つ compact Hausdor® 空間の位相的な特徴づけを与えよ

Dicard-Piercy によって任意の完全不連結な compact Hausdor® 空間の連続関数環は代数的閉であることが示されている（[5],[4]). 以下考える空間は連結であると仮定する。次の結果は現在までに得られている最良の結果である。

定理 1.1 ([3],Corollary 4.3, [6],Theorem 2.2 and [9], Theorem 3.4) compact Hausdor® 空間 X は連結でさらに第一可算であるとする。このとき以下は同値である。.

(1) C(X) は代数的閉.

(2) C(X) X 上の任意の連続関数 f : X ! C に対して、連続関数 g: X ! C が $g^2 = f$ を満たすように取れる.

(3) X は局所連結，dimX · 1 かつ $H^1(X; Z) = 0$.

このようなすっきりとした結果を鑑みれば，第一可算性を仮定しなくても同様の結論が得られないかと望むことは自然であろう。そのための第一歩として、上の諸条件が必要条件であるかと問うことも自然であると思われる。　このようにして次の問題が最初に考察すべきものとなる：

問題１ compact Hausdo® 空間 X の連続関数環 C(X) が代数的閉であるとする.

(1) X は局所連結か？

(2) X は１次元か？

(3) X の１次元チェックコホモロジー群は０か？

また次の問題が Countryman, Jr. を嚆矢として何人かの研究者によって提起された：

問題 2 compact Hausdorff 空間 X の連続関数環 $C(X)$ が平方根について閉じている，即ち上記定理（2）の条件を満たす，とする．このとき $C(X)$ は代数的閉か？

ここ数年の研究によって，上のいずれの問題も否定解を持つことが示された．

定理 1.2 (1) ([1],[7]) 任意の $m > 0$ に対して，compact Hausdorff 空間 X_m で $\dim X_m = m$ かつ $C(X_m)$ は代数的閉であるものが存在する．

(2) ([2], [7]) compact Hausdorff 空間 Y で $\check{H}^1(Y;\mathbb{Z})$ が有限生成でなくかつ $C(Y)$ が代数的閉であるものが存在する

(3) ([8]) 互いに素な正整数 m, n に対して，compact Hausdorff 空間 $X_{m,n}$ で $C(X_{m,n})$ は m 乗根について閉じているが n 乗根について閉じていない，様なものが存在する．

(4) compact Hausdorff 空間 Z で $C(Z)$ は代数的閉であるが，Z は局所連結でないものが存在する

2 Cole Extension

前節の最後に述べたように, 上の問題はいずれも反例を構成する事によって解決された。反例は全て Cole extension と呼ばれる方法によっている。この節ではこの構成法を概説する。

compact Hausdorff 空間 X と自然数 n を一つ固定する．X から $\mathbb{C}^n$ への連続写像の全体を $\mathrm{Map}(X;\mathbb{C}^n)$ と表す．$\mathrm{Map}(X;\mathbb{C}^n)$ の有限集合 S に対して $R(X;n;S)$ を以下のように定義する：

$$R(X;n;S) = \{(x;(z_a)_{a\in S}) \in X \times (\mathbb{C}^n)^S \mid \text{任意の } a \in S \text{ に対して } a(x) = z_a\}$$

そして写像 $\pi^S_{X;n} : R(X;n;S) \to X$ を

$$\pi^S_{X;n}(x;(z_a)_{a\in S}) = x$$

によって定義する．$R(X;n;S)$ が compact Hausdorff であることをみることは易しい。 $R(X;n;S)$ と $\pi^S_{X;n}$ は下の引き戻し図式の一部をなしている:

$$\begin{array}{ccc} R(X;n;S) & \xrightarrow{(\bar{a})_{a\in S}} & (\mathbb{C}^n)^S \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \pi^S_{X;n}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle (\pi_n)^S} \\ X & \xrightarrow{(a)_{a\in S}} & (\mathbb{C}^n)^S \end{array}$$

上の定義から次が直ちに従う

(*) S に属する任意の連続写像 $a : X \to \mathbb{C}^n$ に対して，連続写像 $\bar{a} : R(X;n;S) \to (\mathbb{C})^n$ が $a \circ \pi_{X;n} = \pi_n \circ \bar{a}$ をみたすように取れる．

有限集合 S に対して，n 次対称群 $(\mathfrak{S}_n)^S$ の，$(\mathbb{C}^n)^S$ 上への S-fold product action は，$R(X,n,S)$ 上の作用を自然に誘導する：

$$(\sigma_a)_{a\in S}\cdot(x,(z_a)_{a\in S}) = (x,(\sigma_a\cdot z_a)_{a\in S}),\ (\sigma_a)_{a\in S}\in(\mathfrak{S}_n)^S,\quad (x,(z_a)_{a\in S})\in R(X,n,S).$$

有限群作用に関する Transfer Homomorphism を用いると次の結果が直ちに得られる.

命題 2.1 任意の自然数 $n \geq 1$ と任意の有限集合 $S \subset \mathrm{Map}(X,\mathbb{C}^n)$ に対して， 連続写像 $\pi_{X,n} : R(X,n) \to X$ が有理数係数チェックコホモロジーに誘導する準同型

$$(\pi_{X,n})^* : \check{H}^*(X;Q) \to \check{H}^*(R(X,n,S);Q)$$

は単射である.

さて超限帰納法によって、次のような長さ ω_1（＝最初の非可算順序数）の射影系を定義する.
$X_0 = X$ とおき、
$\alpha < \omega_1$ に対して $X_{\alpha+1} = R(X_\alpha, n)$，$p^{\alpha+1}_\alpha = \pi_{X_\alpha,n} : X_{\alpha+1} \to X_\alpha$ とする.
極限順序数 $\beta < \omega_1$ に対して $X_\beta = \varprojlim\{X_\alpha, p^\gamma_\alpha, \alpha < \gamma < \beta\}$ と定義し，各 $\alpha < \beta$ に対して，$p^\beta_\alpha : X_\beta \to X_\alpha$ を自然な射影とする.

$S(X)$ をこのようにして得られた射影系，その極限を $\overline{X} = \varprojlim S(X)$ とおく．各 $\alpha < \omega_1$ に対して，自然な射影を $p_\alpha : \overline{X} \to X_\alpha$ としよう。

命題 2.2 (1) $C(\overline{X})$ は任意のモニックな n 次代数方程式について閉じている.

(2) 各 $p_\alpha : \overline{X} \to X_\alpha$ 開かつ連続な全射である.

上の $\overline{X}$ を代数的閉な連続関数環を持つように改良することは易しい．これによって任意の compact Hausdorff 空間 X に対して，compact Hausdorff 空間 $\overline{X}$ と連続全射 $\overline{X} \to X$ を，$C(\overline{X})$ が代数的閉であるように構成することができた。

定理 1.2 における compact Hausdorff 空間は 上の構成における X を適切に選び，また上の構成法を多少修正したうえで、命題 2.1,2.2 を援用して構成できる.

以上によって問題１，２ともに否定的解答が得られた。一方で最初の問題，即ち代数的閉連続関数環を持つ compact Hausdorff 空間の位相的特徴づけ問題，については, 特徴づけとなりうる性質の候補すら不明であるのが現状である。

参考文献

[1] N. Brodskiy, J. Dydak, A. Karasev and K. Kawamura, Root closed function algebras on compacta of large dimensions, Proc. Amer. Math. Soc., 135 (2007), 587-596.

[2] A. Chigogidze, A. Karasev, K. Kawamura and V. Valov, On C^*-algebras with the approximate n-th root property, Australian J. Math. 72 (2005), 197-212.

[3] R.S. Countryman, Jr., On the characterization of compact Hausdor® X for which $C(X)$ is algebraically closed, Paci¯c J. Math. 20 (1967), 433-438.

[4] D. Deckard and C. Pearcy, On matrices over the ring of continuous complex valued functions on a Stonian space, Proc. Amer. Math. Soc. 14 (1963), 322-328.

[5] D. Deckard and C. Pearcy, On algebraic closure in function algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 15 (1964), 259-263.

[6] O. Hatori and T. Miura, On a characterization of the maximal ideal spaces of commutative C¤-algebras in which every element is the square of another, Proc. Amer. Math. Soc. 128 (1999), 1185-1189.

[7] K. Kawamura, High dimensional compacta with algebraically closed function algebra, preprint.

[8] K. Kawamura and T. Miura, On the root closedness of continuous function algebras, preprint.

[9] T. Miura and K. Niijima, On a characterization of the maximal ideal spaces of algebraically closed commutative C¤-algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 131 (2003), 2869-2876.

川村一宏 (Kazuhiro Kawamura)
〒 305-8571
茨城県つくば市天王台１－１－１
筑波大学数学系
kawamura@math.tsukuba.ac.jp

Wavelet 作用素と位相力学系

都立大学名誉教授　　富山　淳 (Jun Tomiyama)

1　はじめに

Wavelet 理論は現在色々な分野との関連の下に加速度的な発展の途上にあり今では多変数の wavelets system (multiresolution) が議論されている。そしてその一端は筆者も参加した２００６年１２月のカナダの Ban® center での研究集会

”Operator methods in fractal analysis, wavelets and dynamical systems"

の題名にも伺える。この研究会での議論の多くは、世界各国の総力を挙げての努力のあと一頓挫きたしていた ’映像コンピューター ’の構成への挑戦であった。しかしここでの主題は wavelet の出発点になっている $L^2(R)$ 上の二つのユニタリ作用素（Translation T, Dilation D) の構造についての　E.Christensen and F.Dorofeev の ”未発表 ”の論文：”On p-decimal C*-algebras "　を元に二つの分野、Wavelet 理論と位相力学系論を結ぶ新しい観点と結果を議論することにある。

2　Wavelet 理論と C*-環論

H をヒルベルト空間,U を H 上のユニタリ作用素の系とする。ここで系 U は一般には群とも半群とも仮定しない。H の　unit vector ξ について

$$U\xi = \{u\xi \mid u \in U\}$$

が直交系をなす時 ξ を U に対する wandering vector と呼び、これが H で complete なときに complete wandering vector と呼ぶ。そして W(U) を U についての complete wandering vector の全体とするときその構造を解析するのが Wavelet 理論の主題となるが、勿論一般にはこの集合が空になるかもしれず、これが意味を持つために U はある特定な性質をもつことが要求され H を $L^2(R;\mu)$ や $L^2(T;\mu)$ などに取った時に U がどのようなユニタリ系であるべきかが Wavelet 理論の最初の大きな主題になる。

$T; D$ を $L^2(R;\mu)$ 上の下記のようなユニタリ作用素（Translation, Dilation) とする。

$$(Tf)(t) = f(t-1); \quad (Df)(t) = \sqrt{2}f(2t):$$

このとき、T と D はそれぞれ、wandering subspace として $L^2[0,1]$ と $L^2([-2,-1]\cup[1,2])$ をもつ両側シフト作用素であり、両者には

$$TD = DT^2$$

という基本関係がある。そして $L^2(R)$ の直交 wavelet 関数 $\psi(t)$ とはユニタリ作用素系 U を

$$U_{D,T} = \{D^n T^l ; l, n \in Z\}$$

ととったときの直交 Wavelet として定義される。即ち $\psi(t)$ は

$$\{D^n T^l \psi(t)\} = \{2^{\frac{n}{2}}\psi(2^n t - l) | l, n \in Z\}$$

が $L^2(R)$ の正規直交系をなすものである。代表的なものには　Haar wavelet $\psi = \chi_{[0,\frac{1}{2})} - \chi_{[\frac{1}{2},1)}$ がある。

ここで注意するのは U として $\{D, T\}$ から生成されたユニタリ群 $G_{D,T}$ をとると、それは大きくなりすぎて $W(U_{D,T})$ が空になってしまう（対応する wavelet 関数が無い）ことである。

それは前記の交換関係よりまづ以下の形がわかる、

$$G_{D,T} = \{D^n T^{\beta} \ | \ n \in Z, \beta \in D\}.$$

ここで、D は dyadic rational number の集合である。そこで D の中のゼロでない数列 $\{\beta_n\}$ でゼロに収束するものをとると $\{T^{\beta_n}\psi\}$ は任意の関数　ψ について $L^2(R)$ 内で当然 ψ に収束するが、いま ψ が wavelet であれば $\{T^{\beta_n}\psi\}$ の直交性よりこれは有り得ないからである。

このように系 U が与えられたとき、その生成する C*-環、C*(U) や $W(U)$ (特に $U_{D,T}$ について）の構造などが Wavelets 理論の重要な部分になる。そのうちでも現在も未解決な大きな問題として次のものがある。

”$W(U_{D,T})$ が連結であるか？”

ここで C*-環とは抽象的には特別なノルム関係、$\|a^*a\| = \|a\|^2$ を持った Banach *-環として定義されるが、それは常にヒルベルト空間上の有界線形作用素全体の C*-環　$B(H)$ の中の作用素ノルムで閉じた＊－環（自己共役環）に等長表現出来る。そこでこれまでに述べたことを C*-環的な観点から考えてみる。

二つのユニタリ元 u, v について

$$vu = uv^2 \qquad (*)$$

という交換関係を考えると、この関係についての universal な C*-環（以下これを $C^*(u,v)$ と書くことにする）が存在することが知られている。ここで universality とはヒルベルト空間 H 上の交換関係（＊）をみたす任意のユニタリ作用素 u_1, v_1 について必ず $C^*(u,v)$ の H 上への表現 π が $\pi(u) = u_1$,$\pi(v) = v_1$ となるように存在することをいう。従って $\{D, T\}$ の組を考えたことは $C^*(u,v)$ より $L^2(R)$ 上への表現で $\pi(u) = D$,$\pi(v) = T$ となる表現を考えたことになり、$U_{D,T}$、$G_{D,T}$、$W(U_{D,T})$、$W(G_{D,T})$ 等の問題は $\pi(C^*(u,v))$ の構造やその部分集合の $L^2(R)$ への作用を考えていることを意味する。Wavelet 理論ではこのように ’ある特定な表現 ’の構造がいつも研究の主題でありそれの細部には上記のような C*-環的な観点よりの寄与はあまり望めないであろうが、$C^*(u,v)$ の構造が判明すれば我々が ’特定の表現 ’としてどこまで期待出来、またどのような表現は求めるのが無理であるかを知ることが出来る。そして上記の（＊）関係では普遍 C*-環が、連結

なコンパクト可換群上の特別な位相同型から作られたものになるというのが Christensen-Dorofeev の論文の主張である。このことが分かればあとは [4],[5],[6] 等に見られる C*-環論と位相力学系論との交流理論から上のような主張が裏づけられる。

3　位相力学系に付随する C*-環の構成

X をコンパクト空間（距離空間とは指定していない i.e. 可分性の仮定無し）とし ¾ をその上の位相同型とする位相力学系 § = (X; ¾) を考える。ここでは § に対して C*-環、$C^?$(§) がどのように自然につくられるか、その背景について述べる。先ず C(X) を X 上の連続関数環とするとこれは max-norm と＊－作用 $f^?(x) = \overline{f(x)}$ によって可換な C*-換になるが、X の位相空間としての問題は全て C(X) の問題としてとらえるというのが、C*-環的（作用素環的）観点である。この両者のどちらに重点を置くかということは各人の感覚の問題と言ってもよいが、’作用の無い ’空間（X のみの）の原始的状態ではあまり両者の差が見られない。しかし ¾ という作用つきの空間、力学系、を対象とすると大きな違いが出てくる。® を ®(f)(x) = f(¾ ^{i1}x) で定義される C(X) の同型対応とする。C*-環では＊－作用が基本的な役割を果たしているのでこの間の Morphism はこれを保存するような対応が主として考えられるが、® は当然それを満たしている（＊－同型）。すると系 § = (X; ¾) の構造と系、fC(X); ®g の構造とは原理的に ”同等 ”であると考えられるが、後者の系は関数とその間の同型対応という異なったレベルの対象を含んでいる。それでこれ等を同じレベル（ヒルベルト空間 H 上の有界線形作用素類）に移すために次のことを考える。まず、® を整数群 Z の C(X) への作用と考えたとき系 fC(X); ®; Zg の共変表現 f¼; ug とは ¼ が C(X) の B(H) への表現（*-homomorphism)、 u は H 上のユニタリ作用素で

$$¼(®(f)) = u¼(f)u¤ \qquad 8f \; 2 \; C(X)$$

となるものをいう。このとき ¼(f) と u は共に同じ B(H) 内のレベルの作用素であるからそれらで生成される C*-環、$C^?$(¼(C(X)); u) を考えることが出来る。ここで一つの共変表現では $C^?$(¼(C(X)); u) は力学系 § の情報の一部を担っているにすぎないが、幸い C*-環論により共変表現に関する Universal な C*-環、$C^?$(§) が存在することが示せる．従って $C^?$(§) は力学系 § と等価な情報を持っていると考えられる。$C^?$(§) は一般には C(X) への Z の作用 ® によるC＊－クロス積と呼ばれているものである。C*-環の生成には匆論積が関係するが、共変関係により以下に見られるように極めて計算し易い構造を持っている。

1．これは C(X) と ®(f) = ±f±$^?$ i.e. ® = Adu となるユニタリ元 ± により生成されているので

$$C^?(§) = [\sum_{i\,n} f_k ±^k \quad j \quad f_k \; 2 \; C(X)] \quad \text{closed linear span}$$

となる。それは ± の役割により、±^{k}f = ®^{k}(f)±^{k} と関数は全部左側に揃えられるからである。さらに f±^{n}g は C(X) に関して一次独立になっていることが次の２．より分かる。

2．$C^?$(§) より C(X) へノルム１のバナッハ空間としての射影 E で E($\sum_{i\,n}$ f_k±^{k}) = f_0 となるもの が存在する。この射影は $C^?$(§) と力学系 Sigma を繋ぐ役割を演じ、positive faithful で更に C(X)- module property,

$$E(fag) = fE(a)g \qquad f; g \; 2 \; C(X)$$

を持つ。ここで E(P$^{n}_{¡n}$ f_k±^{k}) = f_0 である。

ここで注目すべきなのは、共変関係より見られるようにこの C*-環は作用 ® (従って同型 ¾ ）が trivial でない限り非可換になることである。数学において現在我々研究は大抵の場合対象（manifold 等）そのものばかりでなくそれへの何等かの作用を考えている。この意味で上の構成の過程を振り返ってみると ’非可換な C*-環 ’は非常に普遍的な研究題材であると言うことが出来る。

ちなみに X が一点になったときの C$^?$(§) はトーラス T 上の連続関数環と同型になり、このとき ± は関数 z にまた射影 E は T 上の Lebesgue 測度による積分になっている。そしてこのことを踏まえて

a(n) = E(a±$^{?n}$) a 2 C$^?$(§); n 2 Z

と定義すると、この関数列 fa(n)g は元 a の一般化されたフーリエ係数として通常のフーリエ級数と同様な性質をもち、(例えばノルムによる Riemann-Lebesgue の定理がなりたつなど）C$^?$(§) の解析に非常に有効な働きを見せている。

位相力学系でも典型的な例は単位円周上の無理数回転 ¾$_µ$ であるが、このとき対応する C*-環は

uv = e^{2¼iµ}vu

という交換関係を持つ二つのユニタリ元の作る universal C*-環になっていて、中身の対応は u が ± に v はT 上の関数 z となっている。

位相力学系は古くは（１９６０年代以降）局所コンパクト空間に局所コンパクト群が作用するという一般的な枠組みで表現論、C*-環論のために研究されてきたが、１９９０年代以降は C*-環論と位相力学系論との交流理論が多く研究されている。これはその前に大きな成功を収めている可測力学系論（エルゴード理論）と von Neumann 環論（Factor の理論）との交流理論に対応するものである。

4 Christensen と Dorofeev の結果

[定理] vu = uv^2 という交換関係を持つ二つのユニタリ元より生成される普遍 C*-環は、その双対群が Z $\hat{}$ £ 1/2 ¤ となる連結なコンパクト可換群 G における位相同型 ¾(g) = g^2 による力学系 § = (G; ¾) に付随する C*-環 C$^?$(§) として実現できる。

この力学系は topologically transitive であり、また任意の自然数 n について n-周期点をもつ。

力学系が topologically transitive というのは (空間が可分の場合には）dense な軌道をもつ点が存在することである。定理のその証明はここでは省くが、後の部分は上の C*-環が L^2(R) 上の Wavelets 作用素 fD; Tg を生み出す特定の表現のほかに別な表現も持っていることを示しているのでそれを述べておく。

n を自然数としたとき ¸ = e$^{\frac{2¼i}{2^n ¡1}}$ として次の二つの n 次行列 Û; V̂ を考える。

すなわち、Û はシフト行列、V̂ は対角行列でその係数が $v_{i;i}$ = ¸$^{2^{i ¡1}}$ とするとこれ等が（＊）の交換関係を満たすことは容易に確かめられる。従って一般論（[5]）から § には n 周期点が存在してこれに付随した C$^?$(§) の n 次の既約表現 ¼$_n$ が ¼$_n$(u) = Û; ¼$_n$(v) = V̂ となるようにとれる。

以下に定理の力学系をどのように求めるかの idea を述べる。

先ず、C*-環の側から同型対応の候補として ® = Adu を考える。すると $®(v^2) = uv^2u¤ = v$ となるがこの ® がどのような可換 C*-環の同型対応を引き起こすかが問題である。

$$v_0 = v^2; v_1 = ®(v_0) = v; : : : ; v_n = ®^n(v_0)$$

とおく。このとき

$$v_n = ®^n(v^2) = ®^{n+1}(v_0^2) = v_{n+1}^2:$$

そこで $C_n = C^?(v_n)$ とすると v のスペクトルは表現の普遍性より S^1 i.e. T 全体であるから各 C*-環 C_n は C(T) と同型であるが、fC_ng は単調増加列になっている。そこでこの列の C*-inductive limit を C_1 とおくと、これは作り方から単位元をもつ可換 C*-環であり ® はここの同型対応を与えている。更に Gelfand-Naimark の定理より（可分な）コンパクト Hausdor® 空間 G が存在して $C_1 = C(G)$ となる。一方同じ理由で C_n は $C(X_n)$ と書ける。そこで X_{n+1} より X_n への character の制限写像 s_n を考えると、これは $v_n = v_{n+1}^2$ という各生成元の関係とスペクトルの形よりトーラス内の写像として $s_n(z) = z^2$ と書ける。今 Morphism の列 (s_n) による fX_ng の Projective limit

$$\lim_{Ã} X_n = f(z_n)_{n2Z}j \quad z_n = z_{n+1}^2 \quad z_n 2 T; n 2 Zg$$

を考えると作り方からこれは C_1 のスペクトル G と一致する。そして G はこの形より（可分な）可換コンパクト群になる。G の双対群の形及びその連結性は位相群の一般理論によるものである。

さてそこで ¾ を ® に対する G の位相同型とすると、$g = (z_n)$ について

$$v_n(¾^{i1}g) = ®(v_n)(g) = ®(v_{n+1})^2(g) = (v_{n+1}(¾^{i1}g))^2$$

であるから、$¾^{i1}$ は前の s_n の形から G 上の左シフト、よって ¾ は右シフトとなり $¾(g) = g^2$ となる。

5 おわりに

上節の結果は実は任意の自然数 p についてなりたつ。即ち、二つのユニタリ元の $vu = uv^p$ という交換関係の普遍 C*-環は連結なコンパクト可換群上の同型対応 $¾_p(g) = g^p$ による力学系に付随する C*-環として実現できる。ここで p = 1 のときには関係は vu = uv (可換）となるのでC＊－クロス積の構成より

$$C^?(u; v) = C(T^2) = C(T) \otimes C(T)$$

となる。

$L^2(T)$ 上の Wavelet 理論について C*-環的（作用素環的）な観点より研究された文献としては [1] がある。

参考文献

[1] O.Bratteli and P.E.T.Jorgensen, Iterated function systems and permutation representations of the Cuntz algebra, Amer.Math.Soc.Memoirs 663,1999.

[2] E.Christensen and F.Dorofeev, On p-decimal C*-algebras.

[3] X.Dai and D.R.Larson, Wandering vectors for unitary systems and othogonal wavelets, Amer. Math. Soc.Memoirs 640,1998,

[4] J.Tomiyama, Invitation to C*-algebras and topological dynamical systems, World Sci. Singapore,1987

[5] J.Tomiyama, The interplay between topological dynamics and theory of C*-algebras, Lecture note No.2 Res.Inst.Math.Seoul,1992.

[6] J.Tomiyama, Hulls and kernels from topological dynamical systems and their applications to homeomorphism C*-algebras, J.Math. Soc.Japan 56(2004),249-364.

Jun Tomiyama
201,11-10 Nakane 1-chome,
Meguro-ku,Tokyo 152-0031
Japan
E-mail; juntomi@med.email.ne.jp

スラント Toeplitz 作用素のスペクトルについて

信州大学大学院工学系研究科　　武村　吉光 (Yoshimitsu Takemura)

単位円上の L^2 空間におけるスラント Toeplitz 作用素 U_φ は, M.C. Ho や S.C. Arora and R. Batra によって, 幅広く研究されている ([1]〜[6]). ここでは, U_φ のスペクトルに関する彼らの結果を, さらに詳しく調べてみた.

1　スペクトルの定義

X を Hilbert 空間とし, X 上の有界線形作用素全体の Banach 環を $L(X)$ とかく. $T \in L(X)$ に対し, T の**スペクトル** $\sigma(T)$, **スペクトル半径** $r(T)$ は,

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ が } L(X) \text{ において可逆でない}\}$$
$$r(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$$

と定義される. ここで, I は X 上の恒等作用素である. スペクトル $\sigma(T)$ は, つねに $\mathbb{C}$ の有開閉集合になる. また, $\sigma(T)$ の部分集合に, 次のような種類がある.

① **点スペクトル**　: $\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(\lambda I - T) \neq \{0\}\}$.

② **連続スペクトル**　: $\sigma_c(T) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \begin{array}{l} \ker(\lambda I - T) = \{0\} \text{ かつ} \\ \mathrm{ran}(\lambda I - T) \neq X,\ \overline{\mathrm{ran}(\lambda I - T)} = X \end{array}\right\}$.

③ **剰余スペクトル**　: $\sigma_r(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(\lambda I - T) = \{0\} \text{ かつ } \overline{\mathrm{ran}(\lambda I - T)} \neq X\}$.

④ **近似点スペクトル** : $\sigma_{ap}(T) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \exists \{x_n\} \subset X \text{ s.t. } \begin{array}{l} \|x_n\| = 1 \\ \|(\lambda I - T)x_n\| \to 0 \end{array}\right\}$.

⑤ **本質スペクトル**　: $\sigma_e(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ が Fredholm 作用素でない}\}$.

ここで, $\ker(\lambda I - T)$, $\mathrm{ran}(\lambda I - T)$ は, それぞれ, 作用素 $\lambda I - T$ の核, 値域を表し, $\overline{\mathrm{ran}(\lambda I - T)}$ は $\mathrm{ran}(\lambda I - T)$ の閉包である. また, $\lambda I - T$ が Fredholm 作用素とは, $\mathrm{ran}(\lambda I - T)$ が閉集合で, その余次元と $\ker(\lambda I - T)$ の次元がともに有限になることである. 明らかに, $\sigma(T)$ は, $\sigma_p(T)$ と $\sigma_c(T)$ と $\sigma_r(T)$ に分割される. また, $\sigma_{ap}(T)$ と $\sigma_e(T)$ は $\mathbb{C}$ の有界閉集合で, $\sigma_p(T) \subset \sigma_{ap}(T) \subset \sigma(T)$, $\sigma_e(T) \subset \sigma(T)$ である.

2　スラント Toeplitz 作用素

$\mathbb{T}$ を複素平面 $\mathbb{C}$ の単位円とし, μ を $\mathbb{T}$ 上の正規化された 1 次元 Lebesgue 測度する. μ に関して 2 乗可積分な複素数値関数 全体からなる Hilbert 空間を $L^2(\mathbb{T})$ で表す. 各整数 n に対して, $\mathbb{T}$ 上

の関数 z^n を, $z^n(e^{i\theta}) = e^{in\theta}$ $(\theta \in \mathbb{R})$ と定めると, $\{z^n : n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$ は $L^2(\mathbb{T})$ の完全正規直交系になる．つぎに, μ に関して本質的有界な複素数値関数全体の Banach 環を $L^\infty(\mathbb{T})$ で表し, $L^\infty(\mathbb{T})^{-1} = \left\{\varphi \in L^\infty(\mathbb{T}) : \frac{1}{\varphi} \in L^\infty(\mathbb{T})\right\}$ とおく．また, $\mathbb{T}$ 上の複素数値連続関数全体の Banach 環を $C(\mathbb{T})$ で表し, $C(\mathbb{T})^{-1} = \left\{\varphi \in C(\mathbb{T}) : \frac{1}{\varphi} \in C(\mathbb{T})\right\}$ とおく．

いま, $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ を固定する．$L^2(\mathbb{T})$ 上の**乗法作用素** M_φ は

$$M_\varphi f = \varphi f \qquad (f \in L^2(\mathbb{T}))$$

と定義される． $M_\varphi \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{T}))$ で, $\|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$ である．つぎに, $\kappa = 2, 3, 4, \cdots$ とし, $W_\kappa \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{T}))$ を,

$$W_\kappa z^n = \begin{cases} z^{n/\kappa} & (n\text{ が }\kappa\text{ の倍数のとき}) \\ 0 & (n\text{ が }\kappa\text{ の倍数でないとき}) \end{cases}$$

によって定める．$\|W_\kappa\| = 1$ である．

$L^2(\mathbb{T})$ 上の**スラント** Toeplitz **作用素** U_κ は, 上の 2 つの作用素 M_φ, W_κ を用いて,

$$U_\kappa = W_\kappa M_\varphi$$

と定義する．明らかに, $\|U_\kappa\| \le \|W_\kappa\|\|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$ である．ここで, $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T})$ だから, $\varphi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ と表せる．このとき, U_κ の表現行列は,

$$\begin{pmatrix} & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & a_{-\kappa} & \cdots & a_{-2\kappa+1} & a_{-2\kappa} & a_{-2\kappa-1} & \cdots & a_{-3\kappa} & \cdots \\ \cdots & a_0 & \cdots & a_{-\kappa+1} & a_{-\kappa} & a_{-\kappa-1} & \cdots & a_{-2\kappa} & \cdots \\ \cdots & a_\kappa & \cdots & a_1 & a_0 & a_{-1} & \cdots & a_{-\kappa} & \cdots \\ \cdots & a_{2\kappa} & \cdots & a_{\kappa+1} & a_\kappa & a_{\kappa-1} & \cdots & a_0 & \cdots \\ \cdots & a_{3\kappa} & \cdots & a_{2\kappa+1} & a_{2\kappa} & a_{2\kappa-1} & \cdots & a_\kappa & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}$$

となる．この行列は, 成分が斜めに隊列を組んでいるので, U_κ を**スラント** Toeplitz 作用素と呼ぶようである．以上の議論で, $\kappa = 1$ の場合を考えると, $W_\kappa = I$ かつ $U_\kappa = M_\varphi$ となるので, ここでは, $\kappa = 1$ の場合を除外し, $\kappa = 2, 3, 4, \cdots$ としている．

3　知られた結果

$L^2(\mathbb{T})$ 上のスラント Toeplitz 作用素 U_κ について, $\kappa = 2$ の場合は Ho が, 一般の κ の場合には Arora and Batra が, いろいろな性質を調べている ([1]〜[6])．そこでは, スペクトル半径 $r(U_\kappa)$ の公式が, 次のように求められている．

定理 A．$\psi_n = \overbrace{W_k(\cdots(W_\kappa(W_\kappa}^{n}\underbrace{|\varphi|^2)|\varphi|^2)\cdots)|\varphi|^2}_{n}$ とおくと, $r(U_\kappa) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\|\psi_n\|_\infty}$.

また, スペクトル $\sigma(U_\varphi)$ について, 次の 3 つの性質が示されている.

定理 B. $\varphi \in L^1(\mathbb{T})^{-1}$ ならば, $\sigma(U_\varphi)$ は開円板を含む.

定理 C. $|\varphi| = 1$ a.e. ならば, $\sigma(U_\varphi) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le 1\}$.

定理 D. $\varphi \in C(\mathbb{T})^{-1}$ ならば, $\sigma(U_\varphi) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le r(U_\varphi)\}$.

$L^2(\mathbb{T})$ 上の乗法作用素 M_φ のスペクトル $\sigma(M_\varphi)$ は, φ の本質値域

$$\bigcap \left\{ \varphi(E) \text{ の閉包} : E \text{ は } \mathbb{T} \text{ 上の可測集合}, \ \mu(\mathbb{T} \setminus E) = 0 \right\}$$

になることが知られている. したがって, φ が, われわれがよくイメージする連続関数の場合, $\sigma(M_\varphi)$ としては, $\mathbb{C}$ 内の閉曲線を思い浮かべるだろう. ところが, 定理 B〜D は, “$\sigma(U_\varphi)$ が厚みのある集合になる” といっているので, $\sigma(U_\varphi)$ と $\sigma(M_\varphi)$ は, 様相がまったく違うわけである. 実際, 一般の $\varphi \in L^1(\mathbb{T})$ に対して, $\sigma(U_\varphi)$ の形はまだわかっていない. Ho は “$\sigma(U_\varphi) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le r(U_\varphi)\}$ となるのでは?” と予想している. 定理 B〜D は, この予想を支持する結果である.

以下では, 定理 B〜D について, 詳しく調べることにする.

4 得られた結果

定理 B に関してさらに調べた結果, 次の定理を得た.

定理 1. $\varphi \in L^1(\mathbb{T})^{-1}$ のとき,

$$\left\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < \frac{1}{r(U_{\varphi^{-1}})}\right\} \subset \sigma_p(U_\varphi), \quad \left\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le \frac{1}{r(U_{\varphi^{-1}})}\right\} \subset \sigma_e(U_\varphi).$$

次の系は, 定理 C を詳しく述べたものであるが, 定理 1 から容易にみちびける.

系 1. $|\varphi| = 1$ a.e. のとき, $\sigma(U_\varphi) = \sigma_e(U_\varphi) = \sigma_{ap}(U_\varphi) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le 1\}$,
$\sigma_p(U_\varphi) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$.

$|\varphi| = 1$ a.e. のとき, $\sigma_p(U_\varphi)$ の形は, 一概に述べられないようである. 実際, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, $|c| = 1$ として, $\varphi = cz^m$ の場合を考えると, 次のようになる.

	m が ≤ -1 の倍数の場合	m が ≤ -1 の倍数でない場合
$\sigma_p(U_\varphi)$	$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\} \cup \{c\}$	$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$
$\sigma_c(U_\varphi)$	$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\} \setminus \{c\}$	$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$
$\sigma_r(U_\varphi)$	$\emptyset$	

最後に, 定理 D において, 仮定 “$\varphi \in C(\mathbb{T})^{-1}$” を “$\varphi \in C(\mathbb{T})$” にゆるめることを考える. $C(\mathbb{T})^{-1}$ は $C(\mathbb{T})$ において稠密なので, 任意の $\varphi \in C(\mathbb{T})$ に対して,

$$\limsup_{\substack{\psi \in C(\mathbb{T})^{-1} \\ \|\psi - \varphi\|_\infty \to 0}} r(U_\psi)$$

という数を考えることができる. この数に着目し, 定理 D を用いると, 次の定理がみちびける.

定理 2. $\varphi \in C(\mathbb{T})$ のとき,

$$\left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le \limsup_{\substack{\psi \in C(\mathbb{T})^{-1} \\ \|\psi - \varphi\|_\infty \to 0}} r(U_\psi) \right\} \subset \sigma_{ap}(U_\varphi).$$

Ho の論文 [4, Theorem 4.3] や Arora and Batra の論文 [3, Theorem 4.18] には,

$$\therefore\ \varphi \in C(\mathbb{T}) \text{ のとき, } \sigma(U_\varphi) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le r(U_\varphi) \right\} \ \forall$$

と書かれている. そこでは, スペクトル半径 $r(T)$ が T に関して連続 (とくに, 下半連続) であることが用いられているが, 一般的には上半連続でしかないので, その部分には証明が必要である. その証明を試みた結果, 完全ではないが, 定理 2 が得られた. また, 定理 2 から次の系が簡単にみちびける.

系 2. $\varphi \in C(\mathbb{T})$ が $\limsup_{\substack{\psi \in C(\mathbb{T})^{-1} \\ \|\psi - \varphi\|_\infty \to 0}} r(U_\psi) = \sigma(U_\varphi)$ をみたすとき, とくに, $\varphi \in C(\mathbb{T})^{-1}$ のとき,

$$\sigma(U_\varphi) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le r(U_\varphi) \right\}.$$

付記: この講演内容の詳細は, [7] に書きました.

参考文献

[1] S.C. Arora and R. Batra, On generalized slant Toeplitz operators with continuous symbols, Yokohama Math. J., 51 (2004), 1–9.

[2] S.C. Arora and R. Batra, Spectra of generalized slant Toeplitz operators, Analysis and Applications, Allied Publ, New Delhi, 2004, 43–56.

[3] R. Batra, Generalized slant Toeplitz operators, Thesis. Univ. of Delhi. 2004.

[4] M.C. Ho, Adjoints of slant Toeplitz operators, Integral Equations Operator Theory, 29 (1997), 301–312.

[5] M.C. Ho, Properties of slant Toeplitz operators, Indiana Univ. Math. J., 45 (1996), 843–862.

[6] M.C. Ho, Spectra of slant Toeplitz operators with continuous symbols, Michigan Math. J., 44 (1997), 157–166.

[7] 武村 吉光 (Y. Takemura), L^2 空間上のスラント Toepitz 作用素のスペクトル, 信州大学修士論文, 2008.

Inner function の無限列と $H^2(\mathbb{D}^2)$ の部分加群に関する公式について

島根大学　総合理工学部　瀬戸　道生 (Michio Seto)

多重円板 $\mathbb{D}^2$ 上の複素ハーディ空間 $H^2(\mathbb{D}^2)$ には，通常の多項式掛け算を作用として $\mathbb{C}[z,w]$ 係数ヒルベルト加群の構造が入る (係数環は有界正則関数のなす Banach 環まで拡張することができるが，ここでは $\mathbb{C}[z,w]$ に限定して話を進める)．この $H^2(\mathbb{D}^2)$ のヒルベルト加群としての構造，特に閉部分加群 (不変部分空間) の構造は，Beurling の理論 ([2]) として知られる一変数の場合と比べて，極端に複雑になることが知られている．例えば，Rudin は [4] の中で，無限生成閉部分加群の例を構成した (一変数の場合は常に単一生成である)．この Rudin の例は永らく扱いづらいものと考えられていたのが，最近の研究により，実は計算可能という意味で性質の良いものであったことが判明した．この小論では Rudin の例を中心に，最近得られた結果 ([5, 6, 7]) を紹介する．

1　準備

$\mathbb{D} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$ とし，$\mathbb{D}$ 上の Hardy 空間を $H^2(\mathbb{D})$ とする．$\mathbb{D}^2$ 上の Hardy 空間 $H^2(\mathbb{D}^2)$ は，二つの $H^2(\mathbb{D})$ のテンソル積ヒルベルト空間として $H^2(\mathbb{D}^2) = H^2(\mathbb{D}) \otimes H^2(\mathbb{D})$ と表すことができる．簡単のために，これからは $H^2 = H^2(\mathbb{D}^2)$ と略記する．H^2 は通常の多項式掛け算で不変であるから，多項式掛け算を作用として，$\mathbb{C}[z,w]$ 係数のヒルベルト加群 (加群の構造も備えたヒルベルト空間で，さらに加群の作用が適当な位相で連続である) と考えることができる．

定義 1 H^2 の閉部分空間 M が加群の作用で不変であるとき，すなわち多項式を掛ける作用で不変であるとき，M を H^2 の閉部分加群 (不変部分空間) という．

この小論では，この閉部分加群の構造に注目する．ここで，Beurling の定理 ([2]) を思い出すと，一変数では，閉部分加群は一つの inner function により生成された．また，inner function は零点と特異点を指定することによりに定まった．一方，多変数では，閉部分加群の構造は非常に複雑になることが知られている．この複雑さは，多変数解析関数の零点と特異点の分布の複雑さを関数解析的に反映していると思われる．

2　Rudin の例

ここでは有名な Rudin の例を紹介する．まず，$\alpha_n = 1 - n^{-3}$ $(n \geq 1)$ とし，

$$M_n = (z-\alpha_n)^n H^2 + (z-\alpha_n)^{n-1} w H^2 + \cdots + w^n H^2$$

と定める．ここで各 M_n は H^2 での余次元が有限である．従って，ここでは閉包をとっていないが，M_n は H^2 の閉部分加群である．次の定理は，多変数での閉部分加群の構造の複雑さを端的に物語っている．

定理 1 (Rudin [4]) $M = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$ は無限生成.

さて，Rudin の例を w を基準にテイラー展開すると，

$$M = \sum_{j=0}^{\infty} \oplus q_j H^2(D) \otimes w^j$$

という表示を得る (上記 $\otimes$ は $H^2 = H^2(D) \otimes H^2(D)$ の $\otimes$ のことである)．ここで

$$q_0(z) = \prod_{n=1}^{\infty} b_n^n(z) \quad \left(b_n(z) = \frac{\alpha_n - z}{1 - \alpha_n z} \right),$$

$$q_j(z) = q_{j-1}(z) / \prod_{n=j}^{\infty} b_n(z) \quad (j \geq 1)$$

である．この表示を用いると様々な量が具体的に計算できる．その際に重要なことは，q_{j-1} が q_j により H^∞ の中で割り切れる (すなわち，q_{j-1}/q_j が有界正則) という性質である．そのトリックを明かすと，閉部分加群に関する計算は無限個の関数係数連立一次方程式を解くことに帰着される場合が多い．一般にそれを解くことは非常に困難であるが，q_{j-1} が q_j により割り切れるということから，無限個の方程式の解が帰納的に定まるのである．したがって，「q_{j-1} が q_j により割り切れる」を定義に採用すると，よい現象に出会えることが期待できる．

3 Inner sequences

定義 2 ([5, 7]) 以下の条件をみたす (D 上の) inner function の無限列 $\{q_j\}_{j \geq 0}$ を inner sequence とよぶことにする:

任意の j に対し q_{j-1}/q_j $(j \geq 1)$ が D 上有界正則である．

このような関数列は，Sz.-Nagy, Foiaş により始められた Jordan 作用素の理論 (cf. [1]) に既に現われている．Jordan 作用素の理論は，線形代数での Jordan 標準形の無限次元版であることを注意しておきたい．

さて，inner sequence から次のようにして H^2 の閉部分加群を作ることができる:

$$M := \sum_{j=0}^{\infty} \oplus q_j H^2(D) \otimes w^j.$$

M を H^2 の一般の閉部分加群とする．$N = H^2/M$ を M の商加群とし，M 上，N 上の作用素をそれぞれ次のように定める:

$$R_z f = P_M z f \quad (f \in M), \quad S_z g = P_N z g \quad (g \in N).$$

ここで，P_K は K の上への直交射影を表す．$[A,B]=AB-BA$ とする．R_z と R_w が可換なことは明らかであるが，R_z^* と R_w は一般に非可換である．S_z は M の商加群上の作用から定まる作用素であるから，S_z と S_w も可換であるが，一般に S_z^* と S_w は非可換である．しかし，十分一般的な設定の下で，上記の非可換の度合いは比較的小さい (可換子が Hilbert-Schmidt 作用素になる) ことが，Yang ([8]) により示されている．さらに，inner sequence に対応する閉部分加群の場合，以下のように等号でそれを明示することができる．

定理 2 ([5, 7]) $\{q_j\}_{j\geq 0}$ を inner sequence とし，$M=\sum_{j=0}^{\infty}\oplus q_j H^2(D)\otimes w^j$ とする．このとき，

(i) $\|[R_z^*,R_w]\|_2^2=\sum_{j=0}^{\infty}\big(1-|(q_j/q_{j+1})(0)|^2\big)^2$;

(ii) $\|[S_z^*,S_w]\|_2^2=\sum_{j=0}^{\infty}(1-|q_{j+1}(0)|^2)\big(1-|(q_j/q_{j+1})(0)|^2\big)^2$;

ここで $\|\cdot\|_2$ は Hilbert-Schmidt ノルムを表す.

さて，Rudin の例に定理 2 を適用すると，

$$\|[R_z^*,R_w]\|_2^2 = \sum_{j=1}^{\infty}\left(1-\prod_{n=j}^{\infty}(1-n^{-3})^2\right) \quad \text{(Clark)};$$
$$\|[S_z^*,S_w]\|_2^2 = -1+\sum_{j=1}^{\infty}\left(1-\prod_{n=j}^{\infty}(1-n^{-3})^2\right).$$

を得る．この Rudin の例における R_z^* と R_w の交換子の大きさは，D. N. Clark が最初に計算したと伝えられている (cf. [8])．筆者の知る限りその証明は公表されていないように思われるが，Rudin の例がテンソル積の直和に分解されることに，Clark が気づいていたことは推察できる．日本でも，泉池先生が，Rudin の例が直和に分解されることを指摘されている．一方，中路先生は inner sequence から閉部分加群が構成できることに気づかれていた．筆者は両先生の下で学んだため，さらに踏み込んだ研究ができたといえる．

4 rank について

以下，M は H^2 の閉部分加群とし，rank M により M の (ヒルベルト加群としての) 生成系に関する最小の濃度を表す．rank に関し，次の定理が知られている．

定理 3 (Douglas-Yang [3]) M を H^2 の閉部分加群とする．任意の $(\lambda,\mu)\in D^2$ に対し $M_{\lambda,\mu}=[(z-\lambda)M+(w-\mu)M]$ と定める．このとき

$$\dim(M/M_{\lambda,\mu})\leq \operatorname{rank} M$$

が成り立つ．

Douglas-Yang の不等式を眺めると，その左辺がある (λ,μ) で無限大を取れば，右辺も無限大となり，M は無限生成となるが，この方針で無限生成の M を探すことは難しい．実際，Douglas-Yang の不等式の左辺を計算することは，一般にとても困難である．しかし，inner sequence から構成される閉部分加群に限れば，その左辺を明確に計算することができる．

定理 4 ([5, 6]) $\{q_j\}_{j\ge 0}$ を inner sequence とし，$M = \sum_{j=0}^{\infty} \oplus q_j H^2(D) \otimes w^j$ とする．このとき，

$$\dim(M/M_{\lambda,\mu}) = \begin{cases} 1 + \left|\left\{ j \ge 1 : \frac{q_{j-1}}{q_j}(\lambda) = 0 \right\}\right| & (\mu = 0); \\ 1 & (\mu \ne 0). \end{cases}$$

また, Douglas-Yang の不等式と組み合わせることにより，

$$1 + \sup_{\lambda \in D} \left|\left\{ j \ge 1 : \frac{q_{j-1}}{q_j}(\lambda) = 0 \right\}\right| \le \operatorname{rank} M.$$

を得る．

定理 4 の最後に得られた式を用いれば，無限生成の閉部分加群をたくさんつくることができる．

定理 5 ([6]) $\{q_j\}_{j\ge 0}$ を inner sequence とし，b_λ を λ に零点をもつ Blaschke factor とする．$\{\prod_{k=l}^{\infty} b_{\lambda_k}\}_{l\ge 1}$ が部分列として $\{q_{j-1}/q_j\}_{j\ge 1}$ に含まれているならば，$\{q_j\}_{j\ge 0}$ に対応する閉部分加群 $M = \sum_{j\ge 0}^{\infty} \oplus q_j H^2(D) \otimes w^j$ は無限生成である．

さらに，次の定理により無限生成の閉部分加群が豊富に存在することがわかる．

定理 6 ([5, 6]) inner sequence $\{q_j\}_{j\ge 0}$ に対し，各 q_j の最初の non-zero Taylor 係数が正であり，q_j が $H^2(D)$ の中で $j \to \infty$ として 1 に弱収束するとき，$\{q_j\}_{j\ge 0}$ は正規化されているという．正規化された二つの inner sequence $\{q_j\}_{j\ge 0}$, $\{\tilde{q}_j\}_{j\ge 0}$ を考え，それぞれに対応する閉部分加群を M, $\tilde{M}$ とする．M と $\tilde{M}$ がヒルベルト加群としてユニタリ同型である必要十分条件は $\{q_j\}_{j\ge 0} = \{\tilde{q}_j\}_{j\ge 0}$ となることである．

参考文献

[1] H. Bercovici, Operator theory and arithmetic in H^∞, Mathematical Surveys and Monographs 26, American Mathematical Society, Providence, RI, 1988.

[2] A. Beurling, On two problems concerning linear transformations in Hilbert space, Acta Math. 81 (1949), 239–255.

[3] R. G. Douglas and R. Yang, Operator theory in the Hardy space over the bidisk (I), Integr. equ. oper. theory 38 (2000), 207–221.

[4] W. Rudin, Function theory in polydiscs, W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1969.

[5] M. Seto, Infinite sequences of inner functions and submodules in $H^2(D^2)$, to appear in J. operator theory.

[6] M. Seto, Inner functions and two rank problems on submodules in $H^2(D^2)$, in preparation.

[7] M. Seto and R. Yang, Inner sequence based invariant subspaces in $H^2(D^2)$, Proc. Amer. Math. Soc. 135 (2007), 2519-2526.

[8] R. Yang, Operator theory in the Hardy space over the bidisk, III, J. Funct. Anal. 186 (2001), 521{545.

Michio Seto
Department of Mathematics
Shimane University
Matsue 690-8504, Japan
e-mail: mseto@riko.shimane-u.ac.jp

Riemann面のRoyden's resolutionとsimultaneous analytic continuation

Mikihiro HAYASHI, Hokkaido University

(関数環研究集会 Nov. 26(Mon)–27(Thu), 2007, 於：信州大学理学部、松本市)

1 Introduction

Let A an algebra of analytic (or meromorphic) funcions on a Riemann surface R. We always assume that A contains a nonconstant function. In the following argument, we may assume without loss of generality that A contains the constant functions because the quotient field of A contains the constants, $c = (cf)/f$. The algebra A will be called **weakly separating** on R if for any distinct pair of points p, q in R there exists a pair of nonconstant functions f, g in A such that $(f/g)(p) \neq (f/g)(q)$. The base Riemann surface R will be called **maximal** for A if there are no Riemann surfaces R' such that R' contain R as a proper subdomain in the sense of conformally equivalence and such that every element in A has an analytic (resp. meromorphic) extension to R'.

1 Definition Let $\tilde{R}$ a Riemann surface and $\tilde{A}$ an algebra of analytic (resp. meromorphic) funcions on $\tilde{R}$. We will call $(\tilde{A}, \tilde{R})$ the **Royden's resolution** of (A, R) if the following properties are satisfied:

(a) there is an analytic mapping φ from R to $\tilde{R}$ such that $A = \{\tilde{f} \circ \varphi ; \tilde{f} \in \tilde{A}\}$; if this is the case, the correspondence $\tilde{f} \to \tilde{f} \circ \varphi$ is one-to-one algebraic isomorphism from $\tilde{A}$ onto A.

(b) $\tilde{A}$ is weakly separating on $\tilde{R}$.

(c) $\tilde{R}$ is a maximal Riemann surface for $\tilde{A}$.

2 Theorem (Royden[2], 1965) Let A an algebra of analytic (or meromorphic) funcions on a Riemann surface R such that A contains a nonconstant function. Then, there exists a Royden's resolution $(\tilde{A}, \tilde{R})$ of (A, R). Moreover, such a Riemann surface $\tilde{R}$ is uniquely determined by (A, R) (up to the conformal equivalence).

Here we briefly sketch his proof. He started from an algebra A. A *representation* σ of A on a (not neccessarily connected) Riemann surface R is an algebra homomorphism $\sigma : f \to f^\sigma$ of A onto a subalgebra A^σ of analytic (or meromorphic) functions on R such that for each connected component of R there is a nonconstant f^σ for some $f \in A$. Two etreme cases, `local' and `globaL' representations, are of special importance. The global one will be constructed at the end. A local representation $(\sigma; p; R)$ is a germ of a representation σ at point p; that is, At a point p in R, we consider all representations $f \to f^\sigma|_U$, where U runs all neighborhoods of p. A representaion σ of A on R is said to be *primitive* at a point p in R if for some $f; g \in A$, f^σ/g^σ has a simple zero at point p. Two primitive local representaions σ at $p \in R$ and r at $q \in W$ are said to be equivalent if there is a conformal mapping φ of a neighborhood of p onto a neighborhood of q such that $\varphi(p) = q$ and $f^\sigma = f^\rho \circ \varphi$. Then, one can see the followings:

(i) If f^σ/g^σ is one-to-one on R, then the representaion σ is primitive at any points in R. In particular, if a representation σ is primitive at point p, then it is primitive at any points in a neighborhood of p.

(ii) If $(\sigma; p; R)$ is a local representation, then there is a primitive local representation $(\rho; q; W)$ such that there is an analyitc mapping ψ of a neighborhood of p onto a neighborhood of q such that $\psi(p) = q$ and $f^\sigma = f^\rho \circ \psi$. It is worthwhile to note that one can express $w = \psi(z) = z^k$ for suitably choosen coordinates z about p and w about q satisfying $z(p) = w(q) = 0$.

(iii) Two primitive local representaions σ at $p \in R$ and ρ at $q \in W$ are not equivalent if and only if there are elements $f; g$ in A such that $(f^\sigma/g^\sigma)(p) \neq (f^\rho/g^\rho)(q)$.

Now, let $\mathrm{Rep}A$, the `global' representation of A, be the set of all equivalent classes $[(\sigma; p; R)]$ of primitive local representations of A. By (i), $\mathrm{Rep}A$ has a structure of a (not neccessarily connected) Riemann surface. For each $f \in A$, define a function $\tilde{f}$ on $\mathrm{Rep}A$ by $\tilde{f}([(\sigma; p; R)]) = f^\sigma(p)$, which is well-defined. By (ii), the totallity $\tilde{A}$ of $\tilde{f}$ is weakly separating on $\tilde{R}$. By (iii), any representation σ of A on R induces a natural analytic mapping φ of R into $\mathrm{Rep}A$ such that $f^s = \tilde{f} \circ \varphi$, which shows the maximality of $\tilde{R}$ for A.

When one starts from an algebra A of analytic (or meromorphic) functions on a connected Riemann surface R, letting $\tilde{R}$ be the connected component containing $\varphi(R)$, one obtains the Royden's resolution $(\tilde{A}; \tilde{R})$ of $(A; R)$.

In what follows we need the following fact, which is essentially shown in the Royden's argument.

3 Lemma Let A be an algebra of analytic (or meromorphic) functions on a (not necessarily connected) Riemann surface. Then, A is weakly separating on R if and only if A is separating on R except a countable number of points.

The next example shows that the Royden's resolution can be understandable as a kind of analytic continuation:

4 Example Let f be a nonconstant meromorphic on a plane domain D and A the algebra generated by two functions $f(z)$ and z. Let R_f be the ramified Riemann surface associated with the analytic continuation $\tilde{f}$ of f. Then, the Royden's resolution of $(A; D)$ is given by $(\tilde{A}; R_f)$, where $\tilde{A}$ is the algebra generated by two function $\tilde{f}$ and the natural projection π of R_f into the Riemann sphere $\hat{\mathbb{C}}$; the associated analytic mapping φ is the inverse mapping π^{-1} from D onto the sheet in R_f over D on which $\tilde{f} = f \circ \pi$.

Proof: It suffices to see the weakly separateness. Let $p, q \in R_f$; $p \neq q$. We are done if $\pi(p) \neq \pi(q)$. Suppose $\pi(p) = \pi(q)(= a)$. Let z be the standard coordinate on $\hat{\mathbb{C}}$. We may choose local coordinates ζ about p and ξ about q such that $z = \pi(\zeta) = a + \zeta^m$ and $z = \pi(\xi) = a + \xi^n$, where positive integers m, n denote multiplicities of brach points. Take neighborhoods U of a, V of p and W of q so that $U = \pi(V) = \pi(W)$. In case $m = n = 1$, the sutuation is simple. Since $\tilde{f} \circ (\pi|V)^{-1}$ and $\tilde{f} \circ (\pi|W)^{-1}$ are two different analytic continuations of f, $\tilde{f} \circ (\pi|V)^{-1} - \tilde{f} \circ (\pi|W)^{-1}$ is nonconstant on U and may have at most a finite number of zeros in U. Therefore, two functions $\tilde{f}$ and π separate the points of the set $U \cup W$ execpt a finite number of points, and hence, $\tilde{A}$ is weakly separating on $V \cup W$ by the above lemma. In the general case, two functions $\tilde{f}$ and π separate the points of the set $U \cup W$ execpt a finite number of points because

$$F(z) = \prod_{1 \le k < j \le m+n} (\tilde{f}(p_k) - \tilde{f}(p_j))^2$$

is a nonconstant meromorphic function of $z \in U \setminus \{a\}$, where $(\pi|V \cup W)^{-1}(z) = \{p_1, \ldots, p_{m+n}\}$. Therefore, $\tilde{A}$ is weakly separating on $V \cup W$, again, by the above lemma. This shows that $\tilde{A}$ is weakly separating on R_f. Now let R' be a connected Riemann surface such that there is an weakly separating algebra A' of meromorphic functions on R' and a conformal mapping φ' of D onto a subdomain D' of R' satisfying $A' \circ \varphi' = A$. Then, there exist functions τ and g in A' with $\tau \circ \varphi' =$ identity and $g \circ \varphi' = f$. We may regard $\tau : R' \to \tau(R')$ a (branched) covering map. Fixing a point a' in D' with $d\tau(a') \neq 0$, set $a = \tau(a')$. Then, $a \in D$ and a' is a non branch point of τ. Let b' be any non branch point in R'. Choose a neighborhood V' of b' such that τ is one-to-one on V'. Set $V = \tau(V')$. Then, $g \circ (\tau|V')^{-1}$ is an analytic continuation of f.

This is easy to see. In fact, if we take an curve γ' starting from the point a' to the point b' on R' such that $d\tau \neq 0$ on γ', then we see that $g \circ (\tau|V')^{-1}$ is an analytic continuation of f along the curve $\gamma = \tau(\gamma')$. If b' is a branch point of τ, we have only to take the curve γ' starting from the point a' to the point b' on R' so that $d\tau \neq 0$ on $\gamma' \setminus \{b'\}$. With this argument, we see that there is an analytic mapping psi of R' to R_f such that $\tilde{f} \circ \psi = g$ and $\pi \circ \psi = \tau$, and hence, $\tilde{A} \circ \psi = A'$. Since A' is weakly separating, ψ is one-to-one. This also show that the maximailty of R_f for $\tilde{A}$. This completes the proof.

5 Remark In the preceding example, the role of the coordinate function z is crucial. In fact, if A is the algebra generated by a single nonconstant analytic (or meromorphic) function f on an arbitray Riemann surface R. Then, the Royden's resolution of $(A; R)$ is just the whole complex plane $\mathbb{C}$ (resp., the Riemann sphere $\hat{\mathbb{C}}$) and the algebra $\tilde{A}$ of all polynomials, where the associated analytic mapping from R to $\mathbb{C}$ (or $\hat{\mathbb{C}}$) is given by $\varphi = f$.

Our main purpose is to note that the Royden's resolutions can be constructed in the following way.

6 Theorem Let A an algebra of analytic (or meromorphic) funcions on a Riemann surface R such that A contains a nonconstant function. Let h be an nonconstant function in A and V be any subdomain of R such that h is one-to-one on V. Let $F = \{f \circ (h|V)^{-1}; f \in A\}$ and R_F the Riemann surface obtained by the simultanious analytic continuations $\tilde{F}$ of F. Then, $(\tilde{F}; R_F)$ gives the Royden's resolution of $(A; R)$.

Here, the simultanious analytic continuations are defined as follows. Let F be a family of analytic (or meromorphic) funcions on a subdomain U of $\hat{\mathbb{C}}$. Let V be another subdomain which intersets with U. If every function f in F has the analytic continuation f^V to V, then we say that $F^V = \{f^V; f \in F\}$ ise the direct simultaneous analytic continuation of F. If a family F^W is obtained by repeating direct simultaneous analytic continuations finitely many times from F, we say that F^W ise the indirect simultaneous analytic continuation of F. Here, one should note that the correspondence $f \to f^W$ is also important. Namely, even if $W = W'$ and $F^W = F^{W'}$ as sets, we consider two simultanued analytic continuations F^W and $F^{W'}$ to be different whenever those correspondences are different. Following the classical way, we can define a simultaneous analytic continuation along a curve and a simultaneous analytic continuation at a branch point. (The use of function elements is incovienent for a simultaneous analytic continuation, because the radii of convergence of function elements may have the least bound zero. We need a fixed domain W on which every function is de¯ned.) The simultaneous analytic continuations $\tilde{F}$ of F is de¯ned by the totality of indirect simultaneous continuations of F.

Now, the proof of Theorem 6 can be done in a similar way as Example 4, and will be omitted.

7 Remark When one consider the analytic continuation of an analytic function in Example 4, one should be careful; we need to consider it ¯rst as meromorphic function and restrict to the domain where f is analytic, because f may have analytic continuations at $z = 1$, where z has a pole. On the other hand, such a conderation is no need as for Theorem 6. This is because Theorem 6 is a gerenalization of Remark 5.

Finally, we should remark on the main result of his paper [2]. He proves that the Royden's resolution R is $\tilde{A}$-convex; namely, if K is a compact set, then every scalar-valued nonzero algebra homomorphism of the uniform closure of $\tilde{A}|K$ on K is given by a point evaluation of a certain compact subset $\hat{K}$ of R. This result is also proved by Bishop [1].

It is an interesting problem to generalize this result to a higher dimensional resolution. >From our present observation, we can easily generalize a higher dimensional resolution as far as we restrict our consideration to the smooth part of the resolution. The di±culty arises when one treats the singular part of the resolution, which is required in order to obtain $\tilde{A}$-convexity of the resolution.

References

[1] E. Bishop, Analyticity in certain Banach algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 102(1962), 507{544.

[2] H.L. Royden Algebra of bounded analytic functions on Riemann surfaces, Acta Math. 114(1965), 113{142.

Norms and essential norms of weighted composition operators between the Bloch space to H^∞

安東国立大学校　基礎科学研究科　細川　卓也 (Takuya Hosokawa)

1 Introduction

Let $H(D)$ be the set of all analytic functions on the open unit disk D and $S(D)$ the set of all analytic self-maps of D. Every analytic self-map $\varphi \in S(D)$ induces a composition operator $C_\varphi : f \mapsto f \circ \varphi$ and every analytic function $u \in H(D)$ induces a multiplication operator $M_u : f \mapsto u \cdot f$. Both C_φ and M_u are linear transformations from $H(D)$ to itself. The weighted composition operator uC_φ is the product of M_u and C_φ, that is, $uC_\varphi f = M_u C_\varphi f = u \cdot f \circ \varphi$.

Let $H^\infty = H^\infty(D)$ be the set of all bounded analytic functions on D. H^∞ is the Banach algebra with the supremum norm

$$\|f\|_\infty = \sup_{z\in D} |f(z)|.$$

The Bloch space $\mathcal{B}$ is the set of all $f \in H(D)$ satisfying

$$\|f\| = \sup_{z\in D}(1-|z|^2)|f'(z)| < \infty.$$

Then $\|\cdot\|$ defines a Möbius invariant complete semi-norm and $\mathcal{B}$ is a Banach space under the norm $\|f\|_{\mathcal{B}} = |f(0)| + \|f\|$. Note that $\|f\| \le \|f\|_\infty$ for any $f \in H^\infty$, hence $H^\infty \subset \mathcal{B}$. Let the little Bloch space $\mathcal{B}_o$ denote the subspace of $\mathcal{B}$ consisting of those functions f such that

$$\lim_{|z|\to 1}(1-|z|^2)f'(z) = 0.$$

The little Bloch space $\mathcal{B}_o$ is a closed subspace of $\mathcal{B}$. In particular, $\mathcal{B}_o$ is the closure in $\mathcal{B}$ of the polynomials.

Let w be a point in D and α_w be the Möbius transformation of D defined by

$$\alpha_w(z) = \frac{w-z}{1-\overline{w}z}.$$

For w, z in D, the pseudo-hyperbolic distance $\rho(w,z)$ between z and w is given by

$$\rho(w,z) = |\alpha_w(z)| = \left|\frac{w-z}{1-\overline{w}z}\right|,$$

and the hyperbolic metric $\beta(w,z)$ is given by

$$\beta(w,z) = \frac{1}{2}\log\frac{1+\rho(w,z)}{1-\rho(w,z)}.$$

It is known that the hyperbolic metric coincides with the induced distance on the Bloch space, that is,

$$\sup_{\|f\|_{\mathcal{B}}\le 1} |f(z)-f(w)| = \beta(z,w). \tag{1.1}$$

From this equation, we have the following growth condition on the Bloch functions; for $f \in \mathcal{B}$,

$$|f(w)| \le |f(0)| + \|f\|_{\mathcal{B}}\, \frac{1}{2}\log\frac{1+|w|}{1-|w|}. \tag{1.2}$$

See [6] for more information on the Bloch space.

Let X and Y be two Banach spaces and T be a linear operator from X to Y. Let $\|T\|_{X\to Y}$ denote the operator norm of T. Moreover, let denote $\|T\|_X = \|T\|_{X\to X}$. For a bounded linear operator T from X to Y, the essential norm $\|T\|_{e,X\to Y}$ is defined to be the distance from T to the closed ideal of compact operators, that is,

$$\|T\|_{e,X\to Y} = \inf\{\|T+K\|_{X\to Y} : K \text{ is compact from } X \text{ to } Y\}.$$

Notice that T is compact from X to Y if and only if $\|T\|_{e,X\to Y} = 0$. Let denote $\|T\|_{e,X} = \|T\|_{e,X\to X}$.

In this paper, we estimate the operator norm and the essential norm of uC_φ acting between $\mathcal{B}$ and H^∞. We give the exact estimation of the operator norm of uC_φ from $\mathcal{B}$ to H^∞ in Section 2, and of the essential norm in section 3. Here we introduce some related results. Ohno characterized the boundedness and the compactness of uC_φ from $\mathcal{B}$ to H^∞.

Theorem A. (Ohno, [3] and [5]) *Let u be in $H(\mathbb{D})$ and φ be in $S(\mathbb{D})$.*

(i) *The weighted composition operator $uC_\varphi : \mathcal{B} \to H^\infty$ is bounded if and only if $u \in H^\infty$ and*

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} |u(z)|\log\frac{e}{1-|\varphi(z)|} < \infty.$$

(ii) *Suppose that $uC_\varphi : \mathcal{B} \to H^\infty$ is bounded. Then $uC_\varphi : \mathcal{B} \to H^\infty$ is compact if and only if $u \in H^\infty$ and*

$$\lim_{|\varphi(z)|\to 1}\sup |u(z)|\log\frac{e}{1-|\varphi(z)|} = 0.$$

In [4], Kwon also studied the composition operators from $\mathcal{B}$ to H^∞ and gave the estimation of the operator norm of C_φ induced by φ with a fixed point at the origin from $\mathcal{B}^0$ to H^∞, where $\mathcal{B}^0$ is the subspace of $\mathcal{B}$ which consists of all Bloch functions f with $f(0) = 0$.

Theorem B. (Kwon, [4]) *For any $\varphi \in S(\mathbb{D})$ such that $\varphi(0) = 0$, we have that*

$$\|C_\varphi\|_{\mathcal{B}^0\to H^\infty} = \frac{1}{2}\sup_{z\in\mathbb{D}}\log\frac{1+|\varphi(z)|}{1-|\varphi(z)|}.$$

The main results of this paper give the complete estimation of the operator norm and essential norm of uC_φ from $\mathcal{B}$ to H^∞, which are the generalization of these results above.

2 The operator norm of uC_φ from $\mathcal{B}$ to H^∞

In this section, we estimate the operator norm of uC_φ from $\mathcal{B}$ to H^∞.

Theorem 2.1 Let u be in $H^\infty(D)$ and φ be in $S(D)$. Then we have the following estimation:

$$\|uC_\varphi\|_{\mathcal{B}\to H^\infty} = \|uC_\varphi\|_{\mathcal{B}_o\to H^\infty} = \sup_{z\in D}\left(|u(z)|\cdot\max\left\{1; \frac{1}{2}\log\frac{1+|\varphi(z)|}{1-|\varphi(z)|}\right\}\right).$$

Considering the case that $u\equiv 1$, we obtain the estimation of $\|C_\varphi\|_{\mathcal{B}\to H^\infty}$.

Corollary 2.2 Let φ be in $S(D)$. Suppose that $\|\varphi\|_\infty < 1$. Then the operator norm of C_φ is estimated as

$$\|C_\varphi\|_{\mathcal{B}\to H^\infty} = \|C_\varphi\|_{\mathcal{B}_o\to H^\infty} = \begin{cases} 1 & \text{if } \|\varphi\|_\infty \le \frac{e^2-1}{e^2+1} \\ \frac{1}{2}\log\frac{1+\|\varphi\|_\infty}{1-\|\varphi\|_\infty} & \text{if } \frac{e^2-1}{e^2+1} < \|\varphi\|_\infty < 1. \end{cases}$$

Remark 2.3 (i) If uC_φ is bounded from $\mathcal{B}$ to H^∞ and $|\varphi(z)|\to 1$ as $z\to\zeta\in\partial D$, then the radial limit of u must vanish at ζ. Thus we can conclude that if u is not the zero function and φ has the radial limits of modulus 1 on a set of positive measure, then uC_φ is never bounded.
(ii) More especially, considering the case that $\varphi(z)=z$, it follows that that the multiplication operator M_u is bounded from $\mathcal{B}$ to H^∞ if and only if u is the zero function. Then we can conclude that the compactness of M_u is equivalent to the boundedness of M_u.

3 The essential norm of uC_φ from $\mathcal{B}$ to H^∞

In this section, we estimate the essential norm of uC_φ from $\mathcal{B}$ to H^∞. To do this, we prepare the two lemmas.

Lemma 3.1 Let u be in $H(D)$ and φ be in $S(D)$. Suppose that uC_φ is bounded from $\mathcal{B}$ to H^∞. Then uC_φ is compact from $\mathcal{B}$ to H^∞ if and only if $\|uC_\varphi f_n\|_\infty\to 0$ for any bounded sequence $\{f_n\}$ in $\mathcal{B}$ that converges to 0 uniformly on every compact subset of D.

The lemma above is one of the generalization of well known results called the Weak Convergence Lemma and we omit its proof (see Proposition 3.11. of [1]).

Here we give the estimation of the essential norm of uC_φ.

Theorem 3.2 Let u be in $H^\infty(D)$ and φ be in $S(D)$. Suppose that uC_φ is bounded from $\mathcal{B}$ to H^∞ (then uC_φ is also bounded from $\mathcal{B}_o$ to H^∞). Then we have the following estimation:

$$\begin{aligned}\|uC_\varphi\|_{e;\mathcal{B}\to H^\infty} &= \|uC_\varphi\|_{e;\mathcal{B}_o\to H^\infty}\\ &= \limsup_{|\varphi(z)|\to 1}|u(z)|\frac{1}{2}\log\frac{1+|\varphi(z)|}{1-|\varphi(z)|}.\end{aligned}$$

where we define the limit supremum above is equal to 0 if $\|\varphi\|_\infty < 1$.

Recall that uC_φ is compact from H^∞ to itself if and only if $|u(z)|=0$ whenever $|\varphi(z)|\to 1$. Hence it follows that C_φ is compact from H^∞ to itself if and only if $\|\varphi\|_\infty < 1$. For the composition operator, combining Corollary 2.2, we have the following.

Corollary 3.3 Let φ be in $S(D)$. Then the following are equivalent:

(i) C_φ is bounded from $\mathcal{B}$ to H^∞.

(ii) C_φ is bounded from $\mathcal{B}_o$ to H^∞.

(iii) C_φ is compact from $\mathcal{B}$ to H^∞.

(iv) C_φ is compact from $\mathcal{B}_o$ to H^∞.

(v) C_φ is compact from H^∞ to H^∞.

(vi) $\|\varphi\|_\infty < 1$.

At last, we give an example which indicates the difference between the boundedness and compactness of uC_φ from $\mathcal{B}$ to H^∞.

Example 3.4 Put $\varphi(z) = (1+z)/2$, $u(z) = 1 - z$, $v(z) = \left(\log \frac{e}{1-z}\right)^{-1}$, and $w(z) = \left(\log\log \frac{e^e}{1-z}\right)^{-1}$. Then $\varphi(1) = 1$ and $|\varphi(z)| < 1$ for $z \neq 1$. Since these three weight functions tend to 0 as $z \to 1$, uC_φ, vC_φ, and wC_φ are compact from H^∞ to H^∞. By Theorem 2.1 and Theorem 3.2, it follows that uC_φ is compact, vC_φ is bounded but is not compact, and wC_φ is not bounded from $\mathcal{B}$ to H^∞.

参考文献

[1] Cowen C and MacCluer B (1995) Composition Operators on Spaces of Analytic Functions. CRC Press, Boca Raton

[2] Hosokawa T, Norms and essential norms of weighted composition operators from the Bloch space to H^∞, preprint

[3] Hosokawa T, Izuchi K, and Ohno S (2005) Topological structure of the space of weighted composition operators on H^∞. Integral Equations Operator Theory 53: 509–526

[4] Kwon E G (2005) Hyperbolic g-function and Bloch pullback operators. J Math Anal Appl 309: 626–637

[5] Ohno S (2001) Weighted composition operators between H^∞ and the Bloch space. Taiwanese J Math 5: 555–563

[6] Zhu K (1990) Operator Theory in Function Spaces. Marcel Dekker New York

Bargmann-Fock 空間の荷重合成作用素

植木 誠一郎 (Sei-Ichiro Ueki)

$\mathbb{C}^N$ 上の整関数全体を $H(\mathbb{C}^N)$ と表す. Bargmann-Fock 空間 F^p_α $(1 \le p < \infty;\ \alpha > 0)$ は次のように定義される整関数からなる関数空間である:

$$F^p_\alpha = \left\{ f \in H(\mathbb{C}^N) : \int_{\mathbb{C}^N} |f(z)|^p e^{-\frac{p\alpha}{2}|z|^2} dV(z) < \infty \right\};$$

$$\|f\|^p = \left(\frac{p\alpha}{2\pi}\right)^N \int_{\mathbb{C}^N} |f(z)|^p e^{-\frac{p\alpha}{2}|z|^2} dV(z).$$

Bargmann-Fock 空間は Banach 空間であり, 特に $p = 2$ のときには, Functional Hilbert 空間となる. Bargmann-Fock 空間の基本的な性質については [2] に詳細に述べられている. これらの関数空間に関する研究はいろいろと知られているが, 最近（２００３年）になって, B. Carswell, B. MacCluer, A. Schuster[1] らにより F^p_α 上の合成作用素についての研究がなされた. その結果を端的に述べると, F^p_α 上の有界な合成作用素はそれを構成する symbol φ が $\varphi(z) = Az + B$ （ただし, A は $\|A\| \le 1$である N 次の行列, B は $N \times 1$行列）の形をしたものに限り, さらにコンパクト合成作用素は $\|A\| < 1$ を満たすものだけであるという結果である. したがって, Bargmann-Fock 空間上の合成作用素はこれまでに知られている有界領域上の解析関数空間（Hardy 空間や Bergman 空間等）の場合と比較すると, その形がかなり限定されていることが判る.

荷重合成作用素に関する結果については, $p = 2$ の場合, すなわち Hilbert 空間である F^2_α（これを Fock 空間と呼ぶ）上の結果が著者によって得られている ([3, 4]). [3] では, 荷重合成作用素の有界性とコンパクト性の特徴付けを試みているが, Carswell, MacCluer, Schuster らの結果のように荷重合成作用素の形が具体的に定まるかどうかは判っていない. しかし, コンパクト性の特徴付けと密接な関係がある作用素の本質ノルムに対する評価を与えている.

今回の講演では, [3] で得られた結果を Banach 空間である F^p_α 上の荷重合成作用素の場合へと一般化した結果について報告したい.

F^p_α 上の荷重合成作用素の有界性の特徴付けとその本質ノルムに対する評価不等式は, 何れも次の形の積分作用素を用いて記述される. $u \in H(\mathbb{C}^N)$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_N)$ $(\varphi_j \in H(\mathbb{C}^N))$ に対して,

$$B^p_\varphi(u)(w) = \left(\frac{p\alpha}{2\pi}\right)^N \int_{\mathbb{C}^N} |u(z)|^p e^{p\alpha \mathrm{Re}\langle \varphi(z), w\rangle} e^{-\frac{p\alpha}{2}(|w|^2 + |z|^2)} dV(z)$$

と定める. この $B^p_\varphi(u)$ の起源は, $p = 2$ の場合の $(uC_\varphi)^*(uC_\varphi)$ に対する 形式的なBerezin 変換である.

荷重合成作用素の有界性はこの積分作用素 $B^p_\varphi(u)$ を用いて次のように特徴付けられる:

定理１ ([5]) $1 \le p < \infty$ とする.

$$uC_\varphi : F^p_\alpha \to F^p_\alpha \text{ が有界荷重合成作用素} \iff B^p_\varphi(u) \in L^\infty(\mathbb{C}^N).$$

荷重合成作用素の本質ノルム $\|uC_\varphi\|_e$ に対する評価不等式について次が得られた:

定理 2 ([5]) $1 < p < \infty$ とする．F^p_α 上の有界な荷重合成作用素 uC_φ に対して，

$$\limsup_{|w|\to\infty} B^p_\varphi(u)(w) \le \|uC_\varphi\|_e^p \le C \limsup_{|w|\to\infty} B^p_\varphi(u)(w)$$

が成立する．特に, $uC_\varphi : F^p_\alpha \to F^p_\alpha$ がコンパクト作用素であるためには, $\lim_{|w|\to\infty} B^p_\varphi(u)(w) = 0$ が必要十分である．

<u>コンパクト荷重合成作用素の例</u>　簡単のため, $N = 1$ の場合を考える．$0 < \varepsilon < \frac{\alpha}{2}$, $\lambda = \sqrt{2 - \frac{4\varepsilon}{\alpha}}$ とする．

$$u(z) = \exp\{\varepsilon z^2\}; \qquad \varphi(z) = \frac{\lambda}{2} z + 1.$$

このとき, uC_φ はコンパクト荷重合成作用素である．なぜならば,

$$B^p_\varphi(u)(w) \le C \exp\left\{ -\frac{p\alpha}{4}(|w| - 2)^2 + p\alpha \right\} \to 0 \quad \text{as} \quad |w| \to 0$$

であることが容易に判るから, 定理 2 により uC_φ は F^p_α 上のコンパクト作用素である．

<u>注意</u>　上記定理 2 では $1 < p < \infty$ と条件が付いているが, これはその証明の中で F^p_α の双対性を利用していることに因る．したがって, $p = 1$ の場合にも定理 2 が正しいかどうかは今のところ不明であるが, 上記の例は $p = 1$ の場合にも $B^1_\varphi(u)(w) \to 0$ $(|w| \to \infty)$ が従う．また, 直接計算と Carswell, MacCluer, Schuster の定理 [1] によりこの場合の uC_φ が F^1_α 上のコンパクト作用素であることが確認できる．したがって, ここで与えた例から次のことが自然に予想される:

$$uC_\varphi : F^1_\alpha \to F^1_\alpha \text{ がコンパクト荷重合成作用素} \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{|w|\to\infty} B^1_\varphi(u)(w) = 0 \quad ?$$

参考文献

[1] B.J. Carswell, B.D. MacCluer and A. Schuster, Composition operators on the Fock space, Acta Sci. Math. (Szeged), 69 (2003), 871–887.

[2] S. Janson, J. Peetre and R. Rochberg, Hankel forms and the Fock space, Rev. Math. Iberoamericana, 3 (1987), 61–129.

[3] S. Ueki, Weighted composition operator on the Fock space, Proc. Amer. Math. Soc., 135 (2007), 1405–1410.

[4] S. Ueki, Hilbert-Schmidt weighted composition operator on the Fock space, Int. Journal of Math. Analysis, 1 (2007), 769-774.

[5] S. Ueki, Weighted composition operators on the Bargmann-Fock space, to appear.

Riesz空間の正則性による非加法的測度論の展開: Alexandro®定理

信州大学工学部　　河邊　淳 (Jun Kawabe)

1 Introduction

A classical theorem of A.D. Alexandro® [1] states that every ¯nitely additive, regular measure on a ¯eld of subsets of a compact Hausdor® space is countably additive. This result was extended in Riečan [19] and Hrachovina [5] for Riesz space-valued compact measures and in Volauf [22] for lattice group-valued compact measures. The counterpart of the Alexandro® theorem in non-additive measure theory can be found in Wu and Ha [25, Theorem 3.2], which asserts that every uniformly autocontinuous, Radon non-additive measure on a complete separable metric space is continuous from above and below (unfortunately, Theorem 2.1 of [25] was proved incorrectly; see [26]). The purpose of the paper is to give successful analogues of those results for Riesz space-valued non-additive measures.

The "-argument, which is useful in calculus, does not work in a general Riesz space. Recently it has been recognized that, instead of the "-argument, certain smoothness conditions, such as the weak ¾-distributivity, the Egoro® property, the asymptotic Egoro® property, and the multiple Egoro® property, should be imposed on a Riesz space to succeed in extending fundamental and important theorems in additive or non-additive measure theory to the framework of Riesz spaces; see, for instance, [6, 7, 8, 9], Riečan and Neubrunn [20], Wright [24], and the references therein. In this paper, with the help of those smoothness conditions, it is reported that the Alexandro® theorem for a compact non-additive measure with values in a Riesz space is still valid for the following two cases: one is the case that the measure is autocontinuous and the Riesz space has the weak asymptotic Egoro® property and the other is the case that the measure is uniformly autocontinuous and the Riesz space is weakly ¾-distributive. These will be appeared in Section 3.

Some de¯nitions of smoothness conditions on a Riesz space and those of Riesz space-valued non-additive measures are collected in Section 2. In Section 4 it is reported that every weakly null-additive, Riesz space-valued fuzzy measure on a complete or locally compact, separable metric space is Radon, provided that the Riesz space has the multiple Egoro® property. A close connection between regularity and continuity of non-additive measures is also given. See the original paper [10] for the proofs of the results.

2 Preliminaries

It is always assumed that V is a Riesz space, and the standard terminology of the theory of Riesz spaces [14] will be used. Denote by $\mathbb{R}$ and $\mathbb{N}$ the set of all real numbers and the set of all natural numbers respectively.

2.1 Smoothness conditions on a Riesz space

Denote by Θ the set of all mappings from $\mathbb{N}$ into $\mathbb{N}$ which is ordered and directed upwards by pointwise partial ordering, that is, $\theta_1 \leq \theta_2$ is defined by $\theta_1(i) \leq \theta_2(i)$ for all $i \in \mathbb{N}$. A double sequence $\{r_{i,j}\}_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ of elements of V is called a *regulator* in V if it is order bounded and it holds that $r_{i,j} \downarrow 0$ for each $i \in \mathbb{N}$, that is, $r_{i,j} \geq r_{i,j+1}$ for each $i, j \in \mathbb{N}$ and $\inf_{j\in\mathbb{N}} r_{i,j} = 0$ for each $i \in \mathbb{N}$. We say that a Riesz space V has the *Egoroff property* if, for any regulator $\{r_{i,j}\}_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ in V, there is a sequence $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ of elements of V with $p_k \downarrow 0$ such that, for each $(k, i) \in \mathbb{N}^2$, one can find $j(k, i) \in \mathbb{N}$ satisfying $r_{i,j(k,i)} \leq p_k$ [14, Chapter 10]. A Dedekind σ-complete Riesz space V is said to be *weakly σ-distributive* if, for any regulator $\{r_{i,j}\}_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ in V, it holds that $\inf_{\theta\in\Theta} \sup_{i\in\mathbb{N}} r_{i,\theta(i)} = 0$ [24].

The following smoothness conditions are introduced and imposed on a Riesz space to show that some fundamental theorems in non-additive measure theory remain valid for Riesz space-valued non-additive measures [7, 8, 9].

Definition 1 Let $u \in V^+$. For each $m \in \mathbb{N}$, consider a multiple sequence

$$u^{(m)} := \{u_{n_1,\dots,n_m}\}_{(n_1,\dots,n_m)\in\mathbb{N}^m}$$

of elements of V.

1. A sequence $\{u^{(m)}\}_{m\in\mathbb{N}}$ of the multiple sequences is called a *u-multiple regulator* in V if, for each $m \in \mathbb{N}$ and $(n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{N}^m$, the multiple sequence $u^{(m)}$ satisfies the following two conditions:

   (M1) $0 \leq u_{n_1} \leq u_{n_1,n_2} \leq \cdots \leq u_{n_1,\dots,n_m} \leq u$.

   (M2) Letting $n \to \infty$, then $u_n \downarrow 0$, $u_{n_1,n} \downarrow u_{n_1}, \dots,$ and $u_{n_1,\dots,n_m,n} \downarrow u_{n_1,\dots,n_m}$.

2. A u-multiple regulator $\{u^{(m)}\}_{m\in\mathbb{N}}$ in V is said to be *strict* if, for each $m \in \mathbb{N}$ and each $(n_1, \dots, n_m), (n'_1, \dots, n'_m) \in \mathbb{N}^m$, it holds that $u_{n_1,\dots,n_m} \geq u_{n'_1,\dots,n'_m}$ whenever $n_i \leq n'_i$ for all $i = 1, 2, \dots, m$.

Definition 2 Let $u \in V^+$. For each $m \in \mathbb{N}$, consider a multiple sequence

$$u^{(m)} := \{u_{n_1,\dots,n_m}\}_{(n_1,\dots,n_m)\in\mathbb{N}^m}$$

of elements of V.

1. We say that V has the multiple Egoroff property if, for each $u \in V^+$ and each strict u-multiple regulator $\{u^{(m)}\}_{m \in \mathbb{N}}$, the following two conditions hold:

   (i) $u_\theta := \sup_{m \in \mathbb{N}} u_{\theta(1),\ldots,\theta(m)}$ exists for each $\theta \in \Theta$.

   (ii) There is a sequence $\{\theta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ of elements of Θ such that $u_{\theta_k} \to 0$.

2. We say that V has the asymptotic Egoroff property (respectively, the weak asymptotic Egoroff property) if, for each $u \in V^+$ and each u-multiple regulator (respectively, strict u-multiple regulator) $\{u^{(m)}\}_{m \in \mathbb{N}}$, the following two conditions hold:

   (i) $u_\theta := \sup_{m \in \mathbb{N}} u_{\theta(1),\ldots,\theta(m)}$ exists for each $\theta \in \Theta$.

   (ii) $\inf_{\theta \in \Theta} u_\theta = 0$.

Many important function spaces and sequence spaces enjoy our smoothness conditions; see [7, 8, 9].

2.2 Riesz space-valued non-additive measures

Throughout this paper, we assume that $(X, \mathcal{F})$ is a measurable space, that is, $\mathcal{F}$ is a σ-field of subsets of a non-empty set X.

Definition 3 A set function $\mu : \mathcal{F} \to V$ is called a non-additive measure if it satisfies the following two conditions:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$.

(ii) $\mu(A) \leq \mu(B)$ whenever $A, B \in \mathcal{F}$ and $A \subset B$ (monotonicity).

The following terminology will be used without any further reference [2, 11, 16, 23].

Definition 4 Let $\mu : \mathcal{F} \to V$ be a non-additive measure.

1. μ is said to be continuous from above if $\mu(A_n) \downarrow \mu(A)$ whenever $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ and $A \in \mathcal{F}$ satisfy $A_n \downarrow A$.

2. μ is said to be continuous from below if $\mu(A_n) \uparrow \mu(A)$ whenever $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ and $A \in \mathcal{F}$ satisfy $A_n \uparrow A$.

3. μ is called a fuzzy measure if it is continuous from above and below.

4. μ is said to be order continuous if it is continuous from above at the empty set, that is, $\mu(A_n) \downarrow 0$ for each $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ with $A_n \downarrow \emptyset$.

5. μ is said to be strongly order continuous if it is continuous from above at sets of measure zero, that is, $\mu(A_n) \downarrow 0$ for each $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ and $A \in \mathcal{F}$ with $A_n \downarrow A$ and $\mu(A) = 0$.

6. μ is said to be subadditive if $\mu(A \cup B) \le \mu(A) + \mu(B)$ for all $A, B \in \mathcal{F}$.

7. μ is said to be null-additive if $\mu(A \cup B) = \mu(A)$ whenever $A, B \in \mathcal{F}$ and $\mu(B) = 0$.

8. μ is said to be weakly null-additive if $\mu(A \cup B) = 0$ whenever $A, B \in \mathcal{F}$ and $\mu(A) = \mu(B) = 0$.

9. μ is said to be autocontinuous from above if $\mu(A \cup B_n) \to \mu(A)$ for each $A \in \mathcal{F}$ and $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ with $\mu(B_n) \to 0$.

10. μ is said to be autocontinuous from below if $\mu(A - B_n) \to \mu(A)$ for each $A \in \mathcal{F}$ and $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ with $\mu(B_n) \to 0$.

11. μ is said to be autocontinuous if it is autocontinuous from above and below.

12. μ is said to be uniformly autocontinuous from above if, for any sequence $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ with $\mu(B_n) \to 0$, there is a sequence $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ with $p_n \downarrow 0$ such that $\mu(A \cup B_n) \le \mu(A) + p_n$ for all $A \in \mathcal{F}$ and $n \in \mathbb{N}$.

13. μ is said to be uniformly autocontinuous from below if, for any sequence $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ with $\mu(B_n) \to 0$, there is a sequence $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ with $p_n \downarrow 0$ such that $\mu(A) \le \mu(A - B_n) + p_n$ for all $A \in \mathcal{F}$ and $n \in \mathbb{N}$.

14. μ is said to be uniformly autocontinuous if it is uniformly autocontinuous from above and below.

If a non-additive measure $\mu : \mathcal{F} \to V$ is order countably additive, that is, it holds that $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$ whenever $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ is a sequence of pairwise disjoint sets of $\mathcal{F}$, then μ satisfies all the properties of the above definition.

The following proposition can be easily proved from Definition 4 and the proofs in the real-valued case; see [2, 11, 16, 23] for more information on real-valued non-additive measures.

Proposition 1 Let $\mu : \mathcal{F} \to V$ be a non-additive measure.

(1) The following implications hold: subadditivity $\Rightarrow$ uniform autocontinuity $\Rightarrow$ autocontinuity $\Rightarrow$ null-additivity $\Rightarrow$ weak null-additivity.

(2) If there is an element $u \in V$ with $u > 0$ such that $\mu(A) \ge u$ for all non-empty set $A \in \mathcal{F}$, then μ is autocontinuous.

(3) If μ is order continuous and autocontinuous from above (respectively, from below), then it is continuous from above (respectively, from below).

(4) The following implications hold: continuity from above $\Rightarrow$ strong order continuity $\Rightarrow$ order continuity. Further, if μ is null-additive and order continuous, then it is strongly order continuous.

3 The Alexandroff theorem

In this section, we give successful analogues of the Alexandroff theorem [1, Theorem 5, Chapter 3, §9] for compact, Riesz space-valued non-additive measures.

Definition 5 Let $\mu : \mathcal{F} \to V$ be a non-additive measure.

1. A non-empty family $\mathcal{K}$ of subsets of X is called a *compact system* if, for any sequence $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{K}$ with $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$, there is $n_0 \in \mathbb{N}$ such that $\bigcap_{n=1}^{n_0} K_n = \emptyset$ [15].
2. We say that μ is *compact* if there is a compact system $\mathcal{K}$ such that, for each $A \in \mathcal{F}$, there are sequences $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{K}$ and $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ such that $B_n \subset K_n \subset A$ for all $n \in \mathbb{N}$ and $\mu(A - B_n) \to 0$.

Remark 1 (1) The family of all compact subsets of a Hausdorff space is a compact system.

(2) The family of all finite unions of sets in a compact system is also compact [18, Lemma 1.4]. Therefore, in (2) of the above definition, the compact system $\mathcal{K}$ and the sequences $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ and $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ may be chosen so that $\mathcal{K}$ is closed for finite unions and $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ and $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ are both increasing.

(3) Our definition of the compactness of μ is stronger than that of [5, Definition 1]. In fact, they coincide if V is a Dedekind σ-complete, weakly σ-distributive, order separable Riesz space.

Theorem 1 Let $\mu : \mathcal{F} \to V$ be a non-additive measure. Assume that V has the weak asymptotic Egoroff property. If μ is compact and autocontinuous, then it is continuous from above and below.

The following theorem asserts that the Alexandroff theorem is also valid for any compact and uniformly autocontinuous, Riesz space-valued non-additive measure when the Riesz space is weakly σ-distributive.

Theorem 2 (cf. [5, 19]) Let V be Dedekind σ-complete and $\mu : \mathcal{F} \to V$ a non-additive measure. Assume that V is weakly σ-distributive. If μ is compact and uniformly autocontinuous, then it is continuous from above and below.

4 Radon non-additive measures

In this section, we give some properties of Radon non-additive measures and establish a close connection to their continuity. Let S be a Hausdorff space. Denote by $\mathcal{B}(S)$ the σ-field of all Borel subsets of S, that is, the σ-field generated by the open subsets of S. A non-additive measure defined on $\mathcal{B}(S)$ is called a *Borel non-additive measure on S*.

Definition 6 Let μ be a V-valued Borel non-additive measure on S.

1. μ is said to be *regular* if, for each $A \in \mathcal{B}(S)$, there are sequences $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ of closed sets and $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ of open sets such that $F_n \subset A \subset G_n$ for all $n \in \mathbb{N}$ and $\mu(G_n - F_n) \to 0$ as $n \to \infty$.

2. μ is said to be Radon if, for each $A \in \mathcal{B}(S)$, there are sequences $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ of compact sets and $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ of open sets such that $K_n \subset A \subset G_n$ for all $n \in \mathbb{N}$ and $\mu(G_n - K_n) \to 0$ as $n \to \infty$.

3. μ is said to be tight if there is a sequence $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ of compact sets such that $\mu(S - K_n) \to 0$ as $n \to \infty$.

Remark 2 Sequences of sets in the above definition may be chosen so that $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ is decreasing, while $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ and $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ are increasing.

Proposition 2 Let S be a Hausdorff space. Let μ be a V-valued Borel non-additive measure on S which is weakly null-additive and strongly order continuous. Then, the following two conditions are equivalent:

(i) μ is Radon.

(ii) μ is regular and tight.

Remark 3 Proposition 2 remains valid for every V-valued Borel non-additive measure on S satisfying a weaker condition that $\mu(A_n \cup B_n) \to 0$ for any decreasing sequences $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ and $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ of sets of $\mathcal{F}$ with $\mu(A_n) \to 0$ and $\mu(B_n) \to 0$. This condition is slightly weaker than the pseudometric generating property which was introduced in [3].

Since the family of all compact subsets of a Hausdorff space is a compact system, the compactness of a non-additive measure follows from its Radonness. Thus, by Theorems 1 and 2 we have

Theorem 3 Let S be a Hausdorff space. Let μ be a V-valued Borel non-additive measure on S.

(1) Assume that V has the weak asymptotic Egoroff property. If μ is Radon and autocontinuous, then μ is continuous from above and below.

(2) Assume that V is Dedekind σ-complete and weakly σ-distributive. If μ is Radon and uniformly autocontinuous, then μ is continuous from above and below.

Recall that a fuzzy measure is a non-additive measure which is continuous from above and below. Recently, Li and Yasuda [12, Theorem 1] proved that every weakly null-additive, real-valued fuzzy measure on a metric space is regular. The following is its Riesz space version and has been proved in [9, Theorem 2]

Theorem 4 Let S be a metric space. Assume that V has the multiple Egoroff property. Then, every weakly null-additive, V-valued fuzzy Borel measure on S is regular.

It is known that every finite Borel measure on a complete or locally compact, separable metric space is Radon; see [17, Theorem 3.2] and [21, Theorems 6 and 9, Chapter II, Part I]. Its counterpart in non-additive measure theory can be found in [13, Theorem 1 and Lemma 2], which states that every Borel fuzzy measure on a complete separable metric space is tight, so that it is Radon if it is null-additive; see also [25, Theorem 2.3]. The following two theorems contain those previous results; see also [6, Theorem 12].

Theorem 5 Let S be a complete separable metric space. Assume that V has the multiple Egoroff property. Then, every V-valued fuzzy Borel measure on S is tight, so that it is Radon if it is weakly null-additive.

To prove the theorem, we need the following Riesz space version of [13, Lemma 1] which can be proved in a similar way of [9, Lemma 1] thanks to the multiple Egoroff property of the Riesz space V.

Lemma 1 Let $(X, \mathcal{F})$ be a measurable space and $\mu : \mathcal{F} \to V$ a fuzzy measure. Assume that V has the multiple Egoroff property. For any double sequence $\{A_{m,n}\}_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ of sets of $\mathcal{F}$ with the property that, for each $m \in \mathbb{N}$, $A_{m,n} \downarrow \emptyset$ as $n \to \infty$, there is a sequence $\{\theta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ of elements of Θ such that

$$\mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_{m,\theta_k(m)}\right) \to 0 \quad \text{as } k \to \infty.$$

Further, the sequence $\{\theta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ may be chosen so that it is increasing.

In the case that S is locally compact we have the following result:

Theorem 6 Let S be a locally compact, separable metric space. Assume that V has the multiple Egoroff property. Then, every weakly null-additive, V-valued fuzzy Borel measure on S is Radon.

We end by establishing a close connection between Radonness and continuity of non-additive measures. The following result generalizes Theorems 2.3 and 3.2 of [25].

Theorem 7 Let S be a complete or locally compact, separable metric space. Let μ be an autocontinuous, V-valued Borel non-additive measure on S. Assume that V has the multiple Egoroff property. Then, the following two conditions are equivalent:

(i) μ is Radon.

(ii) μ is continuous from above and below.

参考文献

[1] A.D. Alexandroff, Additive set-functions in abstract spaces, Mat. Sbornik U.S. 9 (51) (1941) 563–628.

[2] D. Denneberg, Non-Additive Measure and Integral, second ed., Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.

[3] I. Dobrakov, J. Farkov¶a, On submeasures II, Math. Slovaca 30 (1980) 65{81.

[4] D.H. Fremlin, A direct proof of the Matthes-Wright integral extension theorem, J. London Math. Soc. (2) 11 (1975) 276{284.

[5] E. Hrachovina, A generalization of the Kolmogorov consistency theorem for vector measures, Acta Math. Univ. Comenian. 54-55 (1988) 141{145.

[6] J. Kawabe, Uniformity for weak order convergence of Riesz space-valued measures, Bull. Austral. Math. Soc. 71 (2005) 265{274.

[7] J. Kawabe, The Egoro® theorem for non-additive measures in Riesz spaces, Fuzzy Sets and Systems 157 (2006) 2762{2770.

[8] J. Kawabe, The Egoro® property and the Egoro® theorem in Riesz space-valued non-additive measure theory, Fuzzy Sets and Systems 158 (2007) 50{57.

[9] J. Kawabe, Regularity and Lusin's theorem for Riesz space-valued fuzzy measures, Fuzzy Sets and Systems 158 (2007) 895{903.

[10] J. Kawabe, The Alexandro® theorem for Riesz space-valued non-additive measures, Fuzzy Sets and Systems 158 (2007) 2413{2421.

[11] J. Li, Order continuous of monotone set function and convergence of measurable functions sequence, Appl. Math. Comput. 135 (2003) 211{218.

[12] J. Li, M. Yasuda, Lusin's theorem on fuzzy measure spaces, Fuzzy Sets and Systems 146 (2004) 121{133.

[13] J. Li, M. Yasuda, J. Song, Regularity properties of null-additive fuzzy measure on metric spaces, in: V. Torra, Y. Narukawa and S. Miyamoto, (Ed.), Lecture Notes in Arti¯cial Intelligence 3558, Springer, Berlin, 2005 59{66.

[14] W.A.J. Luxemburg, A.C. Zaanen, Riesz Spaces I, North-Holland, Amsterdam, 1971.

[15] E. Marczewski, On compact measures, Fund. Math. 40 (1953) 113{124.

[16] E. Pap, Null-Additive Set Functions, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.

[17] K.R. Parthasarathy, Probability Measures on Metric Spaces, Academic Press, New York, 1967.

[18] J. Pfanzagl, W. Pierlo, Compact Systems of Sets, Lecture Notes in Math. 16, Springer, New York, 1966.

[19] J. Riečan, On the Kolmogorov consistency theorem for Riesz space valued measures, Acta Math. Univ. Comenian. 48-49 (1986) 173{180.

[20] B. Riečan, T. Neubrunn, Integral, Measure, and Ordering, Kluwer Academic Publishers, Bratislava, 1997.

[21] L. Schwartz, Radon Measures on Arbitrary Topological Spaces and Cylindrical Measures, Oxford University Press, 1973.

[22] P. Volauf, Alexandrov and Kolmogorov consistency theorem for measures with values in partially ordered groups, Tatra Mt. Math. Publ. 3 (1993) 237{244.

[23] Z. Wang, G.J. Klir, Fuzzy Measure Theory, Plenum Press, New York, 1992.

[24] J.D.M. Wright, The measure extension problem for vector lattices, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 21 (1971), 65{85.

[25] C. Wu, M. Ha, On the regularity of the fuzzy measure on metric fuzzy measure spaces, Fuzzy Sets and Systems 66 (1994) 373{379.

[26] J. Wu, C. Wu, Fuzzy regular measures on topological spaces, Fuzzy Sets and Systems 119 (2001) 529{533.

関数環の群における写像を多元環としての同形写像に拡張できる条件について

新潟大学自然科学研究科　　新藤　瑠美

本報告は，山形大学三浦毅先生と新潟大学の本間大さんとの共同研究を基にしてまとめたものである。

以下，X, Y を compact Hausdorff 空間とする。A, B を X, Y 上の関数環をとし，A, B の可逆元全体からなる積に関する群をそれぞれ A^{-1}, B^{-1} とする。

定義 1 関数環 A の任意の元 f に対して

$$\sigma(f) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ f - \lambda \text{ が可逆でない}\}$$

$$\sigma_\pi(f) = \{\lambda \in \sigma(f);\ |\lambda| = \|f\|\}$$

と定義する。$\sigma(f)$ は f のスペクトルで，$\sigma_\pi(f)$ は $\sigma(f)$ の部分集合である。また，A の Choquet 境界を $\mathrm{Ch}(A)$ とし，Choquet 境界 $\mathrm{Ch}(A)$ の任意の元 t に対して

$$P_{A^{-1}}(t) = \{u \in A^{-1};\ \sigma_\pi(u) = \{1\},\ u(t) = 1\}$$

$$W_t = \{f \in A^{-1};\ |f(t)| = 1 = \|f\|\}$$

とする。$P_{A^{-1}}(t)$ は空でない W_t の部分集合である。

Hatori, Miura and Takagi [2, Theorem 5.12] から，次がわかる：

定理 1 (Hatori, Miura and Takagi [2])
A^{-1} から B^{-1} への写像 T が全射で更に以下を満たすものとする。

1. 定数関数 $\lambda = 1, i$ に対して $T(\lambda) = \lambda$ を満たす。
2. A^{-1} のすべての元 f, g に対して $\|T(f)T(g) - 1\| = \|fg - 1\|$ が成り立つ。

このとき，$\mathrm{Ch}(B)$ から $\mathrm{Ch}(A)$ への同相写像 φ が存在して，A^{-1} の任意の元 f に対して $\mathrm{Ch}(B)$ 上で $T(f) = f \circ \varphi$ が成り立つ。

ここで定理 1 において，A の任意の元 f に対して $I_{\mathrm{Ch}(A)}(f) = f|_{\mathrm{Ch}(A)}$ と定義する。$\mathrm{Ch}(A)$ は A の境界であることから，$I_{\mathrm{Ch}(A)}$ は A から $A|_{\mathrm{Ch}(A)} = \{f|_{\mathrm{Ch}(A)} : f \in A\}$ への多元環としての同形写像である。A から B への写像 S を，A の任意の元 f に対して

$$S(f) = I_{\mathrm{Ch}(B)}^{-1}\left(\left(I_{\mathrm{Ch}(A)}(f)\right) \circ \varphi\right)$$

とすると，S は T の拡張で，多元環としての同形写像である。

また，定理１の条件を満たす T において，A^{-1} の任意の元 f, g に対して

$$\|T(g)T(g^{-1}) - 1\| = \|gg^{-1} - 1\| = 0$$

より $T(g)^{-1} = T(g^{-1})$ がわかり，以下の式

$$\left\|\frac{T(f)}{T(g)} - 1\right\| = \left\|\frac{f}{g} - 1\right\| \tag{1}$$

が示される。

さらに，A, B にそれぞれ involution$*, \star$ が定義されているとき，A^{-1} から B^{-1} への全射 T が A^{-1} の任意の元 f, g に対して

$$\|T(f)T(g)^{\star} - 1\| = \|fg^{*} - 1\|$$

を満たすとき，

$$\|T(g)T((g^{-1})^{*})^{\star} - 1\| = \|g((g^{-1})^{*})^{*} - 1\| = 0$$

より $T(g)^{-1} = T((g^{-1})^{*})^{\star}$ がわかり，

$$\left\|\frac{T(f)}{T(g)} - 1\right\| = \|T(f)T((g^{-1})^{*})^{\star} - 1\| = \|f((g^{-1})^{*})^{*} - 1\| = \left\|\frac{f}{g} - 1\right\|$$

であるから (1) が示される。

よってこの条件 (1) を考えることによって，定理１の

$$\|T(f)T(g) - 1\| = \|fg - 1\| \quad (f, g \in A^{-1})$$

を満たす A^{-1} から B^{-1} への全射 T と同時に

$$\|T(f)T(g)^{\star} - 1\| = \|fg^{*} - 1\| \quad (f, g \in A^{-1})$$

を満たす A^{-1} から B^{-1} への全射 T を併せて考えることが出来る。そこで,「定理１の２の代わりに等式 (1) を仮定して結論を導けないか？」を考える。

ここで，ある０でない複素数 α について

$$\left\|\frac{T(f)}{T(g)} - \alpha\right\| = \left\|\frac{f}{g} - \alpha\right\| \quad (f, g \in A^{-1})$$

が成り立てば，$\|T(\alpha f)/T(f) - \alpha\| = \|(\alpha f)/f - \alpha\| = 0$ から $T(\alpha f) = \alpha T(f)$ がわかり，等式 (1) が成り立つことがわかる。したがって，同様な議論によって

$$\|T(f)T(g) - \alpha\| = \|fg - \alpha\| \quad (f, g \in A^{-1})$$

を満たす A^{-1} から B^{-1} への全射 T と同時に

$$\|T(f)T(g)^{\star} - \alpha\| = \|fg^{*} - \alpha\| \quad (f, g \in A^{-1})$$

を満たす A^{-1} から B^{-1} への全射 T を決定するには等式 (1) を満たす A^{-1} から B^{-1} への全射 T について考えれば十分である。(前者についてはHatori, Miura and Takagi によって証明された可換 Banach 環の結果 [2, Corollary 5.18] を，特に関数環の場合に適用することで既に T の形がわかっていた。)

まず，特に A を X 上の複素数値連続関数全体からなる Banach 環 $C(X)$，同様に B を $C(Y)$ としたとき，以下の結果が得られた。

定理 2 (Miura, Honma, and S. [3; Theorem 1.2])
$C(X)^{-1}$ から $C(Y)^{-1}$ への写像 T が全射で更に次を満たすものとする。

1. 定関数 $\pm 1, \pm i$ に対して $T(\lambda) = \lambda$ が成り立つ。
2. $C(X)^{-1}$ の任意の元 f, g に対して $\left\| \frac{T(f)}{T(g)} - 1 \right\| = \left\| \frac{f}{g} - 1 \right\|$ が成り立つ。

このとき，Y から X への同相写像 φ が存在し，$T(f) = f \circ \varphi$ が $C(X)^{-1}$ の任意の元 f に対して成り立つ。

また，この結果を関数環の場合の結果に拡張できることも分かった。ここで，定理 1 の条件 1 では定数関数の固定が $\lambda = 1, i$ の２点であったのに対して，定理 2 では条件 1 として $\lambda = \pm 1, \pm i$ の４点を固定している。定理 1 では $T(-1) = -1$ が証明の中で示され，更に $T(i) = i$ から $\|iT(-i) - 1\| = \|i(-i) - 1\| = 0$ より $T(-i) = -i$ がすぐにわかった。一方，条件 (1) を満たす T では $T(-1) = -1$ と $T(-i) = -i$ を導けるかどうかが当初わからなかった。そのため，まず手始めとして $T(-1) = -1$ と $T(-i) = -i$ を更に仮定として付け加えた状態で定理 2 は証明されている。

しかしその後，定理 1 の証明を少し変えることで $T(-1) = -1$ と $T(-i) = -i$ が導けることがわかった。更に，固定する２つの定関数は $1, i$ に限らず，1 と実数でない任意の α_0 を固定しても同じ形の結論を導けることがわかった。得られた結果は以下である：

定理 3 (Miura, Honma, and S. [4; Theorem 1.1])
A^{-1} から B^{-1} への写像 T が全射でが全射で更に

1. $T(1) = 1$ とある実数でない定関数 α_0 に対して $T(\alpha_0) = \alpha_0$ が成り立つ。
2. A^{-1} の任意の元 f, g に対して $\left\| \frac{T(f)}{T(g)} - 1 \right\| = \left\| \frac{f}{g} - 1 \right\|$ が成り立つ。

このとき，$Ch(B)$ から $Ch(A)$ への同相写像 φ が存在し，A^{-1} の任意の元 f に対して $Ch(B)$ 上で $T(f) = f \circ \varphi$ が成り立つ。

(**証明の概略**) 定理 2, 3 の φ の構成法は定理 1 と同様である。以下簡単に述べる。$Ch(B)$ の任意の元 y に対して $x_y \in \bigcap_{f \in T^{-1}(W_y)} |f|^{-1}(1)$ が唯一つ存在する。そこで $\varphi(y) \overset{\mathrm{def}}{=} x_y$ と定義する。この φ は全単射で任意の A^{-1} の元 f と $Ch(B)$ の元 y に対して $|T(f)(y)| = |f(\varphi(y))|$ が成り立つ。そこから更に φ が同相写像であることがわかる。

以下 $S^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$, $\lambda = 1, \alpha_0$ とする。条件 1, 2 より任意の $\beta \in S^1$ に対して，

$$\|T(\beta) - \lambda\| = |\lambda| \left\| \frac{T(\beta)}{\lambda} - 1 \right\| = |\lambda| \left\| \frac{T(\beta)}{T(\lambda)} - 1 \right\| = |\lambda| \left\| \frac{\beta}{\lambda} - 1 \right\| = |\beta - \lambda|$$

がわかる。これを用いて $T(\lambda P_{A^{-1}}(\phi(y))) = \lambda P_{B^{-1}}(y)$ が導かれ，更に

$$T(-\lambda) = -\lambda$$

が成り立つ。これを用いて

$$\|T(\beta) + \lambda\| = |\lambda| \left\| \frac{T(\beta)}{-\lambda} + 1 \right\| = |\lambda| \left\| \frac{T(\beta)}{T(-\lambda)} - 1 \right\| = |\lambda| \left\| \frac{\beta}{-\lambda} - 1 \right\| = |\beta + \lambda|$$

であるから，$|T(\beta)| = |\beta| = 1$，$\|T(\beta) - \lambda\| = |\beta - \lambda|$ とあわせて $T^{-1}(\beta)$ の値域は $\{\beta, \bar{\beta}(\lambda/|\lambda|)^2\}$ に含まれることがわかる。$\lambda = 1$ の場合と $\lambda = \alpha_0$ の場合をそれぞれ考えると α_0 は実数でないことから 任意の $\beta \in S^1$ に対して $T(\beta) = \beta$ が成り立つ。これを用いて任意の $y \in Ch(B)$，$\beta \in S^1$ に対して $T(\beta P_{A^{-1}}(\phi(y))) = \beta P_{B^{-1}}(y)$ が示される。

任意の $f \in A^{-1}; y \in Ch(B)$ をとり固定する。$\beta \in S^1$ を特に $\beta = -\dfrac{f(\phi(y))}{|T(f)(y)|}$ とする。Bishop の定理 [1, Theorem 2.4.1] から $\sigma(U/T(f)) = \{1/T(f)(y)\}$ を満たすある $P_{B^{-1}}(y)$ の元 U が存在することがわかる。また，$T(\beta P_{A^{-1}}(\phi(y))) = \beta P_{B^{-1}}(y)$ から $T(\beta u) = \beta U$ となる $P_{A^{-1}}(\phi(y))$ の元 u が存在する。これを用いて

$$\left\| \frac{\beta U}{T(f)} - 1 \right\| \leq \frac{1}{|T(f)(y)|} + 1; \quad \left\| \frac{\beta U}{T(f)} \right\| \leq \frac{1}{|T(f)(y)|}$$

が導かれる。よって $(\beta U/T(f))(y_0) = -1/|T(f)(y)|$ となる $y_0 \in Y$ が存在する。$\sigma(U/T(f)) = \{1/T(f)(y)\}$ より，$(U/T(f))(y_0) = 1/T(f)(y)$ である。以上より

$$-\frac{1}{|T(f)(y)|} = \frac{\beta U}{T(f)}(y_0) = \beta \frac{U}{T(f)}(y_0) = -\frac{f(\phi(y))}{|T(f)(y)|} \frac{1}{T(f)(y)}$$

が成り立つ。従って $T(f)(y) = f(\phi(y))$ である。 $\square$

本研究集会発表後に，定数関数を固定する条件を仮定しないで T の形が決定できた [5, Theorem 3.1]。

参考文献

[1] A. Browder, Introduction to function algebras, W.A. Benjamin, 1969.

[2] O. Hatori, T. Miura and H. Takagi, Multiplicatively spectrum-preserving and norm-preserving maps between invertible groups of commutative Banach algebras, preprint.

[3] T. Miura, D. Honma, and R. Shindo, Weakly $\ast$-multiplicative surjections between commutative Banach algebras with involutions, preprint.

[4] T. Miura, D. Honma, and R. Shindo, Divisibly norm-preserving maps between uniform algebras, submitted.

[5] T. Miura, D. Honma, and R. Shindo, Divisibly norm-preserving maps between commutative Banach algebras, submitted.

可換 Banach 環の可逆元全体とある種のノルム保存写像

山形大学大学院理工学研究科　　三浦　毅 (Takeshi Miura)

1　導 入

近年，Banach 環上のある種のスペクトルを保存する写像の研究が盛んに行われている．本稿ではこれまでの結果を振り返るとともに，我々が得た最近の結果について報告する．なお本研究内容は新潟大学大学院自然科学研究科博士課程の本間 大君，新藤 瑠美さんとの共同研究により得られたものである．

以下では $C(X)$, $C(Y)$ によりコンパクト Hausdor® 空間 X, Y 上の複素数値連続関数全体がなす可換 Banach 環を表す．また A, B により X, Y 上の関数環を表す．さらに A, B を単位的半単純可換 Banach 環とし，M_A, M_B をそれぞれ A, B の極大イデアル空間とする．

Theorem A ([13, Theorem 5])　X を第一可算コンパクト Hausdor® 空間とする．線形とも連続とも限らない全射 $T : C(X) \to C(X)$ が次の条件をみたすとする：

$$T(1) = 1 \quad \text{and} \quad \sigma(T(f)T(g)) = \sigma(fg) \qquad (\forall f, g \in C(X))$$

ただし $\sigma(f)$ は $f \in C(X)$ のスペクトルである．このとき同相写像 $\varphi : X \to X$ が存在して

$$T(f)(x) = f(\varphi(x)) \qquad (\forall f \in C(X), x \in X)$$

が成り立つ．

MonIn¶r [13] 自身は \T(1) = 1"を仮定せずに同様の結果を得ているが，スペクトルに関する条件より $T(1)^2 = 1$ となることが容易に分かるので，$T/T(1)$ に Theorem A を適用したものに過ぎない．このように $T(1) = 1$ の場合が本質的であるので，この仮定を追加した結果を MoIn¶r の定理と呼ぶことにする．また同様の理由から，以下では $T(1) = 1$ の場合について述べることにする．

2　これまでの研究

Theorem A に触発され，この結果を拡張する試みが数多く成されてきた．Hatori, Miura and Takagi [1] は $T : A \to B$ が

$$T(1) = 1 \quad \text{and} \quad \mathrm{Ran}(T(f)T(g)) = \mathrm{Ran}(fg) \qquad (\forall f, g \in A)$$

をみたせば，同相写像 $\varphi : \mathrm{Ch}(B) \to \mathrm{Ch}(A)$ が存在して

$$T(f)(y) = f(\varphi(y)) \qquad (\forall f \in A, y \in \mathrm{Ch}(B)) \tag{$*$}$$

となることを示した．ただし $\mathrm{Ran}(f)$ は f の値域とし，また $\mathrm{Ch}(A)$ は A の Choquet 境界とする．これとは独立に，Rao and Roy [14] は類似の結果を得ているが，彼らは若干特殊な場合を考えている（実際，Rao and Roy は $A = B$ で，さらに $A \subset C(X)$ の極大イデアル空間が X である場合に同様の結果を得ている）．

その後 Lutman and Tonev [9] は値域に関する条件を弱め，値域の特定の一部が保存されれば同様の結果が得られることを示した．実際，次のようである．$T : A \to B$ が

$$T(1) = 1 \quad \text{and} \quad \mathrm{Ran}_\pi(T(f)T(g)) = \mathrm{Ran}_\pi(fg) \qquad (\forall f, g \in A)$$

をみたせば，同相写像 $\varphi : \mathrm{Ch}(B) \to \mathrm{Ch}(A)$ が存在して $(*)$ が成り立つ．ただし $f \in A$ に対して

$$\mathrm{Ran}_\pi(f) = \{z \in \mathrm{Ran}(f) : |z| = \|f\|_\infty\}; \qquad \|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

である．$\mathrm{Ran}_\pi(f)$ は f の peripheral range と呼ばれる．まったく同様にして f の peripheral spectrum $\sigma_\pi(f)$ も定義されるが，$f \in A$ に対しては $\mathrm{Ran}_\pi(f) = \sigma_\pi(f)$ であることが分かる（[9, Lemma 1] 参照）．

Molnár の結果を拡張する試みは関数環の間の写像に対してなされ，さらにスペクトル全体ではなく，その最遠点である peripheral spectrum に必要な情報が集約されていることが分かったのである．それでは，さらに情報を減らして同様の結果を得ることが可能であろうか．この疑問に対する１つの解答は次の形で与えられた．$T : A \to B$ が

$$T(1) = 1 \quad \text{and} \quad \|T(f)T(g) - 1\|_\infty = \|fg - 1\|_\infty \qquad (\forall f, g \in A)$$

をみたせば，同相写像 $\varphi : \mathrm{Ch}(B) \to \mathrm{Ch}(A)$ が存在して $(*)$ が成り立つ．

この様に $C(X)$ の間の写像に対する研究は，関数環の間の写像に一般化されるとともに，等距離同型写像となるための十分条件はスペクトルに始まりノルムに対する条件へと弱められてきた．他方で関数環をさらに一般化して，可換 Banach 環の間の写像に対する研究も同時期に行われてきた．Hatori, Miura and Takagi [2] は $T : A \to B$ が

$$T(1) = 1 \quad \text{and} \quad \sigma(T(f)T(g)) = \sigma(fg) \qquad (\forall f, g \in A)$$

をみたせば，同相写像 $\varphi : M_B \to M_A$ が存在して

$$\widehat{T(f)}(y) = \hat{f}(\varphi(y)) \qquad (\forall f \in A) \tag{$**$}$$

が成り立つことを示した．ここに $\hat{f}$ は f の Gelfand 変換である．

関数環の間の写像が等距離同型写像となるための十分条件は，スペクトルではなくノルムに関する性質で与えられたことを思い出せば，より一般の可換 Banach 環の場合でも同様の結果が成り立つことが期待される．しかしながら筆者の知る限りではノルムの性質から写像の形を決定する結果は得られていない．これは可換 Banach 環の場合でも，関数環に議論を持ち込んで，関数環

で用いた手法を適用する，という証明手法が原因であると考えている．しかし Hatori, Miura and Takagai [3] は，ノルムではないがスペクトル半径に関する条件により類似の結果を得ている．実際，次を示した．$T : A \to B$ が

$$T(1) = 1; T(i) = i \quad \text{and} \quad r(T(f)T(g) - 1) = r(fg - 1) \qquad (\forall f, g \in A)$$

をみたせば，同相写像 $\varphi : M_B \to M_A$ が存在して (**) が成り立つ．

他方で Molnár [13] は $C(X)$ の対合である複素共役を考慮して，Theorem A と類似の結果を得ている．

Theorem B ([13, Theorem 6]) X を第一可算コンパクト Hausdorff 空間とする．全射 $T : C(X) \to C(X)$ が次の条件をみたすとする：

$$T(1) = 1 \quad \text{and} \quad \sigma(T(f)\overline{T(g)}) = \sigma(f\bar{g}) \qquad (\forall f, g \in C(X))$$

ただし $\bar{f}$ は $f \in C(X)$ の複素共役である．このとき同相写像 $\varphi : X \to X$ が存在して

$$T(f)(x) = f(\varphi(x)) \qquad (\forall f \in C(X); x \in X)$$

が成り立つ．

Theorem B の仮定にある複素共役は，可換 Banach 環の世界では対称な対合と考えることができる．ただし A の対合 $*$ が対称であるとは $\forall f \in A$ に対して $\widehat{f^*} = \overline{\hat{f}}$ となることである．Hatori, Miura and Takagi [2] は，Theorem B を対称な対合をもつ可換 Banach 環に対する結果へと拡張し次を示した．A, B はそれぞれ対称な対合 $*$, $\star$ をもつとする．$T : A \to B$ が

$$T(1) = 1 \quad \text{and} \quad \sigma(T(f)T(g)^{\star}) = \sigma(fg^*) \qquad (\forall f, g \in A)$$

をみたせば，同相写像 $\varphi : M_B \to M_A$ が存在して (**) が成り立つ．この結果は，これまでの結果を考えれば，スペクトルの条件をノルムの条件に置き換えても成り立つことが期待される．実際，Miura, Honma and Shindo [10] は $T : A \to B$ が

$$T(\lambda) = \lambda \ (\lambda \in \{\pm 1, \pm i\}) \quad \text{and} \quad \|T(f)T(g)^{\star} - 1\|_{\infty} = \|fg^* - 1\|_{\infty} \qquad (\forall f, g \in A)$$

をみたせば (**) が成り立つような同相写像 $\varphi : M_B \to M_A$ が存在することを示した．

これら以外にも Theorem A, B を拡張する結果は知られている．例えば単位元をもつとは限らない場合の研究がある．この方面の研究については参考文献 [4, 5, 7, 15] を参照されたい．

3 主結果

Molnár [13] の結果に始まる一連の研究成果を見つめ直すと，可換 Banach 環が対合をもつ場合とそうでない場合が独立に調べられているにもかかわらず，結果はほぼ同じであるだけでなく，その証明手法も同じであるように見える．この様な観点から言うと，対合をもつ場合ももたない場合も同時に取り扱うことが出来るような理論あるいは手法が隠されているのではないか，と考え

ることは自然である．実際，Hatori, Miura and Takagi [3] や Honma [7] などを比較すれば直ちに分かるように，Molnár の導入したスペクトルの条件

$$\sigma(T(f)T(g)) = \sigma(fg); \qquad \sigma(T(f)\overline{T(g)}) = \sigma(f\overline{g})$$

の共通点は,「積」という演算ではなく「商」なのである．ただし，ここでいう「商」とは，A の可逆元全体の集合を A^{-1} とするとき，fg^{-1} $(f \in A; g \in A^{-1})$ のことである．以下では fg^{-1} を f/g などと表すことにする．

それでは何故「商」が現れるのかを見てみよう．いま $T: A \to B$ が

$$r(T(f)T(g) - 1) = r(fg - 1); \quad \text{or} \quad r(T(f)T(g)^{\star} - 1) = r(fg^{*} - 1)$$

をみたすとする．簡単のため $f^{\sharp} = f$, or f^{*} とする．さらに $\star$ についても同様に $T(f)^{\sharp} = T(f)$, or $T(f)^{\star}$ とする．この記法により混乱が生じることはないであろう．この記号を用いれば

$$r(T(f)T(g)^{\sharp} - 1) = r(fg^{\sharp} - 1) \qquad (\forall f; g \in A)$$

が成り立つことになる．ここで $g \in A^{-1}$ を考え，特に f として $1/g^{\sharp} \in A^{-1}$ とすると

$$r(T(1/g^{\sharp})T(g)^{\sharp} - 1) = r(1/g^{\sharp}g^{\sharp} - 1) = 0$$

であるから $T(1/g^{\sharp})T(g)^{\sharp} = 1$ を得る．つまり $T(1/g^{\sharp})^{\sharp}T(g) = 1$ である．言い換えると，$g \in A^{-1}$ のとき $T(g) \in B^{-1}$ で，さらに $1/T(g) = T(1/g^{\sharp})^{\sharp}$ となる．以上より

$$\begin{aligned} r\left(\frac{T(f)}{T(g)} - 1\right) &= r\left(T(f)\frac{1}{T(g)} - 1\right) = r\left(T(f)T(1/g^{\sharp})^{\sharp} - 1\right) \\ &= r(f(1/g^{\sharp})^{\sharp} - 1) = r\left(\frac{f}{g} - 1\right) \end{aligned}$$

を得る．この様にして積の形から商の形に変えることにより，対象は可逆元に限定されてしまうが，対合を別に扱う必要はなくなるのである．さらに商を用いることにより，対合に仮定されていた「対称性」は必要ないことが分かる．実際，次が得られた．

Theorem 1 A, B を単位的半単純可換 Banach 環とし，A^{-1}, B^{-1} をそれぞれ A, B の可逆元全体のなす集合とする．このとき全射 $T: A^{-1} \to B^{-1}$ が

$$T(\lambda) = \lambda \ (\lambda = 1; i); \quad \text{and} \quad r\left(\frac{T(f)}{T(g)} - 1\right) = r\left(\frac{f}{g} - 1\right) \qquad (\forall f; g \in A^{-1})$$

をみたせば，次が成り立つような同相写像 $\varphi: M_B \to M_A$ と全射 $S: \mathrm{cl}(\widehat{A}) \to \mathrm{cl}(\widehat{B})$ が存在する．

$$S(\widehat{f}) = \widehat{T}(f) \qquad (\forall f \in A^{-1})$$
$$S(a)(y) = a(\varphi(y)) \qquad (\forall a \in \mathrm{cl}(\widehat{A}); y \in M_B)$$

ただし $\mathrm{cl}(\widehat{A})$, $\mathrm{cl}(\widehat{B})$ はそれぞれ A, B の Gelfand 変換像 $\widehat{A} \subset C(M_A)$, $\widehat{B} \subset C(M_B)$ の一様閉包である．

Corollary 2 ([3][Theorem 7)] A, Bを単位的半単純可換Banach環とする．このとき全射$T: A \to B$が

$$T(\lambda) = \lambda \ (\lambda = 1; i); \quad \text{and} \quad r(T(f)T(g) - 1) = r(fg - 1) \qquad (\forall f, g \in A)$$

をみたせば，同相写像 $\varphi: M_B \to M_A$ が存在して

$$\widehat{T(f)}(y) = \hat{f}(\varphi(y)) \qquad (\forall f \in A; y \in M_B)$$

が成り立つ．

Corollary 3 A, Bを単位的半単純可換Banach環で，それぞれ（対称とは限らない）対合$*$, $\star$をもつとする．このとき全射$T: A \to B$が

$$T(\lambda) = \lambda \ (\lambda = 1; i); \quad \text{and} \quad r(T(f)T(g)^{\star} - 1) = r(fg^{*} - 1) \qquad (\forall f, g \in A)$$

をみたせば，同相写像 $\varphi: M_B \to M_A$ が存在して

$$\widehat{T(f)}(y) = \hat{f}(\varphi(y)) \qquad (\forall f \in A; y \in M_B)$$

が成り立つ．

「積」を「商」に変えても，これまでの手法がほとんどそのまま適用できることは容易に分かるので，Theorem 1の証明はHatori, Miura and Takagi [3]のそれを書き直したに過ぎない．しかしそこからCorollary 2,3が比較的簡単に得られることは興味深く思われる．詳細は[12]をご覧頂きたい．

参考文献

[1] O. Hatori, T. Miura and H. Takagi, Characterizations of isometric isomorphisms between uniform algebras via nonlinear range-preserving property, Proc. Amer. Math. Soc., 134 (2006), 2923–2930.

[2] O. Hatori, T. Miura and H. Takagi, Unital and multiplicatively spectrum-preserving surjections between semi-simple commutative Banach algebras are linear and multiplicative, J. Math. Anal. Appl. 321 (2007), 281–296.

[3] O. Hatori, T. Miura and H. Takagi, Multiplicatively spectrum-preserving and norm-preserving maps between invertible groups of commutative Banach algebras, submitted.

[4] O. Hatori, T. Miura and H. Oka, An example of multiplicatively spectrum-preserving maps between non-isomorphis semi-simple commutative Banach algebras, Nihonkai Math. J. 18 (2007), 11–15.

[5] O. Hatori, T. Miura, H. Oka and H. Takagi, Peripheral multiplicativity of maps on uniformly closed algebras of continuous functions which vanish at infinity, submitted.

[6] D. Honma, Norm-preserving surjections on algebras of continuous functions, to appear in Rocky Mountain J. Math.

[7] D. Honma, Surjections on the algebras of continuous functions which preseve peripheral spectrum, Contemp. Math. 435 (2007), 199{205.

[8] S. Lambert, A. Luttman and T. Tonev, Weakly peripherally-multiplicative operators between uniform algebras, Contemp. Math., 435 (2007), 265{281.

[9] A. Luttman and T. Tonev, Uniform algebra isomorphisms and peripheral multiplicativity, Proc. Amer. Math. Soc., 135 (2007), 3589{3598.

[10] T. Miura, D. Honma and R. Shindo, Weakly ¤-multiplicative surjections between commutative Banach algebras with involutions, preprint.

[11] T. Miura, D. Honma and R. Shindo, Divisibly norm-preserving maps between uniform algebras, submitted.

[12] T. Miura, D. Honma and R. Shindo, Divisibly norm-preserving maps between commutative Banach algebras, submitted.

[13] L. Moln¶r, Some characterizations of the automorphisms of $B(H)$ and $C(X)$, Proc. Amer. Math. Soc., 130 (2001), 111{120.

[14] N. V. Rao and A. K. Roy, Multiplicatively spectrum-preserving maps of function algebras, Proc. Amer. Math. Soc., 133 (2005), 1135{1142.

[15] N. V. Rao and A. K. Roy, Multiplicatively spectrum-preserving maps of function algebras. II, Proc. Edinburgh Math. Soc., 48 (2005), 219{229.