平成18年度関数環研究集会報告集

平成20年5月

平成18年度の関数環研究集会は，平成18年12月2日と12月3日の2日間岩手医科大学教養部にて開催されました。大勢の皆様にご参加いただき九つの講演を行われました。ご講演くださった皆様はじめご参加くださいました皆様，岩手医科大学の飯田安保先生はじめ関係者の皆様に御礼申し上げます。

さて，平成18年度の関数環研究集会でご講演いただきました皆様より報告集のための原稿をお書きいただきましたので，ここに取りまとめて報告集といたします。

世話人　新潟大学理学部　羽鳥　理

関数環研究集会プログラム

下記の要領で平成18年度の関数環研究集会を開催いたしますので，ご案内申し上げます。

世話人　新潟大学理学部　羽鳥　理
〒950-2181　新潟市五十嵐2の町8050 新潟大学理学部
TEL と FAX 025-262-6127
e-mail　hatori@math.sc.niigata-u.ac.jp
会場責任者　岩手医科大学教養部　飯田　安保
〒020-0015　岩手県盛岡市本町通3-16-1
TEL　019-651-5110　内線5120
FAX 019-629-9118
e-mail　yiida@iwate-med.ac.jp

記

期日：平成18年12月2日(土) 午後1時30分〜12月3日(日)午後0時10分
場所：岩手医科大学教養部　102講義室
電話：019-651-5111（内5120　飯田研究室)
URL：　http://www.iwate-med.ac.jp/

プログラム

12月2日(土)

座長：飯田　安保

[1]　13:30〜14:00　細川　卓也　（日本工業大学（非常勤））
「Differences of weighted composition operators on the Bloch spaces」

座長：飯田　安保

[2]　14:20～14:50　植木　誠一郎　（日本工業大学（非常勤））
「Hardy 空間上の荷重合成作用素」

座長：高木　啓行

[3]　15:20～15:50　平澤　剛　（東京電機大学工学部）
「Sobolev 空間の complement について」

座長：山本　隆範

[4]　16:10～16:40　瀬戸　道生　（神奈川大学工学部数学教室）
「ねじれユニタリ同型による Hardy submodule の分類」

座長：山本　隆範

[5]　17:00～17:20　林　実樹廣　（北海道大学理学研究院）
「シロフ境界と極値問題の一意性」

12月3日（日）

座長：丹羽　典朗

[6]　9:30～10:00　高木　啓行　（信州大学理学部）
「シフト作用素の一般化について(仮題)」

座長：丹羽　典朗

[7]　10:15～10:45　本間　大　（新潟大学大学院自然科学研究科 D2）
「ある Banach 環の間の積のノルムを保存する写像について」

座長：平澤　剛

[8]　11:00～11:30　三浦　毅　（山形大学工学部）
「可換 Banach 環上のある種のノルムを保存する写像」

座長：平澤　剛

[9]　11:40～12:10　羽鳥　理　（新潟大学自然科学系）
「Banach 環とその可逆元からなる群」

Differences of weighted composition operators on the Bloch space

細川 卓也 (Takuya Hosokawa)

1 Introduction

単位開円板 $\mathbb{D}$ 上の正則関数全体を $H(\mathbb{D})$ とし，D の正則自己写像全体を $S(\mathbb{D})$ とする．$u \in H(\mathbb{D})$ と $\varphi \in S(\mathbb{D})$ に対し，荷重合成作用素 $uC_\varphi : f \mapsto u \cdot f \circ \varphi$ は $H(\mathbb{D})$ からそれ自身への線形作用素である．uC_φ は掛け算作用素 M_u と合成作用素 C_φ の積である．Bloch 空間 $\mathcal{B}$ は，$f \in H(\mathbb{D})$ で

$$\|\!|f|\!\| = \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|f'(z)| < \infty.$$

を満たす関数全体から成る Banach 空間で，そのノルムは

$$\|f\|_{\mathcal{B}} = |f(0)| + \|\!|f|\!\|$$

で与えられる．

作用素ノルムを位相とする合成作用素の全体の空間の位相構造は，Shapiro-Sundberg [8] によって H^2 上で研究されたのが最初であったが，完全な解決には至っていない．H^∞ 上の位相構造については，MacCluer-大野-Zhao [6] によって 2 つの合成作用素の差 $C_\varphi - C_\psi$ の compact 性と連結成分の特徴付けが，細川-泉池-Zheng [3] によって端点の特徴付けが与えられた．[6] では，$C_\varphi - C_\psi$ の compact 性が C_φ と C_ψ が同じ連結成分に属する為の十分条件であること，及び，C_φ と C_ψ が同じ連結成分に属することが $C_\varphi - C_\psi$ が $\mathcal{B}$ から H^∞ への作用素として有界であることと同値であることが示されている．$\mathcal{B}$ 上の位相構造については，[4] で $C_\varphi - C_\psi$ の compact 性が特徴付けられている．また，[5] と [9] では連結成分や端点について，いくつかの結果が得られている．一方で，$\mathcal{B}$ 上の荷重合成作用素については，大野-Zhao [7] でその有界性と compact 性が特徴付けられている．荷重合成作用素全体の成す位相空間の位相構造については，[2] で H^∞ 上の場合に研究され，2 つの荷重合成作用素の差 $uC_\varphi - vC_\psi$ の compact 性が与えられている．以下では，[7] と [4] の結果の一般化に対応する $uC_\varphi - vC_\psi$ の $\mathcal{B}$ 上での有界性と compact 性についての結果を紹介する．

2 Prerequisites

$\mathbb{D}$ の 2 点 z，w の擬双曲距離を $\rho(z,w) = |z-w|/|1-\bar{z}w|$ とし，双曲計量を

$$\beta(z,w) = \frac{1}{2}\log\frac{1+\rho(z,w)}{1-\rho(z,w)}$$

とする．このとき，$\beta(z,w) = \sup\{|f(z)-f(w)| : \|\!| f \|\!| \le 1\}$ である．さらに Bloch 型の induced distance $\flat(z,w)$ を

$$\flat(z,w) = \sup_{\|\!| f \|\!| \le 1} |(1-|z|^2)f'(z) - (1-|w|^2)f'(w)|$$

とする．このとき，$\flat(z,w)$ と $\rho(z,w)$ について，次が成り立つ．

Proposition 2.1 *[4]* ある定数 $M>0$ により，任意の $z,w \in \mathbb{D}$ に対して，

$$\rho(z,w)^2 \le \flat(z,w) \le M\rho(z,w).$$

$\mathcal{B}$ 上での C_φ や uC_φ の多くの性質は次の Schwarz-Pick 型の微分 $\varphi^\#$ によって記述される．

$$\varphi^\#(z) = \frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}\,\varphi'(z).$$

このとき，Schwarz-Pick の補題から $\|\varphi^\#\|_\infty \le 1$ である．また，Bloch 関数の増大度について，ある定数 $M>0$ によって，任意の $f \in \mathcal{B}$ に対して，次が成り立つ．

$$|f(w)| \le M\,\|f\|_{\mathcal{B}}\,\log\frac{e}{1-|w|^2}.$$

以下では，荷重関数 $u, v \in H(\mathbb{D})$ や $\rho(\varphi(z),\psi(z))$ と $\beta(\varphi(z),\psi(z))$ について，

$$U(z) = (1-|z|^2)\,u'(z), \quad V(z) = (1-|z|^2)\,v'(z)$$

$$\rho(z) = \rho(\varphi(z),\psi(z)), \quad \beta(z) = \beta(\varphi(z),\psi(z))$$

とする．また，$\mathbb{D}$ の点列 $\{z_n\}$ について，$\varphi_n = \varphi(z_n)$，$\psi_n = \psi(z_n)$ とする．β_n, ρ_n についても同様とする．

3 有界性について

$uC_\varphi - vC_\psi$ の $\mathcal{B}$ 上での有界性について考える．以下では M はそれぞれ適当な正の定数とする．

$$\begin{aligned}\|uC_\varphi - vC_\psi\|_{\mathcal{B}} &= \sup_{\|f\|_{\mathcal{B}}\le 1}\Big(\|\!|\,(uC_\varphi - vC_\psi)\,f\|\!| + |u(0)\,f(\varphi(0)) - v(0)\,f(\psi(0))|\Big) \\ &\le \sup_{\|f\|_{\mathcal{B}}\le 1}\|\!|\,(uC_\varphi - vC_\psi)\,f\|\!| + |u(0)|\,\beta(\varphi(0),\psi(0)) \\ &\qquad + |u(0)-v(0)|\,\log\frac{e}{1-|\psi(0)|^2}.\end{aligned}$$

であるので，$uC_\varphi - vC_\psi$ が有界であることと，$\sup\{\|\!|\,(uC_\varphi - vC_\psi)\,f\|\!| : \|f\|_{\mathcal{B}} \le 1\} < \infty$ が同値である．ここで $\|f\|_{\mathcal{B}} \le 1$ として，

$$\begin{aligned}\|\!|(uC_\varphi - vC_\psi)f\|\!| &= \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|u'(z)\,f(\varphi(z)) + u(z)\,\varphi'(z)\,f'(\varphi(z)) \\ &\qquad - v'(z)\,f(\psi(z)) - v(z)\,\psi'(z)\,f'(\psi(z))| \\ &\le \sup_{z\in\mathbb{D}}|u\,\varphi^\#\,(1-|\varphi|^2)\,f'(\varphi) - v\,\psi^\#\,(1-|\psi|^2)\,f'(\psi)| \\ &\qquad + \sup_{z\in\mathbb{D}}|U(z)\,f(\varphi(z)) - V(z)\,f(\psi(z))|.\end{aligned}$$

各項は次の様に評価される.

$$\begin{aligned}
&\sup_{z\in\mathbb{D}} |u(z)\,\varphi^{\#}(z)\,(1-|\varphi|^2)\,f'(\varphi) - v(z)\,\psi^{\#}(z)\,(1-|\psi|^2)\,f'(\psi)| \\
&\qquad \le \sup_{z\in\mathbb{D}} |u(z)\,\varphi^{\#}(z) - v(z)\,\psi^{\#}(z)|(1-|\varphi|^2)|f'(\varphi)| + \sup_{z\in\mathbb{D}} |v(z)\,\psi^{\#}(z)|\,\flat(\varphi,\psi) \\
&\qquad \le \sup_{z\in\mathbb{D}} \quad |u(z)\,\varphi^{\#}(z) - v(z)\,\psi^{\#}(z)| + M \sup_{z\in\mathbb{D}} |v(z)\,\psi^{\#}(z)|\,\rho(z).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sup_{z\in\mathbb{D}} |U(z)\,f(\varphi) - V(z)\,f(\psi)| &\le \sup_{z\in\mathbb{D}} |U(z)-V(z)|\,|f(\varphi)| + \sup_{z\in\mathbb{D}} |V(z)|\ |f(\varphi)-f(\psi)| \\
&\le M \sup_{z\in\mathbb{D}} |U(z)-V(z)|\ \log\frac{e}{1-|\varphi|^2} + \sup_{z\in\mathbb{D}} |V(z)|\ \beta(z).
\end{aligned}$$

$L(z)$ を次で定義する.

$$\begin{aligned}
(3.1) \qquad L(z) \;=\; \mathrm{Min}\Bigg\{ &\left(|U(z)|\ \log\frac{e}{1-|\varphi(z)|^2} + |V(z)|\ \log\frac{e}{1-|\psi(z)|^2}\right), \\
&\left(|U(z)-V(z)|\ \log\frac{e}{1-|\varphi(z)|^2} + |V(z)|\,\beta(z)\right), \\
&\left(|U(z)-V(z)|\ \log\frac{e}{1-|\psi(z)|^2} + |U(z)|\,\beta(z)\right)\Bigg\}.
\end{aligned}$$

このとき，次の十分条件を得る.

Proposition 3.1 $\varphi,\psi \in S(\mathbb{D})$ と u, v *be in* $H(\mathbb{D})$ に対して，次の３条件が成り立つとき $uC_\varphi - vC_\psi$ は $\mathcal{B}$ 上で有界である.

(i) $\sup_{z\in\mathbb{D}} \left|u(z)\,\varphi^{\#}(z) - v(z)\,\psi^{\#}(z)\right| < \infty$.

(ii) $\sup_{z\in\mathbb{D}} |u(z)\,\varphi^{\#}(z)|\,\rho(z) < \infty$, $\sup_{z\in\mathbb{D}} |v(z)\,\psi^{\#}(z)|\,\rho(z) < \infty$.

(iii) $\sup_{z\in\mathbb{D}} L(z) < \infty$.

Möbius 変換やそのベキ乗をテスト関数として，次の必要条件を得る.

Proposition 3.2 $\varphi,\psi \in S(\mathbb{D})$ と u, v *be in* $H(\mathbb{D})$ に対して，$uC_\varphi - vC_\psi$ が $\mathcal{B}$ 上で有界であるなら，次が成り立つ.

(i) $\sup_{z\in\mathbb{D}} \left|u(z)\,\varphi^{\#}(z) + v(z)\,\psi^{\#}(z)\right|\ \rho(z) < \infty$.

(ii) $\sup_{z\in\mathbb{D}} |u(z)\,\varphi^{\#}(z)|\,\rho(z)^2 < \infty$, $\sup_{z\in\mathbb{D}} |v(z)\,\psi^{\#}(z)|\,\rho(z)^2 < \infty$.

単位円周の近くの挙動を考えるために，次の様な点列の集合を考える.

Definition 3.3 $\{z_n\}$ を $\mathbb{D}$ の点列とする.

(i) $G_{u,\varphi}$ は，$|z_n| \to 1$ で $|u(z_n)\,\varphi^{\#}(z_n)| \to \infty$ を満たす $\{z_n\}$ の成す集合とする.

(ii) $D_{u,\varphi}$ は，$|z_n| \to 1$ で

$$|U(z_n)|\ \log\frac{e}{1-|\varphi_n|^2} \to \infty$$

を満たす $\{z_n\}$ の成す集合とする.

ここで，uC_φ が $\mathcal{B}$ 上で有界であることと，$G_{u,\varphi} = D_{u,\varphi} = \emptyset$ は同値である.（Corollary 3.6）

以下では，次の仮定の下で $uC_\varphi - vC_\psi$ の有界性を特徴付ける．

$$\text{(A)} \qquad \sup_{z\in\mathbb{D}} |U(z)|\,\rho(z) < \infty, \quad \sup_{z\in\mathbb{D}} |V(z)|\,\rho(z) < \infty.$$

(A) は u, v が Bloch 関数であれば成り立つ．

Theorem 3.4 $\varphi, \psi \in S(\mathbb{D})$ と u, v *be in* $H(\mathbb{D})$ に対して，(A) が成り立っているとする．このとき，$uC_\varphi - vC_\psi$ が $\mathcal{B}$ 上で有界であることと，次の 6 条件が成り立つことが同値である．

(i) $G_{u,\varphi} = G_{v,\psi}$

(ii) $\sup_{z\in\mathbb{D}} |u(z)\,\varphi^{\#}(z) - v(z)\,\psi^{\#}(z)| < \infty.$

(iii) $\sup_{z\in\mathbb{D}} |u(z)\,\varphi^{\#}(z)|\,\rho(z) < \infty,\ \sup_{z\in\mathbb{D}} |v(z)\,\psi^{\#}(z)|\,\rho(z) < \infty.$

(iv) $D_{u,\varphi} = D_{v,\psi}.$

(v) 任意の $\{z_n\} \in D_{u,\varphi}$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty} |U(z_n) - V(z_n)|\,\log \frac{e}{1-|\varphi_n|^2} = \lim_{n\to\infty} |U(z_n) - V(z_n)|\,\log \frac{e}{1-|\psi_n|^2} < \infty.$$

(vi) 任意の $\{z_n\} \in D_{u,\varphi}$ に対して，$\lim_{n\to\infty} |U(z_n)|\,\beta_n < \infty,\ \lim_{n\to\infty} |V(z_n)|\,\beta_n < \infty.$

Remark 3.5 条件 *(v)* については，$\{z_n\} \in D_{u,\varphi}$ に対して次が成り立つ．

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} |U(z_n) - V(z_n)|\,\log \frac{e}{1-|\varphi_n|^2} &= \lim_{n\to\infty} |U(z_n) - V(z_n)|\,\log \frac{e}{1-|\psi_n|^2} \\
= \lim_{n\to\infty} |U(z_n) - V(z_n)|\,\log \frac{e}{1-\overline{\varphi_n}\psi_n} &= \lim_{n\to\infty} \left| U(z_n)\,\log \frac{e}{1-|\varphi_n|^2} - V(z_n)\ \log \frac{e}{1-|\psi_n|^2} \right|.
\end{aligned}$$

ここで $\varphi = \psi$，$w(z) = u(z) - v(z)$ とおくと，荷重合成作用素 wC_φ の有界性の特徴付けを得る．

Corollary 3.6 *(大野-Zhao [7])* $\varphi \in S(\mathbb{D})$ と $w(z) \in \mathcal{B}$ に対して，wC_φ が $\mathcal{B}$ 上で有界である為の必要十分条件は，

(i) $\sup_{z\in\mathbb{D}} |w(z)\,\varphi^{\#}(z)| < \infty.$

(ii) $\sup_{|\varphi(z)|\to 1} (1-|z|^2)|w(z)|\,\log \frac{e}{1-|\varphi(z)|^2} < \infty$.

Example 3.7 $h(z) = (1+z)/(1-z)$ とし，$S(z) = \exp(-h(z))$ とする．勝手な多項式 $p(z)$ を固定する．荷重関数を $u(z) = S(z) + p(z)$ と $v(z) = S(z) - p(z)$ で定める．さらに $\varphi(z) = (h(z)^{1/2} - 1)(h(z)^{1/2} + 1)$ とし，$\psi(z) = 1 - \sqrt{2(1-z)}$ とする．このとき，uC_φ と vC_ψ は共に $\mathcal{B}$ 上で有界ではないが，$uC_\varphi - vC_\psi$ は有界である．

4 コンパクト性について

コンパクト性については，以下の Lemma が有用である．

Lemma 4.1 $\varphi,\psi\in S(\mathbb{D})$ と u,v *be in* $H(\mathbb{D})$ に対して，次は互いに同値である．

(i) $uC_\varphi - vC_\psi$ は $\mathcal{B}$ 上でコンパクト．．
(ii) 任意の 0 に広義一様収束する $\mathcal{B}$ の有界列 $\{f_n\}$ に対して，$\|(uC_\varphi - vC_\psi)f_n\|_{\mathcal{B}}\to 0$.
(iii) 任意の 0 に広義一様収束する $\mathcal{B}$ の有界列 $\{f_n\}$ に対して，$\|\!|(uC_\varphi - vC_\psi)f_n\|\!|\to 0$.

$G_{u,\varphi}$，$D_{u,\varphi}$ と同様に次の点列の集合を定義する．

Definition 4.2 $\{z_n\}$ を $\mathbb{D}$ の点列とする．

(i) $\Gamma_{u,\varphi}$ は，$|\varphi_n|\to 1$ で $|u(z_n)\varphi^{\#}(z_n)|\not\to 0$ を満たす $\{z_n\}$ の成す集合とする．
(ii) $\Delta_{u,\varphi}$ は，$|\varphi_n|\to 1$ で

$$|U(z_n)|\,\log\frac{e}{1-|\varphi_n|^2}\not\to 0.$$

を満たす $\{z_n\}$ の成す集合とする．

uC_φ が $\mathcal{B}$ 上でコンパクトであることと $\Gamma_{u,\varphi}=\Delta_{u,\varphi}=\emptyset$ は同値である．(Corollary 4.4)
以下では，次の仮定の下で $uC_\varphi - vC_\psi$ の有界性を特徴付ける．

$$\text{(B)}\qquad \text{If } \rho_n\to 0,\quad |U(z_n)|\,\rho_n\to 0\quad\text{and}\quad |V(z_n)|\,\rho_n\to 0.$$

(B) は u,v が Bloch 関数であれば成り立つ．

Theorem 4.3 $\varphi,\psi\in S(\mathbb{D})$ と u,v *be in* $H(\mathbb{D})$ に対して，(B) が成り立っているとする．また，$uC_\varphi - vC_\psi$ が $\mathcal{B}$ 上で有界であり，uC_φ と vC_ψ は共にコンパクトでないとする．このとき，$uC_\varphi - vC_\psi$ が $\mathcal{B}$ 上でコンパクトであることと，次の 6 条件が成り立つことが同値である．

(i) $\Gamma_{u,\varphi}=\Gamma_{v,\psi}$.
(ii) 任意の $\{z_n\}\in\Gamma_{u,\varphi}$ に対して，$\lim\limits_{n\to\infty}|u(z_n)\varphi^{\#}(z_n)-v(z_n)\psi^{\#}(z_n)|=0$.
(iii) 任意の $\{z_n\}\in\Gamma_{u,\varphi}$ に対して，$|u(z_n)\,\varphi^{\#}(z_n)|\,\rho_n\to 0$，$|v(z_n)\,\psi^{\#}(z_n)|\,\rho_n\to 0$.
(iv) $\Delta_{u,\varphi}=\Delta_{v,\psi}$.
(v) 任意の $\{z_n\}\in\Delta_{u,\varphi}$ に対して，
$|U(z_n)-V(z_n)|\,\log\dfrac{e}{1-|\varphi_n|^2}\to 0$，$|U(z_n)-V(z_n)|\,\log\dfrac{e}{1-|\psi_n|^2}\to 0$.
(vi) 任意の $\{z_n\}\in\Delta_{u,\varphi}$ に対して，$|U(z_n)|\,\beta_n\to 0$，$|V(z_n)|\,\beta_n\to 0$.

Corollary 3.6 と同様に次を得る．

Corollary 4.4 *(大野-Zhao [7])* $\varphi\in S(\mathbb{D})$ と $w(z)\in\mathcal{B}$ に対して，wC_φ は $\mathcal{B}$ 上で有界であるとする．このとき，wC_φ が $\mathcal{B}$ 上でコンパクトである為の必要十分条件は，

(i) $\sup\limits_{|\varphi_n|\to 1}\lim\limits_{n\to\infty}|w(z_n)\,\varphi^{\#}(z_n)|=0$.
(ii) $\sup\limits_{|\varphi_n|\to 1}\lim\limits_{n\to\infty}(1-|z_n|^2)|w(z_n)|\,\log\dfrac{e}{1-|\varphi_n|^2}=0$.

Example 4.5 $h(z) = (1+z)/(1-z)$ とし，$\varphi(z) = (h(z)^{1/2} - 1)(h(z)^{1/2} + 1)$ とする．また，$\psi(z) = 1 - \sqrt{2(1-z)}$ とする．荷重関数については，$u(z) = z+1$，$v(z) = z^2 + z$ とする．このとき，uC_φ と vC_ψ は共に $\mathcal{B}$ 上でコンパクトでないが，$uC_\varphi - vC_\psi$ はコンパクトである．

荷重関数について，$u = v = 1$ とすると，次の系を得る．

Corollary 4.6 *(細川-大野 [4])* $\varphi, \psi \in S(\mathbb{D})$ に対して，C_φ と C_ψ は共に $\mathcal{B}$ 上でコンパクトでないとする．このとき，$C_\varphi - C_\psi$ が $\mathcal{B}$ 上でコンパクトとなる為の必要十分条件は，

(i) $\Gamma_{1,\varphi} = \Gamma_{1,\psi}$.
(ii) 任意の $\{z_n\} \in \Gamma_{1,\varphi}$ に対して，$\lim_{n\to\infty} |\varphi^{\#}(z_n) - \psi^{\#}(z_n)| = \lim_{k\to\infty} \varphi^{\#}(z_n)\rho_n = \lim_{k\to\infty} \psi^{\#}(z_n)\rho_n = 0$.

参考文献

[1] T. Hosokawa, *Differences of weighted composition operators on the Bloch spaces*, preprint.

[2] T. Hosokawa, K. Izuchi and S. Ohno, *Topological structure of the space of weighted composition operators on H^∞*, *Integral Equations and Operator Theory* **53** (2005), 509–526.

[3] T. Hosokawa, K. Izuchi and D. Zheng, *Isolated points and essential components of composition operators on H^∞*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **130** (2002), 1765–1773.

[4] T. Hosokawa and S. Ohno, *Differences of composition operators on the Bloch spaces*, *J. Operator Theory* to appear.

[5] T. Hosokawa and S. Ohno, *Topological structure of the sets of composition operators on the Bloch spaces*, *J. Math. Anal. Appl.* **314** (2006), 736–748.

[6] B.D. MacCluer, S. Ohno and R. Zhao, *Topological structure of the space of composition operators on H^∞*, *Integral Equations and Operator Theory* **40** (2001), 481–494.

[7] S. Ohno and R. Zhao, *Weighted composition operators on the Bloch space*, *Bull. Austral. Math. Soc.* **63** (2001), 177–185.

[8] J.H. Shapiro and C. Sundberg, *Isolation amongst the composition operators*, *Pacific J. Math.* **145**(1990), 117–152.

[9] C. Toews, *Topological Structures on Sets of Composition Operators*, Thesis, Univ. of Virginia, 2002.

Hardy 空間上の荷重合成作用素

植木誠一郎 (Sei-Ichiro Ueki)*1

B を $\mathbb{C}^N$ の単位球, $H(B)$ を B 上の解析関数の全体とする. $u \in H(B)$ と正則写像 $\varphi : B \to B$ に対して, uC_φ を次のように定義する:

$$(uC_\varphi)f(z) = u(z) \cdot (f \circ \varphi)(z) \qquad (f \in H(B),\ z \in B).$$

明らかに, $uC_\varphi : H(B) \to H(B)$ は線形作用素である. この作用素 uC_φ は**荷重合成作用素 (*weighted composition operator*)** と呼ばれ, 最近では Hardy 空間を中心に様々な解析関数空間上で, 多くの研究者によって活発に研究がなされている. また, $u(z) = 1$ の場合には, uC_φ は合成作用素 C_φ であり, $\varphi(z) = z$ の場合には, uC_φ は乗法作用素 M_u である.

本研究では, 次の問題を考察する：

問題　$uC_\varphi : H^p(B) \to H^q(B)$ $(0 < p,\ q < \infty)$ が有界作用素およびコンパクト作用素になるための, u と φ の満たすべき条件を求めよ.

ここで, $p,\ q$ の大小関係により Hardy 空間の間には次のような包含関係が成立することに注意しよう.

$$\begin{aligned} p \le q \qquad &\Longrightarrow \qquad H^q(B) \subset H^p(B), \\ p > q \qquad &\Longrightarrow \qquad H^p(B) \subset H^q(B). \end{aligned}$$

したがって, uC_φ は $p \le q$ の場合には, より小さな Hardy 空間への作用素となり, $q < p$ の場合には, より大きな Hardy 空間への作用素となる. ゆえに, uC_φ の有界性およびコンパクト性の特徴付けを与えるために, 2 つの場合:

(i)　$0 < p \le q < \infty$ の場合,

(ii)　$0 < q < p < \infty$ の場合

を考えることになる.

同じような問題が, $N = 1$ の場合には研究がなされており, それらをここに紹介しておく. ただし, 以下では H^p $(0 < p < \infty)$ は単位円板 $\mathbb{D}$ 上で定義される Hardy 空間を表すことにする.

合成作用素 C_φ についての結果

合成作用素 C_φ についての上記問題は, R. Riedl ($p \le q$ の場合) と T. Goebeler ($p > q$ の場合) により研究がなされている. まず, $0 < p \le q < \infty$ の場合であるが, これは R. Riedl が 1994

*1 e-mail : sueki@camel.plala.or.jp

年の学位論文の中で扱っている．Riedl は C_φ の有界性とコンパクト性の特徴付けをするのに Nevanlinna の counting function を用いた.

Theorem 1 ([5])**.** $0 < p \le q < \infty$ とする.

(a) $C_\varphi : H^p \to H^q$ が有界作用素であるための必要十分条件は

$$N_\varphi(w) = O\left(\left[\log\left(\frac{1}{|w|}\right)\right]^{\frac{q}{p}}\right) \quad (|w| \to 1^-).$$

(b) $C_\varphi : H^p \to H^q$ がコンパクト作用素であるための必要十分条件は

$$N_\varphi(w) = o\left(\left[\log\left(\frac{1}{|w|}\right)\right]^{\frac{q}{p}}\right) \quad (|w| \to 1^-).$$

ただし, $N_\varphi(w)$ は Nevanlinna の counting function である:

$$N_\varphi(w) = \sum_{z \in \varphi^{-1}\{w\}} \log\left(\frac{1}{|z|}\right), \quad w \in \mathbb{D} \setminus \{\varphi(0)\}.$$

Theorem 1 (b) は J. Shapiro[6] により得られた特徴付けの拡張でもある．Shapiro は C_φ の H^2 上でのコンパクト性を特徴付けるのに Nevanlinna の counting function を利用したが, その証明にはノルムの評価のために Littlewood-Paley の等式が利用される．Riedl は Shapiro のこの証明法を $C_\varphi : H^p \to H^q$ の有界性を特徴付けるのに応用している．この Riedl による結果は, その後 W. Smith により単位円板上の Bergman 空間の間に作用する合成作用素, Hardy 空間と Bergman 空間の間に作用する合成作用素の有界性とコンパクト性へと一般化がなされた．それらの結果の詳細については, [7] を参照されたい.

次に $0 < q < p < \infty$ の場合の結果であるが, こちらは T. Goebeler によって 2001 年に特徴付けがなされている.

Theorem 2 ([3])**.** $0 < q < p < \infty$ とする．$C_\varphi : H^p \to H^q$ がコンパクト作用素であるための必要十分条件は,

$$\sigma\left(\{\zeta \in \mathbb{T} : |(\varphi)^*(\zeta)| = 1\}\right) = 0$$

である.

ここで, σ は単位円 $\mathbb{T}$ 上の正規化された Lebesgue 測度である.

Goebeler の結果はコンパクト性の特徴付けのみであるが, $q < p$ の場合には, 全ての正則写像 $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ による合成作用素は必ず有界作用素になるからである．それは Littlewood の Subordination 定理により, Hardy 空間 H^p 上の合成作用素は有界作用素であることと, $q < p$ の

場合の包含関係：$H^p \subset H^q$ から従う.

<u>荷重合成作用素 uC_φ についての結果</u>

荷重合成作用素 uC_φ に関する研究は, M.D. Contreras と A.G. Hernández-Díaz による一連の研究 [1, 2] がある．特に, [2] の研究では異なる Hardy 空間の間に作用する荷重合成作用素の有界性とコンパクト性の特徴付けをしている．彼らの特徴付けは u と φ により定義される「ある測度」が Carleson 型測度の条件を満たすことで実現している.

$u \in H^q$ と $\varphi \in H(\mathbb{D})$ $(\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D})$ に対して, 閉円板 $\overline{\mathbb{D}}$ 上の正値 Borel 測度 $\mu_{u,\varphi}$ を次のように定義する：

$$\mu_{u,\varphi}(E) = \int_{\varphi^{-1}(E)} |u|^q d\sigma \qquad (E : \overline{\mathbb{D}} \text{ の Borel 可測集合}).$$

このように定義される測度に対しては「変数変換の公式」により, 次の等式が成立する：

$$\int_{\overline{\mathbb{D}}} g d\mu_{u,\varphi} = \int_{\mathbb{T}} |u|^q g \circ \varphi d\sigma.$$

この等式において, g として $|f|^q$ を考えると右辺は $uC_\varphi f$ の H^q-ノルムとなる．この理由のために, u と φ によって定められる pull-back 測度は荷重合成作用素（および合成作用素）の研究において重要な役割を果たしてきた.

Theorem 3 ([2])**.** $1 \leq p \leq q < \infty$ とする.

(a) $uC_\varphi : H^p \to H^q$ が有界作用素であるためには, $\mu_{u,\varphi}$ が $\frac{q}{p}$-Carleson 測度であることが必要十分条件である.

(b) $uC_\varphi : H^p \to H^q$ がコンパクト作用素であるためには, $\mu_{u,\varphi}$ が $\frac{q}{p}$-vanishing Carleson 測度であることが必要十分条件である.

論文 [2] では, $1 \leq p \leq q < \infty$ となっているが, 実際には $\boldsymbol{0 < p \leq q < \infty}$ でも正しいことがわかる．また, [2, p.174 と p.181 の Remark] で述べられているように, Contreras と Hernández-Díaz は $0 < q < p < \infty$ の場合の

- $uC_\varphi : H^p \to H^q$ の有界性
- $uC_\varphi : H^p \to H^q$ のコンパクト性

の特徴付けには至らなかった．その後も, 上記問題については未解決のままである.

<u>**多変数への拡張**</u>

さて, 異なる Hardy 空間の間に作用する荷重合成作用素の有界性及びコンパクト性を多変数の場合への拡張を試みてみる．多変数への拡張を手助けするのは, u と φ の定める pull-back 測度である．$u \in H^q(B)$ と正則写像 $\varphi : B \to B$ に対して,

$$\mu_{u,\varphi}(E) = \int_{(\varphi^*)^{-1}(E)} |u^*|^q d\sigma \qquad (E : \overline{B} \text{ の Borel 可測集合})$$

とする．ここで, u^* は $u \in H^q(B)$ の radial limit である．また, $\overline{B}$ の Carleson 集合 $S(\zeta, t)$ を次のように定める．

$$S(\zeta, t) = \left\{ z \in \overline{B} : |1 - \langle z, \zeta \rangle| < t \right\} \qquad (\zeta \in S,\ t > 0).$$

これらの記号を用いて単位球上の Hardy 空間における uC_φ の有界性とコンパクト性の特徴付けについて述べていく．まず, $0 < p \le q < \infty$ の場合であるが, こちらは 2005 年に次の形で得られた．

Theorem A ([8]). $0 < p \le q < \infty$ とする．このとき, 次の 3 条件は同値である：

(a) $uC_\varphi : H^p(B) \to H^q(B)$ は有界である．

(b) $$\sup_{t>0,\ \zeta \in S} \frac{\mu_{u,\varphi}(S(\zeta, t))}{t^{qN/p}} < \infty.$$

(c) $$\sup_{w \in B} \int_S |u^*(\zeta)|^q \left\{ \frac{1 - |w|^2}{|1 - \langle \varphi^*(\zeta), w \rangle|^2} \right\}^{\frac{qN}{p}} d\sigma(\zeta) < \infty.$$

条件 (b) は $\mu_{u,\varphi}$ が $\frac{qN}{p}$-Carleson 測度であることを意味している．uC_φ のコンパクト性については, 次の特徴付けが得られた．

Theorem B ([8]). $0 < p \le q < \infty$ とする．このとき, 次の 3 条件は同値である：

(a) $uC_\varphi : H^p(B) \to H^q(B)$ はコンパクトである．

(b) $$\lim_{t \to 0^+} \sup_{\zeta \in S} \frac{\mu_{u,\varphi}(S(\zeta, t))}{t^{qN/p}} = 0.$$

(c) $$\lim_{|w| \to 1^-} \int_S |u^*(\zeta)|^q \left\{ \frac{1 - |w|^2}{|1 - \langle \varphi^*(\zeta), w \rangle|^2} \right\}^{\frac{qN}{p}} d\sigma(\zeta) = 0.$$

条件 (b) は $\mu_{u,\varphi}$ が $\frac{qN}{p}$-vanishing Carleson 測度であることを意味している．Theorem A, Theorem B の何れも Contreras と Hernández-Díaz による結果の拡張である．

また, コンパクト作用素と関わりの深いものとして, 作用素の本質ノルム (essential norm) がある．よく知られているように, 作用素のコンパクト性はその本質ノルムが 0 という条件で特徴付けることができ, 様々な作用素の本質ノルムの研究がなされている．例えば, H^2 上の合成作用素 C_φ の本質ノルムについては Shapiro[6] により研究がなされている．したがって, 上記 Theorem B に現れる条件 (b), (c) と uC_φ の本質ノルムとの関係が気になるところである．最近の研究により, 確かにそれらの間には関係があることが判明し, 条件 (b) と (c) の左辺の極限をそれぞれ上極限にしたものと uC_φ の本質ノルムとがお互いに比較可能 (comparable) であることまでわかっている．uC_φ の本質ノルムとそれらの上極限値が等号で結ばれるかどうかはわかっていない．

Contreras と Hernández-Díaz により提起されていた $q < p$ の場合については, 最近になり著者達の研究 [4] により次に紹介する結果が得られた．まず, uC_φ の有界性についての特徴付けは以下のようである．この場合の有界性の特徴付けにも u と φ による pull-back 測度が有効に働いて

いる.

Theorem C ([4]). $0 < q < p < \infty$ とする. このとき, 次の 3 条件は同値である：

(a) $uC_\varphi : H^p(B) \to H^q(B)$ は有界である.

(b) $K_{\mu_{u,\varphi}}(\zeta) = \sup_{t>0} \dfrac{\mu_{u,\varphi}(S(\zeta,t))}{t^N}$ とおくとき, $K_{\mu_{u,\varphi}} \in L^s(S, d\sigma)$.

(c) $I_\varphi(w) = \sup_{0<t<1} \displaystyle\int_S |u^*(\zeta)|^q \left\{ \frac{1-t^2}{|1 - \langle \varphi^*(\zeta), tw \rangle|^2} \right\}^N d\sigma(\zeta)$ とおくとき, $I_\varphi \in L^s(S, d\sigma)$.

ただし, s は $\dfrac{1}{s} + \dfrac{q}{p} = 1$ を満たす正の数である.

uC_φ のコンパクト性は以下のように特徴付けることができた. この結果は, 先に述べた Goebeler による C_φ のコンパクト性の特徴付けの結果の拡張でもある. (しかしながら, 単位球の場合には p と q に若干の制限が必要ではある.)

Theorem D ([4]). $1 < p < \infty$, $1 \le q < p < \infty$ とする. $uC_\varphi : H^p(B) \to H^p(B)$ が有界であるとき, 次の 2 条件は同値である：

(a) $uC_\varphi : H^p(B) \to H^q(B)$ がコンパクトである.

(b) $\sigma\left(\{\zeta \in S : |(\varphi)^*(\zeta)| = 1\}\right) = 0$.

付記: Theorem C と Theorem D の結果は University of Science and Technology of China の L.Luo 助教授との共同研究による結果である.

References

[1] M. D. Contreras and A. G. Hernández-Díaz, *Weighted composition operators on Hardy spaces*, J. Math. Anal. Appl., **263** (2001), 224–233.

[2] M. D. Contreras and A. G. Hernández-Díaz, *Weighted composition operators between different Hardy spaces*, Integral Equations Operator Theory, **46** (2003), 165–188.

[3] T. Goebeler, *Composition operators acting between Hardy spaces*, Integral Equations Operator Theory, **41** (2001), 389–395.

[4] L. Luo and S. Ueki, *Weighted composition operators between weighted Bergman spaces and Hardy spaces on the unit ball of C^n*, J. Math. Anal. Appl., **326** (2007), 88–100.

[5] R. Riedl, *Composition operators and geometric properties of analytic functions*, Thesis, Universität Zurich (1994).

[6] J. Shapiro, *The essential norm of a composition operator*, Ann. of Math., **125** (1987), 375–404.

[7] W. Smith, *Composition operators between Bergman and Hardy spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **348** (1996), 2331–2348.

[8] S. Ueki, *Weighted composition operators between weighted Bergman spaces in the unit ball of $\mathbb{C}^n$*, Nihonkai Math. J., **16** (2005), 31–48.

Sobolev 空間の complement について

東京電機大学工学部嘱託講師　平澤　剛 (Hirasawa Go)

1　De Branges 空間について

まず以下の記号を導入します.

- $(\mathcal{H}, (\cdot, \cdot))$: Hilbert 空間.
- $\mathcal{B}(\mathcal{H})$: 有界線形作用素の全体.
- $A\mathcal{H}$: operator range $(A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}))$.

Operator range $A\mathcal{H}$ に内積 $(\ ,\ )_A$ を導入しよう:

$$(Au, Av)_A := (Pu, Pv), \quad u, v \in \mathcal{H}.$$

ただし, P は $(\ker A)^{\perp}$ への直交射影である. すると,

$$(A\mathcal{H}, (\cdot, \cdot)_A) \hookrightarrow \mathcal{H} \quad (\text{埋め込まれたヒルベルト空間}).$$

これを A による de Branges 空間 $\mathcal{M}(A) := (A\mathcal{H}, (\cdot, \cdot)_A)$ と言う. 逆な結果として次が知られている. Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の部分空間 $\mathcal{M}$ が, あるノルム $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$ に関して連続的に埋め込まれた Hilbert 空間になっていたら, ある $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が存在して

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}(A) \quad (\text{等距離同型})$$

を満たす. このとき AA^* は一意に決まる. 従って, $A \geq 0$ のように選んでおけば一意的に成り立つ.

2　Complement について

De Branges 空間が面白くなるのは, A として contraction が採用できるときである. すなわち,

$$(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}}) \hookrightarrow \mathcal{H} \quad (\text{contraction})$$

のケースを考える. このとき, $\mathcal{M} = \mathcal{M}(A)$ (等距離同型 $\|\cdot\|_{\mathcal{M}} = \|\cdot\|_A$), AA^* は一意に決まるので, complement $\mathcal{M}'$ を次で定義する.

$$\mathcal{M}' := \mathcal{M}((I - AA^*)^{1/2}).$$

- complement $\mathcal{M}'$ は $\mathcal{M}$ に付随しているノルム $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$ に依存している.
- $\mathcal{M}$ が閉部分空間のとき, $\mathcal{M}' = \mathcal{M}^{\perp}$ となる.

3　Sobolev 空間の complement について

$\mathbf{R}$ 上で定義された (複素数値) L^2-関数でその m ($m \geq 1$) 階までのすべての (弱) 導関数がまた L^2-関数になっているような部分空間を考える:

$$\{f \in L^2(\mathbf{R}) : D^k f \in L^2(\mathbf{R}) \ \ 1 \leq k \leq m\}.$$

ここで, $Df := \dfrac{1}{i}\partial f$. さらに, 次のような内積を与えます.

$$(f,g)_{H^m} := \sum_{k=0}^{m} (D^k f, D^k g)_{L^2} = (f,g)_{L^2} + \sum_{k=1}^{m} (D^k f, D^k g)_{L^2}.$$

すると, この部分空間は Hilbert 空間となり, これを m 次の Sobolev 空間と言い, $H^m(\mathbf{R})$ と表す.

$$\|f\|_{L^2} \leq \|f\|_{H^m}, \quad f \in H^m$$

が成立するので $H^m(\mathbf{R})$ は $L^2(\mathbf{R})$ の中に contractively に埋め込まれている. 従って, $H^m(\mathbf{R})$ は de Branges 空間 として実現できる (はず). そこで,

- Question 1. $H^m(\mathbf{R}) = \mathcal{M}(A)$ (等距離同型) となる contraction $A \in \mathcal{B}(L^2)$ は何か？ AA^* は何か？ または $A \geq 0$ は何か？

- Question 2. Sobolev 空間 $H^m(\mathbf{R})$ の complement $H^m(\mathbf{R})'$ は何か？つまり,

$$H^m(\mathbf{R})' = \mathcal{M}(A)' = \mathcal{M}((I - AA^*)^{1/2})$$

  を満たす AA^* は何か？

4　考察

Question 1, Question 2 を考えるためにまず作用素商の説明をする. $\ker A \subseteq \ker B$ を満たす $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して, 作用素商 B/A を次で定義する.

$$B/A : Au \to Bu, \quad u \in \mathcal{H}.$$

- 定義域は $A\mathcal{H}$, 値域は $B\mathcal{H}$ である.

- 閉作用素は作用素商のクラスに属す.

特に, $\mathcal{H}$ で稠密に定義された閉作用素のときは次の Kaufman の表現定理が知られている.

Lemma 4.1 ([3]) *T を $\mathcal{H}$ で稠密に定義された閉作用素とする. このとき, 一意に contraction B が存在して次のように書ける.*

$$T = B/(I - B^*B)^{1/2}.$$

さらに, T が自己共役であることと, B が自己共役であることは同値である.

Remark 4.1 T と B の関係は次のようにもなっている.

$$B = T(I + T^*T)^{-1/2}.$$

次の補題は本論のキーとなるものです. T を上と同様なとき, 以下が成り立ちます.

Lemma 4.2 Kaufman 表現 $T = B/(I - B^*B)^{1/2}$ において, T の定義域上に与えられるグラフノルムと de Branges ノルムは等しい:

$$\|\cdot\|_T = \|\cdot\|_{(I-B^*B)^{1/2}}.$$

T のグラフノルムとは, $\|u\|_T^2 = \|u\|^2 + \|Tu\|^2$, $(u \in \mathrm{dom}(T))$ です. $(\mathrm{dom}(T), \|\cdot\|_T)$ は contractively に埋め込まれたヒルベルト空間になります. 従って, このヒルベルト空間は de Branges 空間として実現できるわけですが, その答えが

$$(\mathrm{dom}(T), \|\cdot\|_T) = \mathcal{M}((I - B^*B)^{1/2}) \quad (\text{等距離同型})$$

ということなわけです.
証明. $u \in \mathrm{dom}(T)$ に対して, $u = (I - B^*B)^{1/2}v$, $v \in \mathcal{H}$ とおく.

$$\begin{aligned}
\|u\|_T^2 &= \|u\|^2 + \|Tu\|^2 \\
&= \|(I - B^*B)^{1/2}v\|^2 + \|Bv\|^2 \\
&= \|v\|^2 \\
&= \|(I - B^*B)^{1/2}v\|^2_{(I-B^*B)^{1/2}} \\
&= \|u\|^2_{(I-B^*B)^{1/2}}
\end{aligned}$$

この補題を利用して Sobolev 空間の complement を考えていこう.

- $m = 1$ のケース.

以前に中沢秀夫氏と考察した結果が次である.

Theorem 4.3 (cf.[4]) Sobolev 空間 $H^1(\mathbf{R})$ とそれを定義域とする $L^2(\mathbf{R})$ 上の閉作用素 $(T =)D := \dfrac{1}{i}\partial$ (自己共役) を考えます. これに一意対応する contraction を B (自己共役) とすると, 以下が成立する.

(1) $H^1(\mathbf{R}) = \mathcal{M}((I - B^2)^{1/2})$. (等距離同型)

(2) $H^1(\mathbf{R})' = \mathcal{M}(B)$. $(= \mathrm{ran}(D))$

(3) $D : H^1(\mathbf{R}) \to H^1(\mathbf{R})'$. *(onto)*

証明. $f \in H^1(\mathbf{R})$ に対して, Sobolev ノルムと D のグラフノルムは等しい:

$$\|f\|_{H^1}^2 = \|f\|_{L^2}^2 + \|Df\|_{L^2}^2 = \|f\|_D^2.$$

従って, 補題より $\|f\|_D = \|f\|_{(I-B^2)^{1/2}}$ が従い, よって $\|f\|_{H^1} = \|f\|_{(I-B^2)^{1/2}}$ となるので主張が示せた. このとき

$$\begin{aligned}
H^1(\mathbf{R})' &= \mathcal{M}((I-(I-B^2)^{1/2}(I-B^2)^{1/2})^{1/2}) \\
&= \mathcal{M}((B^2)^{1/2}) \\
&= \mathcal{M}((BB^*)^{1/2}) \\
&= \mathcal{M}(B).
\end{aligned}$$

Contraction $B \in \mathcal{B}(L^2)$ は以下のようになる. $B = T(I+T^*T)^{-1/2}$, $(T = \frac{1}{i}\partial)$ より, $h \in L^2(\mathbf{R})$ に対して,

$$(I+T^*T)^{-1/2}h(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \lambda^{-1/2}(I+\lambda+T^*T)^{-1}h(t)\ d\lambda$$

が成立する, (cf. [2] 公式より). $g(t) := (I+\lambda+T^*T)^{-1}h(t)$ とおいて, 両辺フーリエ変換すると

$$\begin{aligned}
\hat{g}(\xi) &= (1+\lambda+\xi^2)^{-1}\hat{h}(\xi) \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{2a}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{2a}{a^2+\xi^2}\right)\hat{h}(\xi), \quad a := (1+\lambda)^{1/2} \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{2a}\hat{k_\lambda}(\xi)\hat{h}(\xi), \quad k_\lambda(t) = e^{-a|t|} \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{2a}\widehat{k_\lambda * h}(\xi), \quad (k_\lambda * h)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty k_\lambda(t-y)h(y)\ dy
\end{aligned}$$

よって, $g(t) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2a}(k_\lambda * h)(t)$. 以上より

$$\begin{aligned}
(Bh)(t) &= T(I+T^*T)^{-1/2}h(t) \\
&= \frac{T}{\pi}\int_0^\infty \lambda^{-1/2}(I+\lambda+T^*T)^{-1}h(t)\ d\lambda \\
&= \frac{T}{\pi}\int_0^\infty \lambda^{-1/2}\frac{\sqrt{2\pi}}{2a}(k_\lambda * h)(t)\ d\lambda \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\frac{T}{\pi}\int_0^\infty \lambda^{-1/2}(1+\lambda)^{-1/2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty k_\lambda(t-y)h(y)\ dy\ d\lambda \\
&= \frac{T}{2\pi}\int_0^\infty \lambda^{-1/2}(1+\lambda)^{-1/2}\int_{-\infty}^\infty e^{-(1+\lambda)^{1/2}|t-y|}h(y)\ dy\ d\lambda \\
&= \frac{T}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \lambda^{-1/2}(1+\lambda)^{-1/2}e^{-(1+\lambda)^{1/2}|t-y|}\ d\lambda\right\}\ h(y)\ dy \\
&= \frac{T}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty G(t-y)h(y)\ dy = T(G*h)(t)
\end{aligned}$$

ちなみに, $G(\cdot) \in L^1(\mathbf{R})$ は 0 次の変形ベッセル関数である.

- $m \geq 2$ のケース.

任意の $f \in H^m(\mathbf{R})$ に対して,

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{H^m}^2 &= \|f\|_{L^2}^2 + \sum_{k=1}^m \|D^k f\|_{L^2}^2 \\
&= \|f\|_{L^2}^2 + \sum_{k=1}^m \|\mathcal{F} D^k f\|_{L^2}^2 \quad (\mathcal{F} : \text{フーリエ変換}) \\
&= \|f\|_{L^2}^2 + \sum_{k=1}^m \|M_k \mathcal{F} f\|_{L^2}^2, \quad (M_k \mathcal{F} f = \xi^k \mathcal{F} f) \\
&= \|f\|_{L^2}^2 + \sum_{k=1}^m \int |\xi^k \mathcal{F} f(\xi)|^2 d\xi \\
&= \|f\|_{L^2}^2 + \int \sum_{k=1}^m \xi^{2k} \cdot |\mathcal{F} f(\xi)|^2 d\xi, \quad Q_{2m}(\xi) := \sum_{k=1}^m \xi^{2k} \\
&= \|f\|_{L^2}^2 + \int |M_{Q_{2m}^{1/2}} \mathcal{F} f(\xi)|^2 d\xi \\
&= \|f\|_{L^2}^2 + \|M_{Q_{2m}^{1/2}} \mathcal{F} f\|_{L^2}^2, \quad T_m := \mathcal{F}^{-1} M_{Q_{2m}^{1/2}} \mathcal{F} \ \ (\text{自己共役}) \\
&= \|f\|_{L^2}^2 + \|\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} M_{Q_{2m}^{1/2}} \mathcal{F} f\|^2 = \|f\|_{L^2}^2 + \|\mathcal{F} T_m f\|_{L^2}^2 \\
&= \|f\|_{L^2}^2 + \|T_m f\|_{L^2}^2 \\
&= \|f\|_{T_m}^2, \quad T_m = B_m/(I - B_m^2)^{1/2} \\
&= \|f\|_{(I-B_m^2)^{1/2}}^2 \quad (\text{補題より}).
\end{aligned}
$$

よって, $H^m(\mathbf{R}) = \mathcal{M}((I - B_m^2)^{1/2})$ (等距離同型) となる. 以上まとめると,

Theorem 4.4 Sobolev 空間 $H^m(\mathbf{R})$ $(m \geq 2)$ に対して,

$$T_m := Q_{2m}(D)^{1/2} = (D^2 + D^4 + \cdots + D^{2m})^{1/2} \quad (\text{自己共役})$$

とおくと, $\mathrm{dom}(T_m) = H^m(\mathbf{R})$ となり, この T_m に Kaufman の意味で 1 対 1 対応するある contraction B_m (自己共役) が存在して以下が成立する.

(1) $H^m(\mathbf{R}) = \mathcal{M}((I - B_m^2)^{1/2})$. (等距離同型)

(2) $H^m(\mathbf{R})' = \mathcal{M}(B_m)$. $(= \mathrm{ran}(T_m))$

(3) $T_m : H^m(\mathbf{R}) \to H^m(\mathbf{R})'$. (onto)

せめて $m = 2$ のときの complement $H^2(\mathbf{R})' = \mathcal{M}(B_2)$ を求めてみたいものです. $B_2 = T_2(I + T_2^* T_2)^{-1/2}$, $(T_2 = (D^2 + D^4)^{1/2})$ より, $h \in L^2(\mathbf{R})$ に対して,

$$(I + T_2^2)^{-1/2} h(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-1/2} (I + \lambda + T_2^2)^{-1} h(t) \, d\lambda.$$

$g(t) := (I + \lambda + T_2^2)^{-1}h(t)$ とおいて, 両辺フーリエ変換すると

$$\begin{aligned}\hat{g}(\xi) &= (1+\lambda+\xi^2+\xi^4)^{-1}\hat{h}(\xi) \\ &= \widehat{k_\lambda}(\xi)\widehat{h}(\xi) \\ &= (\widehat{k_\lambda * h})(\xi)\end{aligned}$$

となるような関数 $k_\lambda(t)$ が知りたいわけである. そこで, 計算をしてみると $k_\lambda(t)$ は次のようになった.

$$k_\lambda(t) = \frac{\pi}{2\sqrt{2\pi}}(\lambda+\frac{3}{4})^{-\frac{1}{2}}(\frac{1}{\xi_0(\lambda)}e^{i\xi_0(\lambda)|t|} - \frac{1}{\xi_1(\lambda)}e^{i\xi_1(\lambda)|t|}).$$

ただし, $\xi_0(\lambda)$ と $\xi_1(\lambda)$ はそれぞれ次の方程式の解のうち imaginary part が正のものである.

$$\xi^2 + w_0 = 0, \quad w_0 = \frac{1}{2} - i\sqrt{\lambda+\frac{3}{4}}$$

$$\xi^2 + w_1 = 0, \quad w_1 = \frac{1}{2} + i\sqrt{\lambda+\frac{3}{4}}$$

この計算は, $(1+\lambda+\xi^2+\xi^4)^{-1}$ の分母を平方完成して部分分数分解したときに現れる関数の分母が上記の 2 つの関数というわけです. 後は, フーリエ逆変換を留数定理などを使って計算をしました. 結論としては, contraction B_2 は次のようになります.

$$B_2 h = T_2(K_2 * h), \quad h \in L^2(\mathbf{R}). \qquad (T_2 = (D^2+D^4)^{1/2})$$

ただし,

- $K_2(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^\infty \lambda^{-\frac{1}{2}}(\lambda+\frac{3}{4})^{-\frac{1}{2}}(\frac{1}{\xi_0(\lambda)}e^{i\xi_0(\lambda)|t|} - \frac{1}{\xi_1(\lambda)}e^{i\xi_1(\lambda)|t|})d\lambda.$
- $K_2(t) \in L^1(\mathbf{R})$.
- $\widehat{K_2}(\xi) = (1+\xi^2+\xi^4)^{-\frac{1}{2}}$.

ちなみにこれらから次がわかる.

$$\mathrm{dom}(T_2) = H^2(\mathbf{R}) = \{K_2 * h : h \in L^2(\mathbf{R})\}$$

このとき,

$$\|K_2 * h\|_{H^2} = \|h\|_{L^2}$$

である. つまり, 関数 K_2 のことを, K_2 を合成させる有界作用素と考えると, 上の集合は K_2 の operator range を意味する. 従って, そこでの Sobolev ノルムは K_2 による de Branges ノルムになっているわけです.

参考文献

[1] T. Ando, *De Branges Spaces and Analytic Operator Functions*, Lecture note, Hokkaido University, Sapporo, Japan, 1990.

[2] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[3] W. E. Kaufman, *Representing a closed operator as a quotient of continuous operators*, Proc. Amer. Math. Soc., 72 (1978), 531-534.

[4] H. Nakazawa and G. Hirasawa, *The bounded operator which corresponds to a differential operator in* $L^2(\mathbf{R}^N)$, Proc. Sch. Sci. Tokai Univ. 39 (2004), 17-27.

[5] D. Sarason, *Sub-Hardy Hilbert Spaces in the Unit Disk*, Wiley, New York, 1994.

$H^2(\mathbb{D}^2)$ 上のねじれ加群同型写像について

神奈川大学工学部　　瀬戸　道生 (Michio Seto)

概 要

２００６年の秋に集中して考えましたが，力及ばず暗礁に乗り上げてしまった問題についてまとめます.

1　問題とその背景

$\mathbb{D}$ を複素平面 $\mathbb{C}$ の単位開円板とする．$\mathbb{C}[z]$ は z 変数の多項式環，$A(\mathbb{D})$ はディスク環を表す．古典的な Beurling の定理とは，ハーディ空間 $H^2(\mathbb{D})$ の中で，z 掛け算で不変な閉部分空間を記述するものである．今，明らかに, z-不変 $\Leftrightarrow$ $\mathbb{C}[z]$-不変 $\Leftrightarrow$ $A(\mathbb{D})$-不変 であるため，Beurling の定理の仮定と結論は座標系に依存しないものである．即ち，z を基準にした z-不変性にこだわる必要はなく，$\mathbb{C}[z]$，又は $A(\mathbb{D})$ の都合のよい生成元を基準に議論を進めてもよいことになる．例えば，$\lambda \in \mathbb{D}$ に対して，$b_\lambda = (\lambda - z)/(1 - \overline{\lambda} z)$ として，z-不変性の代わりに b_λ-不変性を考えても，Beurling の定理は，証明も含めて，まったく並行に議論を進めることができる．当然のことながら，この議論を一変数に限る必要はまったくない．正確なことは後に述べるが，一変数の場合と同様に，$\mathbb{D}^2$ 上でも (もっと一般な領域上でも構わない), (z_1, z_2)-不変 $\Leftrightarrow$ $\mathbb{C}[z_1, z_2]$-不変 $\Leftrightarrow$ $A(\mathbb{D}^2)$-不変であるから，(z_1, z_2)-不変性は $(z_1 + z_2, z_1 - z_2)$-不変性や $(b_{\lambda_1}(z_1), b_{\lambda_2}(z_2))$-不変性と同値である．しかし，一変数の場合と異なり，(z_1, z_2)-不変部分空間は非常に複雑になる．従って何らかの方法による分類を考えるのだが，一つの標準的な方法は次のような性質をみたすユニタリ作用素 U から引き起こされる同値関係による分類である:

$$Uz_1 f = z_1 U f \text{ and } Uz_2 f = z_2 U f. \tag{1}$$

今回考えたい問題は**大雑把**に述べると以下の二つである.

問題 1 $Azf = b_{\lambda_1}(z_1)Af$ and $Awf = b_{\lambda_2}(z_2)Af$ をみたす作用素 A を探せ．もしも，作用素 A がユニタリ作用素として選べるならば，そのユニタリ作用素から引き起こされる同値関係により (z_1, z_2)-不変部分空間を分類せよ.

問題 2 $Azf = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)Af$ *and* $Awf = \frac{1}{2}(z_1 - z_2)Af$ をみたす作用素 A を探せ．もしも，作用素 A がユニタリ作用素として選べるならば，そのユニタリ作用素から引き起こされる同値関係により (z_1, z_2)-不変部分空間を分類せよ.

問題 2 の中で $\frac{1}{2}$ が現れているのは，$\mathbb{D}^2$ の場合を考えたいからである．即ち，$(z_1, z_2) \mapsto (z_1 + z_2, z_1 - z_2)$ では $\mathbb{D}^2$ 上の変換にならないためである．結論を先に述べると，問題 1 は易しい，本質的に (1) の場合に帰着される．一方，問題 2 は難しいと思われる．特に，後半のユニタリ作用素に関するくだりはとても望めそうにない.

以下のセクションではこの問題を正確に述べ，何が明らかなのか，何が困難なのかを解説したい.

2　準備

$H^2 = H^2(\mathbb{D}^2)$ を $\mathbb{D}^2$ 上のハーディ空間とする．$\mathbb{D}^2$ の点 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ に対し，

$$\alpha_\lambda = \prod_{j=1}^{2} \frac{\lambda_j - z_j}{1 - \overline{\lambda_j} z_j},\ k_\lambda = \prod_{j=1}^{2} \frac{\sqrt{1 - |\lambda_j|^2}}{1 - \overline{\lambda_j} z_j}$$

とする．M_f を関数 f による掛け算作用素，T_f を通常の Toeplitz 作用素とする．φ を $\mathbb{D}^2$ から $\mathbb{D}^2$ への正則写像 (holomorphic map) とするとき，C_φ は適当な定義域上で定められた φ による合成作用素とする．φ が $\mathbb{D}^2$ の自己同型写像 (i.e. 全単射両正則写像) であるときは，C_φ を $L^2(\mathbb{T}^2)$ 上の有界作用素とみる．$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ と記すことにする．特に, $\alpha_\lambda(z_1, z_2) = (\alpha_{\lambda_1}(z_1), \alpha_{\lambda_2}(z_2))$ と記す．φ が自己同型写像であるときは,

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) = \left(e^{i\theta_1}\alpha_{\lambda_1}(z_{\sigma(1)}), (e^{i\theta_2}\alpha_{\lambda_2}(z_{\sigma(2)})\right)$$

と表すことができる．ここで σ は 添え字の集合 $\{1, 2\}$ 上の置換である．この報告では, φ^{-1} は φ の逆写像 (積の逆元 $1/\varphi$ ではない) を表す．従って，φ が自己同型写像のときは $C_\varphi^{-1} = C_{\varphi^{-1}}$ となる．

3　ユニタリ作用素 U_φ

$\mathbb{D}^2$ 上の自己同型写像 $\varphi = \left(e^{i\theta_1}\alpha_{\lambda_1}(z_{\sigma(1)}), (e^{i\theta_2}\alpha_{\lambda_2}(z_{\sigma(2)})\right)$ に対して，

$$k_\varphi = \prod_{j=1}^{2} \frac{\sqrt{1 - |\lambda_{\sigma(j)}|^2}}{1 - \overline{e^{i\theta_{\sigma(j)}}\lambda_{\sigma(j)}} z_{\sigma(j)}} = \prod_{j=1}^{2} k_{e^{i\theta_j}\lambda_j}(z_j)$$

とおき，$U_\varphi = T_{k_{\varphi^{-1}}} C_\varphi$ と定める．このとき U_φ が H^2 上のユニタリ作用素になることはよく知られている．さらに簡単な計算で次の性質をみたすことが確認できる:

$f \in L^\infty(\mathbb{T}^2)$ とする．このとき，$U_\varphi T_f U_\varphi^* = T_{f\circ\varphi}$ である．

さらに上記の性質をみたすユニタリ作用素は定数倍の差を除いて一意であることも簡単に確認できる．このように U_φ は問題 1 の前半部についての解答になっている．この U_φ を使って問題 1 の後半部について考えたいのだが，性質が良すぎる故にほぼ自明な結果しか導き出されない．この件について次のセクションで詳しく解説する．

以下，$\varphi = \alpha_\lambda$ のときを詳しく調べる．$\alpha_\lambda \circ \alpha_\lambda = \mathrm{id}.$ という性質より，U_{α_λ} は自己共役作用素となり，そのスペクトル分解を求めることができる．以下 $k_{\lambda_j} = k_{\lambda_j}(z_j) = \sqrt{1 - |\lambda_j|^2}/(1 - \overline{\lambda_j} z_j)$ と略記する．

まず，自己共役作用素のスペクトル分解定理により

$$U_{\alpha_\lambda} = \int_0^{2\pi} e^{it}\, dE_t^{(\lambda)} = \int_{\{0,\pi\}} e^{it}\, dE_t^{(\lambda)} = E_0^{(\lambda)} - E_\pi^{(\lambda)}$$

と表せる．$E_0^{(\lambda)}$ と $E_\pi^{(\lambda)}$ をそれぞれ $E_+^{(\lambda)}$ と $E_-^{(\lambda)}$ と表す．このとき，

$$H^2 = E_+^{(\lambda)} H^2 \oplus E_-^{(\lambda)} H^2 = \{\varphi \in H^2 : U_{\alpha_\lambda}\varphi = \varphi\} \oplus \{\psi \in H^2 : U_{\alpha_\lambda}\psi = -\psi\}$$

となる．今，U_{α_λ} は $H^2(\mathbb{D})$ 上の二つの作用素のテンソル積として表現できるため，本質的なのは一変数の場合である．即ち，

$$U_{\alpha_\lambda} = U_{\alpha_{\lambda_1}} \otimes U_{\alpha_{\lambda_2}},$$

と表せるため，$H^2(\mathbb{D})$ 上に作用している $U_{\alpha_{\lambda_j}} = T_{k_{\lambda_j}} C_{\alpha_{\lambda_j}}$ を調べればよい．そのスペクトル分解は以下である．

補題 3.1 $U_{\alpha_{\lambda_j}} = E_+^{(\lambda_j)} - E_-^{(\lambda_j)}$ を $U_{\alpha_{\lambda_j}}$ の $H^2(\mathbb{D})$ でのスペクトル分解とする．このとき，固有空間は以下のように表される:

$$E_+^{(\lambda_j)} H^2(\mathbb{D}) = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus \mathbb{C}(1 + k_{\lambda_j}) z_j^n \alpha_{\lambda_j}^n,$$

$$E_-^{(\lambda_j)} H^2(\mathbb{D}) = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus \mathbb{C}(\alpha_{\lambda_j} - z k_{\lambda_j}) z_j^n \alpha_{\lambda_j}^n.$$

$\mathbb{D}^2$ の場合に戻って，以下を得る．

定理 3.1

$$E_+^{(\lambda)} = \left(E_+^{(\lambda_1)} \otimes E_+^{(\lambda_2)}\right) + \left(E_-^{(\lambda_1)} \otimes E_-^{(\lambda_2)}\right),$$
$$E_-^{(\lambda)} = \left(E_+^{(\lambda_1)} \otimes E_-^{(\lambda_2)}\right) + \left(E_-^{(\lambda_1)} \otimes E_+^{(\lambda_2)}\right).$$

この定理の応用として, 次のことを示すことができる．

定理 3.2 q を H^2 の中の *inner function* とする．このとき，$\mathcal{M} = qH^2$ が C_{α_λ} の作用で不変である必要十分条件は，$(1 + k_{\lambda_1})(1 + k_{\lambda_2})q$ が $E_+^{(\lambda)}$ 又は $E_-^{(\lambda)}$ に属することである．さらにこのとき q は以下の表示をもつ:

$$q = \sum_{k,l=0}^{\infty} c_{kl} e_1^k e_2^l \oplus \left(\frac{c_{\lambda_1} - z_1}{1 - \overline{c_{\lambda_1}} z_1}\right)\left(\frac{c_{\lambda_2} - z_2}{1 - \overline{c_{\lambda_2}} z_2}\right) \sum_{m,n=0}^{\infty} d_{mn} e_1^m e_2^n$$

又は，

$$q = \left(\frac{c_{\lambda_2} - z_2}{1 - \overline{c_{\lambda_2}} z_2}\right) \sum_{k,l=0}^{\infty} c_{kl} e_1^k e_2^l \oplus \left(\frac{c_{\lambda_1} - z_1}{1 - \overline{c_{\lambda_1}} z_1}\right) \sum_{m,n=0}^{\infty} d_{mn} e_1^m e_2^n$$

ここで $e_j = z_j \alpha_{\lambda_j}$，$c_{\lambda_j} = \lambda_j / \left(1 + \sqrt{1 - |\lambda_j|^2}\right)$ とおいた．

4　自己同型写像の場合

このセクションでも $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ は $\mathbb{D}^2$ の自己同型写像として固定する．$\mathcal{P}$ により 4 変数多項式環 $\mathbb{C}[z_1, z_2, \overline{z_1}, \overline{z_2}]$ を表す．以下の基本的な事実を補題として挙げておく．

補題 4.1 $L^2(\mathbb{T}^2)$ 上の有界作用素 A が存在して，$AM_{z_j} = M_{\varphi_j}A$ $(j = 1, 2)$ であるならば，ある関数 $f \in L^\infty(\mathbb{T}^2)$ が存在して，$A = M_f C_\varphi$ となる．またその逆も成立する．

$\mathcal{M}$ が H^2 の閉部分空間で有界正則関数を掛ける作用で不変であるとき H^2 の submodule と呼ぶ．$\mathcal{M}_1$ と $\mathcal{M}_2$ を H^2 の二つの submodule とし, $R_j(f)$ により Toeplitz 作用素 T_f の submodule $\mathcal{M}_j$ への圧縮とする．即ち，$R_j(f) = P_{\mathcal{M}_j}T_f|_{\mathcal{M}_j}$ ($P_\mathcal{M}$ は $\mathcal{M}$ への射影作用素) とする．

定義 4.1 φ を $\mathbb{D}^2$ 上の自己同型写像とする．二つの submodule $\mathcal{M}_1$ と $\mathcal{M}_2$ がユニタリ φ-同値であるとは，ある $\mathcal{M}_1$ から $\mathcal{M}_2$ の上へのユニタリ作用素 U が存在して，$UR_1(z_j)U^* = R_2(\varphi_j)$ $(j = 1, 2)$ となることと定義する．上記のような U をねじれユニタリ同型写像と呼ぶ．さらに, ユニタリ φ-同値から φ の選択によらない同値関係が定義される．それをねじれユニタリ同値と名付ける．

定理 4.1 二つの *submodule* $\mathcal{M}_1$ *and* $\mathcal{M}_2$ がユニタリ φ-同値である必要十分条件はある関数 $u \in L^\infty(\mathbb{T}^2)$ で $|u| = 1$ *a.e.* となるものが存在して $U = M_u U_\varphi$ となることである．

証明 UU_φ^* が通常の加群のユニタリ同型写像になることを確かめればよい．

この定理を用いて，Guo の一連の結果を書き換えることは，自明な作業である．例えば次のようなことがいえる．

定理 4.2 (Guo) p_1, p_2 を $\mathbb{C}[z_1, z_2]$ の中の多項式とし, $[p_j]$ を p_j によって生成される *submodule* とする．このとき，$[p_1]$ と $[p_2]$ がユニタリ φ-同値であるための必要十分条件は，$\mathbb{D}^2$ 内に零点をもたない多項式 q_1, q_2 が $\mathbb{C}[z_1, z_2]$ に存在して，$\mathbb{T}^2$ 上で $|(p_1 \circ \varphi)q_1| = |p_2 q_2|$ となることである．

商加群 $\mathcal{N} = H^2/\mathcal{M}$ についても以下がいえる．$\sigma_T(A, B)$ を作用素のペア (A, B) に対するテイラースペクトルとする．$S_\mathcal{N}(f)$ により T_f の $\mathcal{N}$ への圧縮を表す．即ち，$S_\mathcal{N}(f) = P_\mathcal{N}T_f|_\mathcal{N}$ である．

定理 4.3 $\mathcal{N}$ を *submodule* $\mathcal{M}$ の商加群とする．このとき $U_\varphi\mathcal{N}$ も商加群になり，以下が成り立つ:

$$\sigma_T\left(S_{U_\varphi\mathcal{N}}(z_1), S_{U_\varphi\mathcal{N}}(z_2)\right) = \varphi^{-1}\left(\sigma_T\left(S_\mathcal{N}(z_1), S_\mathcal{N}(z_2)\right)\right).$$

証明 U_φ は H^2 上のユニタリ作用素であり，$U_\varphi\mathcal{M}$ も submodule になるから, $U_\varphi\mathcal{N}$ は $U_\varphi\mathcal{M}$ の商加群である．このとき，$U_\varphi P_\mathcal{N} U_\varphi^* = P_{U_\varphi\mathcal{N}}$ である．従って，

$$\begin{aligned}
U_\varphi S_\mathcal{N}(z_j)U_\varphi^* &= U_\varphi P_\mathcal{N} T_{z_j} P_\mathcal{N} U_\varphi^* \\
&= U_\varphi P_\mathcal{N} U_\varphi^* U_\varphi T_{z_j} U_\varphi^* U_\varphi P_\mathcal{N} U_\varphi^* \\
&= P_{U_\varphi\mathcal{N}} T_{\varphi_j} P_{U_\varphi\mathcal{N}} \\
&= S_{U_\varphi\mathcal{N}}(\varphi_j)
\end{aligned}$$

となる．さらに以下の図式が可換になることが確認できる:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{N} & \xrightarrow{\delta_0} & \mathcal{N} \oplus \mathcal{N} & \xrightarrow{\delta_1} & \mathcal{N} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle U_\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle U_\varphi \oplus U_\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle U_\varphi} & & \\
0 & \longrightarrow & U_\varphi \mathcal{N} & \xrightarrow{\delta_0} & U_\varphi \mathcal{N} \oplus U_\varphi \mathcal{N} & \xrightarrow{\delta_1} & U_\varphi \mathcal{N} & \longrightarrow & 0,
\end{array}
$$

ここで上記の二つの系列はテイラースペクトルを定義する Koszul complex である．従って，

$$\sigma_T\left(S_{\mathcal{N}}(z_1), S_{\mathcal{N}}(z_2)\right) = \sigma_T\left(S_{U_\varphi \mathcal{N}}(\varphi_1), S_{U_\varphi \mathcal{N}}(\varphi_2)\right)$$

となる．さらに, テイラースペクトルについてのスペクトル写像定理により, 以下を得る:

$$\sigma_T\left(S_{U_\varphi \mathcal{N}}(\varphi_1), S_{U_\varphi \mathcal{N}}(\varphi_2)\right) = \varphi\left(\sigma_T\left(S_{U_\varphi \mathcal{N}}(z_1), S_{U_\varphi \mathcal{N}}(z_2)\right)\right).$$

5 これからの問題 (非自己同型写像の場合)

このセクションでは，$\mathbb{D}^2$ 上に作用する $\psi(z_1, z_2) = \left(\frac{1}{2}(z_1 + z_2), \frac{1}{2}(z_1 - z_2)\right)$ のような自己同型写像でない正則写像 ψ を考える．この場合，合成作用素の有界性もよくわからなくなり，筆者はまだ何も得ていない．従って，ここではこれから考えたい問題を挙げるに止める．

まず初めに，次のことは容易にわかる．

補題 5.1 $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ を $\mathbb{D}^2$ 上の正則写像とする．このとき，C_ψ は稠密な定義域 $\mathcal{D}_\psi = \{f \in H^2 : f \circ \psi \in H^2\}$ をもつ閉作用素である．

証明 $\mathcal{D}_\psi$ が H^2 の中で稠密なこことは明らか．$\{f_n\}_n$ を $\mathcal{D}_\psi$ の中の関数列で，f_n が f に，$C_\psi f_n$ が g にそれぞれ収束するものとする．このとき，任意の $\lambda \in \mathbb{D}$ に対して，$f_n \circ \psi(\lambda)$ は $f \circ \psi(\lambda)$ に収束し，同時に $g(\lambda)$ にも収束する．これは $f \in \mathcal{D}_\psi$ かつ $f \circ \psi = g$ を意味する．

自己同型写像の場合のように，C_ψ に細工を施して C_ψ の性質を保存したユニタリ作用素が得られるとは考えづらい．現在唯一思いつく自然な候補が，C_ψ の極分解 $C_\psi = U|C_\psi|$ に現れる U であろう (上記の補題 5.1 により極分解できることに注意).

問題 3 UT_fU^* を計算せよ．

一般の正則写像を考えてしまうと，上記のような問題にぶつかる．多項式からなる空間に制限して，さらに，補題 4.1 に対応するようなことを考えることはできるが，その場合，現れる作用素 M_fC_ψ が可閉かどうかもまだ示せていない (この場合，f も非有界かもしれない)．C_ψ が閉作用素であるから M_fC_ψ も可閉ぐらいにはなりそうである．この辺りから研究を仕切り直すのがよいかもしれない．

シフト作用素の一般化について

信州大学 理学部　　高木　啓行 (Hiroyuki Takagi)

いろいろな空間において，シフト作用素の研究が行われている．それらを概観して感じることを，ここでは，思うままに述べてみたい．

1　シフト作用素

もっとも基本的な立場で “シフト作用素” というと，数列空間 ℓ^2 上の作用素

$$S: \begin{array}{c} (\ a_0,\, a_1,\, a_2,\, \cdots,\ \ a_n,\ \ \cdots\ ) \\ \downarrow \\ (\ \ 0,\ a_0,\, a_1,\, \cdots,\, a_{n-1},\, \cdots\ ) \end{array} \qquad T: \begin{array}{c} (\ a_0,\, a_1,\, a_2,\, \cdots,\ \ a_n,\ \ \cdots\ ) \\ \downarrow \\ (\ a_1,\, a_2,\, a_3,\, \cdots,\, a_{n+1},\, \cdots\ ) \end{array}$$

を指す．前者 S は **前進シフト作用素** (forward shift operator)，後者 T は **後退シフト作用素** (backward shift operator) と呼ばれる．これらは，ℓ^2 上の有界線形作用素で，互いに他の共役作用素になっている ([3] などを参照).

さて，可分な Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ は 数列空間 ℓ^2 と (内積空間として) 同型だから，$\mathcal{H}$ 上でもシフト作用素を考えることができる．以下，$\mathcal{H}$ を可分な Hilbert 空間とし，$\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素全体を $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ とかく．

定義 O．$S,\ T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ とする．$\mathcal{H}$ の ある完全正規直交系 $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対して，

$$Se_n = e_{n+1} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

となっているとき，S を $\mathcal{H}$ 上の (**O-**)**前進シフト作用素**といい，

$$Te_0 = 0, \qquad Te_n = e_{n-1} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

となっているとき，T を $\mathcal{H}$ 上の (**O-**)**後退シフト作用素**という．

たとえば, $\mathcal{H}$ が単位開円板 $\mathbb{D}$ 上の Hardy 空間 $H^2(\mathbb{D})$ の場合，べき乗関数 $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$ が $H^2(\mathbb{D})$ の完全正規直交系になっているので，作用素 S, T :

$$\begin{aligned} (Sf)(z) &= z\, f(z) \\ (Tf)(z) &= \frac{f(z) - f(0)}{z} \end{aligned} \qquad \bigl(z \in \mathbb{D},\ f \in H^2(\mathbb{D})\bigr) \tag{1}$$

は，それぞれ $H^2(\mathbb{D})$ 上の前進シフト作用素，後退シフト作用素になる．これらの作用素が Hardy 空間の研究で重要な役割を果たしているのは，周知のとおりである ([11], [2] を参照).

より一般的に，Banach 空間上でシフト作用素を考えよう．以下，$\mathcal{B}$ を Banach 空間とし，$\mathcal{B}$ 上の有界線形作用素全体を $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ とかく．また，$T \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ に対して，T の核を $\ker T$，値域を $\operatorname{ran} T$ と表す．1972 年，Crownover は，$\mathcal{B}$ 上の前進シフト作用素を次のように定義した ([4])：

定義 A．$S \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ とする．S は，次の 3 つの条件 (i)〜(iii) を満たすとき，$\mathcal{B}$ 上の (**A-**) **前進シフト作用素**と呼ばれる．

(i) S は 単射である．
(ii) $\operatorname{ran} S$ の余次元が 1 である．
(iii) $\bigcap_{n=1}^{\infty} \operatorname{ran} S^n = \{0\}$.

この定義にしたがって，いくつかの関数空間上の前進シフト作用素が研究された ([7], [6], [5], [13], [14], [8])．他方 1988 年には，Holub が，$\mathcal{B}$ 上の後退シフト作用素を次のように定義した ([7])：

定義 B．$T \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ とする．T は，次の 3 つの条件 (i)〜(iii) を満たすとき，$\mathcal{B}$ 上の (**B-**) **後退シフト作用素**と呼ばれる．

(i) $\|Tf\| = \inf \{ \|f+g\| : g \in \ker T \} \quad (f \in \mathcal{B})$.
(ii) $\ker T$ の次元が 1 である．
(iii) $\bigcup_{n=1}^{\infty} \ker T^n$ が $\mathcal{B}$ で稠密である．

上の条件 (i) は,「T によって自然に定義される $\mathcal{B}/\ker T$ から $\mathcal{B}$ への単射の作用素 $f + \ker T \mapsto Tf$ が等長作用素になる」という意味である．定義 B にもとづく研究には，[9], [1], [14], [10], [12] がある．

この講演では，これらの定義を見直してみたい．定義を区別するために，ここでは，作用素名の前に定義札をつけ，“O-前進シフト作用素”, “A-前進シフト作用素” などということにする．

2 定義 A を見直す

前節で述べた 3 つの定義の整合性を考えてみよう．まずは，**定義 O と定義 B**——これらは次の意味で整合性がある．

命題 1．$T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ のとき，T が，O-後退シフト作用素であることと，B-後退シフト作用素であることは，同値である．

ところが，**定義 O と定義 A** については,

命題 2．$S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ とする．S が，O-前進シフト作用素ならば，A-前進シフト作用素になる．この逆は必ずしも成り立たない．

ということは，定義 A は定義 O の厳密な一般化になっていない．また，**定義 A と定義 B** を比べると，3 つの条件 (i)〜(iii) がそれぞれに対応しているが，条件 (i) の意味合いに食い違いを感じる．

そこで，定義 A を次のように変更してみよう．

定義 A′．$S \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ とする．S は，次の 3 つの条件 (i)〜(iii) を満たすとき，$\mathcal{B}$ 上の (**A′-**) **前進シフト作用素**と呼ばれる．

(i) $\|Sf\| = \|f\| \quad (f \in \mathcal{B})$.
(ii) $\operatorname{ran} S$ の余次元が 1 である．
(iii) $\bigcap_{n=1}^{\infty} \operatorname{ran} S^n = \{0\}$.

定義 A$'$ では，条件 (i) が強められ，次のことが成り立つ．

命題 3．$S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ のとき，S が，O-前進シフト作用素であることと，A$'$-前進シフト作用素であることは，同値である．

こうして，命題 2 の不備は除かれた．また，定義 A$'$ と定義 B の条件 (i)〜(iii) も，それぞれにしっくり対応するようにも思える．A$'$-前進シフト作用素は，一般には**等長シフト作用素** (isometric shift operator) という名で研究されており ([6], [13], [8])，A-前進シフト作用素より重要視されているようである．以上の観点から，Banach 空間上のシフト作用素の定義は，“定義 A$'$ と定義 B” が妥当に思われる．

続いて，共役作用素を見てみよう．Hilbert 空間においては，次の命題が簡単に示せる．

命題 4．$S,\ T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ と，その共役作用素 S^*, T^* について，

(a) S : O-前進シフト作用素 $\Longrightarrow$ S^* : O-後退シフト作用素.

(b) T : O-後退シフト作用素 $\Longrightarrow$ T^* : O-前進シフト作用素.

Banach 空間においても，同様のことを考えると....

命題 5．$S,\ T \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ と，共役空間 $\mathcal{B}^*$ 上の共役作用素 S^*, T^* について，

(a) S が $\mathcal{B}$ 上の A$'$-前進シフト作用素であっても，
S^* が $\mathcal{B}^*$ 上の B-後退シフト作用素になるとは限らない.

(b) T : $\mathcal{B}$ 上の B-後退シフト作用素 $\Longrightarrow$ T^* : $\mathcal{B}^*$ 上の A$'$-前進シフト作用素.

Banach 空間が一般に回帰的でないことが起因して，命題 5 (a) のような結果が出てしまう．“定義 A$'$ と定義 B” は，命題 4 (a) が保持できないという意味で，若干の不満を残す.

3　定義 B を見直す

関数環上のシフト作用素に目を向けよう．まずは，関数環の典型例であるディスク環 $A(\mathbb{D})$ ——単位閉円板 $\overline{\mathbb{D}}$ 上で連続 かつ 内部 $\mathbb{D}$ で正則な関数全体の関数環—— をとりあげる．$A(\mathbb{D})$ 上の A$'$-前進シフト作用素は，Takayama and Wada ([13]) により，完全に特徴づけされている．それによると，$A(\mathbb{D})$ 上の A$'$-前進シフト作用素 S の典型例として，

$$(Sf)(z) = z\,f(z) \qquad \bigl(z \in \overline{\mathbb{D}},\ f \in A(\mathbb{D})\bigr)$$

なる作用素 S が挙げられる．この式は (1) の第 1 式と同じである．そこで，(1) の第 2 式にならって，

$$(Tf)(z) = \frac{f(z) - f(0)}{z} \qquad \bigl(z \in \overline{\mathbb{D}},\ f \in A(\mathbb{D})\bigr) \tag{2}$$

と定義しよう．すると，T は $A(\mathbb{D})$ 上の B-後退シフト作用素になりそうだが，残念ながらそうはならない．なぜなら，T は，定義 B の (i) を満たさないからである．この事実は，“定義 A$'$ と定義 B” に疑問を投げかける.

ディスク環以外の関数環の上の A$'$-前進シフト作用素については，[6], [8] などで研究されている．それらの研究からは，関数環上の A$'$-前進シフト作用素が稀な存在である印象を受ける．そればか

りか，[1], [12] では,「無限次元の関数環上の B-後退シフト作用素が存在しない」ことが証明されている．これらの結果からは，“定義 A$'$ と定義 B” の定め方が強すぎる感をぬぐえない．

では，定義 B を次のように手直しし，定義 A と組み合わせてはどうだろう？

定義 B$'$. $T \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ とする．T は，次の 3 つの条件 (i)〜(iii) を満たすとき，$\mathcal{B}$ 上の (**B$'$-**) **後退シフト作用素**と呼ばれる．

(i) T は 全射である $(T(\mathcal{B}) = \mathcal{B})$.

(ii) $\ker T$ の次元が 1 である．

(iii) $\bigcup_{n=1}^{\infty} \ker T^n$ が $\mathcal{B}$ で稠密である．

この定義を採用すると，式 (2) で定めた $A(\mathbb{D})$ 上の作用素 T は，B$'$-後退シフト作用素になる．とはいっても，“定義 A と定義 B$'$” にも，いろいろな問題点を感じる．やはり，着眼点によって，定義を変えるべきだろうか？

4　最後に$\cdots$とりあえず$\cdots$まとめ

[1], [12] の勉強以来,

Banach 空間上でシフト作用素を考えるのに，どのような定義が適切か？

について，いろいろと思いをめぐらせてきました．その思いを，今回，忌憚なくお話させていただいたわけですが，少なくとも

「“定義 A と定義 B” の組合せは 妙だ」

といえるのではないでしょうか？　この機会に，みなさんにご意見を伺え，さらに考えを深めていく望みを持ちました．もし，このお話が納得いく形にまとまってきた場合は，今回の分も含め，改めて正式に発表させていただきます.

参考文献

[1] 有泉 浩明 (H. Ari-Izumi), 関数環上の後退シフト作用素について, 修士論文 (信州大), 1998.

[2] J.A. Cima and W.T. Ross, “The Backward Shift on the Hardy Space”, A.M.S., 2000.

[3] J.B. Conway, “A Cource in Functional Analysis” 2nd ed., GTM 96, Springer-Verlag, 1990.

[4] R.M. Crownover, *Commutants of shifts on Banach spaces*, Michigan Math. J. **19** (1972), 233–247.

[5] F.O. Farid and K. Varadarajan, *Isometric shift operators on $C(X)$*, Canad. J. Math. **46** (1994), 532–543.

[6] A. Gutek, D. Hart, J. Jamison and M. Rajagopalan, *Shift operators on Banach spaces*, J. Funct. Anal. **101** (1991), 97–119.

[7] J.R. Holub, *On shift operators*, Canad. Math. Bull. **31** (1988), 85–94.

[8] 春日 一浩 (K. Kasuga), *Finite codimensional linear isometries on function algebras*, 北海道大学数学講究録 **73** (2003), 104–107.

[9] M. Rajagopalan and K. Sundaresan, *Backward shifts on Banach spaces $C(X)$*, J. Math. Anal. Appl. **202** (1996), 485–491.

[10] T.M. Rassias and K. Sundaresan, *Generalized backward shifts on Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **260** (2001), 36–45.

[11] J.H. Shapiro, "Composition Operators and Classical Functon Theory", Springer-Varlag, 1993.

[12] 高木 啓行 (H.Takagi), 関数環上の後退シフト作用素, 数理解析研究所講究録 **1243** (2002), 49–51.

[13] T. Takayama and J. Wada, *Isometric shift operators on the disc algebra*, Tokyo J. Math. **21** (1998), 115–120.

[14] 和田 淳藏 (J. Wada), Banach 空間上のシフト作用素について, 関数環論とその応用 研究集会 報告集 (早大教育), 2000.

あるBanach環の間の積を保存する写像について

新潟大学大学院自然科学研究科D2 本間 大 (Dai Honma)

1　導入

Banach 環の間の積のスペクトルを保存する写像の研究は Molnár[8] により創始され, その後多くの研究者により研究がなされている．Molnár は可換 Banach 環と非可換 Banach 環の両方に関して結果を得たが, 本稿では可換 Banach 環の結果に焦点をあて, この種の写像について考察する．以下で可換 Banach 環に関する Molnár の結果と他の研究者による Molnár の結果の拡張について見る．これらの結果を述べるためにいくつかの記号を準備する．$C(X)$ をコンパクト Hausdorff 空間 X 上の複素数値連続関数全体からなる多元環で上限ノルムが与えられた可換 Banach 環とする．関数環 $A(\subset C(X))$ に対し, $\|\cdot\|_A$ で A の上限ノルムを表す．$A = C(X)$ の場合は簡単のため $\|\cdot\|_X$ とする．関数環 A の元 f に対して, $\sigma(f)$, $Ran(f)$ でそれぞれ f のスペクトル, 値域を表す．さらに, $Ran_\pi(f) = \{z \in Ran(f) : |z| = \|f\|_A\}$ を f の peripheral range という．定義から, $Ran_\pi(f) \subset Ran(f) \subset \sigma(f)$ である．

以上の記号の下で Molnár らの結果を述べる．

定理 1.1 (Molnár [8]) *X を第1可算公理を満たすコンパクト Hausdorff 空間とし, T を $C(X)$ からそれ自身への上への写像とする．このとき, $T(1) = 1$ かつ*

$$\sigma(TfTg) = \sigma(fg) \qquad (f, g \in C(X))$$

ならば, T は同形写像である．

この結果を受け Molnár 型のスペクトル条件の研究が多くなされている．以下で, T を関数環 A から関数環 B への上への写像で $T(1) = 1$ をみたすものとする．さらに以下の条件を考える:

(1) $$\sigma(TfTg) = \sigma(fg) \qquad (f, g \in A);$$

(2) $$Ran(TfTg) = Ran(fg) \qquad (f, g \in A);$$

(3) $$Ran_\pi(TfTg) = Ran_\pi(fg) \qquad (f, g \in A);$$

(4) $$\|TfTg\|_B = \|fg\|_A \qquad (f, g \in A).$$

定義から明らかに, (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) である．T が条件 (1) をみたすとき同形写像であることは Rao and Roy [9] が実質的に示した．さらに, 条件 (2) をみたす T が同形写像であることは Hatori, Miura and Takagi [1] が, 条件 (3) をみたす T が同形写像であることは Luttman and Tonev [7] が示した. Lambert, Luttman and Tonev [6] は条件 (4) をみたす写像 T の特徴付けをしたが, その中で (4) は T が同形写像となるには十分でないことも示した [6, Example 1]. ノルムを保存する写像に関する結果については [3] も参照されたい.

Molnár は $*$-同形写像についても特徴づけを与えた.

定理 1.2 (Molnár [8]) *X を第 1 可算公理を満たすコンパクト Hausdorff 空間とし, T を $C(X)$ からそれ自身への上への写像とする．このとき, $T(1)=1$ かつ*

$$\sigma(Tf\overline{Tg}) = \sigma(f\overline{g}) \qquad (f, g \in C(X))$$

ならば, T は $*$-同形写像である.

この結果に対しても定理 1.1 と同様に幾つかのスペクトル条件が考えられている．以下で T は $C(X)$ から $C(Y)$ への上への写像で $T(1)=1$ をみたすものとする．このとき以下の条件を考える:

(i) $$\sigma(Tf\overline{Tg}) = \sigma(f\overline{g}) \qquad (f, g \in C(X));$$

(ii) $$\sigma_\pi(Tf\overline{Tg}) = \sigma_\pi(f\overline{g}) \qquad (f, g \in C(X));$$

(iii) $$\|Tf\overline{Tg}\|_Y = \|f\overline{g}\|_X \qquad (f, g \in C(X)).$$

このとき明らかに (i)$\Rightarrow$(ii)$\Rightarrow$(iii) である．(i) をみたす T が $*$-同形写像であることは [1] で示された． [4] では (ii) をみたす T が $*$-同形写像であることが示された.

本稿では上述のスペクトル条件 (i) の拡張である積のノルムを保存する, すなわち (iii) をみたす写像について考察する．すぐにわかるように, この条件は T が $*$-同形写像となるための十分条件とはならない．実際, 任意のコンパクト Hausdorff 空間 X に対して $f_0 \in C(X) \setminus \{0, \pm 1\}$ をとり, 写像 $T : C(X) \to C(X)$ を $f \in \{\pm f_0\}$ のとき $Tf = -f$, それ以外のとき $Tf = f$ と定める．このとき, T は $C(X)$ からそれ自身への上への写像で $T(1) = 1$ かつ条件 (iii) をみたすが T は線形でも乗法的でもないことが確かめられる．したがって, (iii) は $*$-同形写像を特徴付けるには十分でないことがわかる．そこで以下では,

(a) $$\|Tf\overline{Tg} - 1\|_Y = \|f\overline{g} - 1\|_X \qquad (f, g \in C(X))$$

を満たす $C(X)$ から $C(Y)$ への上への写像 T について考察する．T が (i) をみたせば, 任意の $f, g \in C(X)$ に対して, $\sigma(Tf\overline{Tg} - 1) = \sigma(f\overline{g} - 1)$ となるから T は上のノルム条件 (a) をみたすことがわかる.

2 主結果

条件 (a) をみたす写像は次のように特徴づけられる.

定理 2.1 ([5]) X と Y をコンパクト *Hausdorff* 空間とする．$C(X)$ から $C(Y)$ への上への写像 T が条件

(a) $\|Tf\overline{Tg}-1\|_Y = \|f\bar{g}-1\|_X \quad (f,g \in C(X))$,

(b) $T\lambda = \lambda \quad (\lambda \in \{\pm 1, \pm i\})$

を満たすならば T は $*$-同形写像である．

これは Molnár の結果の１つの拡張とみることができる．実際, (i) をみたし $T(1)=1$ である全射写像 $T: C(X) \to C(Y)$ を考えると上で見たように T は (a) をみたす．さらに, $T(1)=1$ より, 任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して, $\sigma(T\lambda) = \sigma((T\lambda)\overline{T(1)}) = \sigma(\lambda \cdot \bar{1}) = \{\lambda\}$ であることから $T\lambda = \lambda$, したがって条件 (b) をみたす．

定理 2.1 からすぐに次がわかる．

系 2.2 $C(X)$ から $C(Y)$ への上への写像 T が条件

- $\|Tf\overline{Tg}-1\|_Y = \|f\bar{g}-1\|_X \quad (f,g \in C(X))$,
- $T\lambda = \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{C})$

を満たすならば T は $*$-同形写像である．

系 2.3 $\alpha > 0$ とする．$C(X)$ から $C(Y)$ への上への写像 T が条件

- $\|Tf\overline{Tg}-\alpha\|_Y = \|f\bar{g}-\alpha\|_X \quad (f,g \in C(X))$,
- $T\lambda = \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{C})$

を満たすならば T は $*$-同形写像である．

定理 2.1 の証明における基本的な考え方は他の結果に見ることができる [1, 7, 9]．以下で定理 2.1 の証明の概要について見る．このために記号と言葉を準備する．$f \in C(X)$ に対して, $Ran_\pi(f) = \{1\}$ であるとき f は峰関数であるという．言い換えれば, f が峰関数であるとは, $\|f\|_X = 1$ かつ $|f(x)| < 1$ $(x \notin f^{-1}(1))$ をみたすときにいう．$C(X)$ の積に関する可逆元全体の集合を $C(X)^{-1}$ であらわす．

定理 2.1 の証明の概要

任意の $y \in Y$ に対して $\mathfrak{F}_Y(y) = C(Y)^{-1} \cap \{F \in C(Y) : |F(y)| = 1 = \|F\|_Y\}$ とおくと, 条件 (a) から

$$T[\mathfrak{F}_X(x)] = \mathfrak{F}_Y(y)$$

をみたす $x \in X$ が唯１つ存在する．各 $y \in Y$ に対してこの関係式をみたす $x \in X$ を対応させる写像を ϕ とおくと, ϕ は Y から X への上への同相写像であることがわかる．このとき, $C(X)$ に峰関数が豊富に存在することと条件 (b) を用いて

$$Tf = f \circ \phi \qquad (f \in C(X))$$

が示される．これより T が $C(X)$ から $C(Y)$ への上への $*$-同形写像であるとわかる．

系 2.3 の証明

$\widetilde{T}f = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}T(\sqrt{\alpha}f)$ $(f \in C(X))$ とおくと, $\widetilde{T}$ は系 2.2 の条件を満たす．したがって, $\widetilde{T}$ は $*$-同形写像である．これより, $T(f) = \sqrt{\alpha}\widetilde{T}(\frac{f}{\sqrt{\alpha}}) = \sqrt{\alpha}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\widetilde{T}(f) = \widetilde{T}(f)$, したがって $T = \widetilde{T}$ を得る．ゆえに T も $*$-同形写像である．

3　課題

1．定理 2.1 において条件 (b) は本質的か, すなわち定理 2.1 の T に対する仮定で条件 (b) をはずしたとき同様の結果が得られるか, という問題がある．このとき $T(1) = 1$ は仮定してよい．実際, (a) をみたす全射写像 $T : C(X) \to C(Y)$ を考えると $\|T(1)\overline{T(1)} - 1\|_Y = \|1 \cdot \bar{1} - 1\|_X = 0$ より $T(1)\overline{T(1)} = 1$．このとき $\widetilde{T}f = \overline{T(1)}Tf$ とおくと $\widetilde{T}$ は条件 (a) をみたす $C(X)$ から $C(Y)$ への上への写像で $\widetilde{T}(1) = 1$ をみたす．

2．定理 2.1 の条件 (a) について, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対し

$$\|Tf\overline{Tg} - \alpha\|_Y = \|f\bar{g} - \alpha\|_X \quad (f, g \in C(X))$$

として同様の結果が得られるか．

3．定理 2.1 を Banach $*$-環に一般化できないか．

(予想)　$\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ を単位的な可換 Banach $*$-環とし, T を $\mathfrak{B}_1$ から $\mathfrak{B}_2$ への上への写像とする．このとき,

- $r((Tf)(Tg)^* - 1) = r(fg^* - 1) \quad (f, g \in \mathfrak{B}_1)$,
- $T\lambda = \lambda \quad (\lambda \in \{\pm 1, \pm i\})$

ならば T は $*$-同形写像である．ここに, $r(h)$ は h のスペクトル半径をあらわす．

参考文献

[1] O. Hatori, T. Miura and H. Takagi, *Characterizations of isometric isomorphisms between uniform algebras via non-linear range-preserving properties*, Proc. Amer. Math. Soc., **134** (2006) 2923–2930.

[2] O. Hatori, T. Miura and H. Takagi, *Unital and multiplicatively spectrum-preserving surjections between semi-simple commutative Banach algebras are linear and multiplicative*, J. Math. Anal. Appl., to appear

[3] O. Hatori, T. Miura and H. Takagi, *Multiplicatively spectrum-preserving and norm-preserving maps between invertible groups of commutative Banach algebras*, preprint.

[4] D. Honma, *Surjections on the algebras of continuous functions which preserve peripheral spectrum*, Contemp. Math., to appear

[5] D. Honma, *Norm-preserving surjections on algebras of continuous functions*, preprint

[6] S. Lambert, A. Luttman and T. Tonev, *Weakly peripherally-multiplicative operators between uniform algebras*, Contemp. Math., to appear

[7] A. Luttman and T. Tonev, *Algebra isomorphisms and Ran_π-multiplicativity*, Proc. Amer. Math. Soc., to appear

[8] L. Molnár, *Some characterizations of the automorphisms of $B(H)$ and CX)*, Proc. Amer. Math. Soc., **130** (2002), 111–120.

[9] N.V. Rao and A.K. Roy, *Multiplicatively spectrum-preserving maps of function algebras*, Proc. Amer. Math. Soc., **133** (2005), 1135-1142

[10] N.V. Rao and A.K. Roy, *Multiplicatively spectrum-preserving maps of function algebras.II*, Proc. Edin. Math. Soc., **48** (2005), 219-229

[11] N.V. Rao, T.V. Tonev and E.T. Toneva, *Algebra Isomorphisms and σ_π-additivity*, Contemp. Math., to appear

可換Banach環上のある種のノルムを保存する写像

山形大学工学部共通講座　　三浦　毅 (Takeshi Miura)

本研究は Molnár による次の結果と，それを拡張する研究のさらなる一般化を目指したものである．Molnár はスペクトルに関する非常に巧妙かつ不思議な条件を設定することにより $C(X)$ 上の自己同型写像の特徴づけを与えた．ただし $C(X)$ によりコンパクト Hausdorff 空間 X 上の複素数値連続関数全体からなる可換 Banach 環を表す.

Theorem A ([10, Theorem 5]) X を第一可算コンパクト Hausdorff 空間とする．線形とも連続とも限らない全射 $T\colon C(X) \to C(X)$ が次の条件をみたすとする：

$$T(1) = 1 \quad \text{and} \quad \sigma(T(f)T(g)) = \sigma(fg) \qquad (\forall f, g \in C(X))$$

ただし $\sigma(f)$ は $f \in C(X)$ のスペクトルである．このとき同相写像 $\varphi\colon X \to X$ が存在して

$$T(f)(x) = f(\varphi(x)) \qquad (\forall f \in C(X), x \in X)$$

が成り立つ.

スペクトルを保存する線形写像の研究は [1, 2, 6] などに見られるように，多くの研究者の手によってなされている．しかし線形性を仮定しない場合，つまり

$$\sigma(T(f)) = \sigma(f) \qquad (\forall f \in C(X))$$

だけをみたすような写像は無数にあり（自己）同型写像であることは期待できない．しかし Molnár の結果によれば，単にスペクトルを保存するのではなく，積のスペクトルが保存されれば，そのような写像は自己同型写像しかないことが分かるのである．このような意味で，Molnár の導入したスペクトル条件

$$\sigma(T(f)T(g)) = \sigma(fg) \qquad (\forall f, g \in C(X)) \tag{$*$}$$

は，それ自身非常に興味深いものに思える．実際，Molnár の結果を一般化する試みが多くの数学者によってなされている ([3, 4, 7, 8, 11, 12])．Luttman and Tonev [8] は条件 $(*)$ のスペクトルを，さらにその部分集合に限定し，しかも関数環に対しても同様の結果が成り立つことを示した．そこで導入されたのが peripheral spectrum $\sigma_\pi(\cdot)$ である.

Definition 1 A を可換 Banach 環とする．このとき $f \in A$ の peripheral spectrum $\sigma_\pi(f)$ とは，次の集合である：

$$\sigma_\pi(f) = \{z \in \sigma(f) : |z| = \|\hat{f}\|_\infty\}.$$

ただし $\|\hat{f}\|_\infty = \sup_{w \in \sigma(f)} |w|$ である.

例えば可換 Banach 環 A の元 f に対して $\sigma(f) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1\}$ ならば peripheral spectrum は $\sigma_\pi(f) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ となる．また $\sigma(f) = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| \le 1\}$ ならば $\sigma_\pi(f) = \{2\}$ となる．

一般に peripheral spectrum はスペクトルの極一部でしかないが，Luttman and Tonev はスペクトル全体ではなく peripheral spectrum に写像を決定する十分な情報が含まれていることを示している．実際彼らは次の結果を示した．

Theorem B ([8, Theorem 1]) A, B を関数環とし，全射 $T\colon A \to B$ が次の条件をみたすとする：

$$T(1) = 1 \quad \text{and} \quad \sigma_\pi(T(f)T(g)) = \sigma_\pi(fg) \qquad (\forall f, g \in A).$$

このとき T は多元環としての等距離同型写像となる．

Luttaman and Tonev の結果から分かるように，条件 $(*)$ において重要な情報を含んでいるのは，スペクトル全体ではなく原点から離れた部分である．それではさらに，スペクトルの最遠点ではなく，原点からの距離を考えた場合同様の結果が得られないだろうか．つまり

$$\sigma_\pi(T(f)T(g)) = \sigma_\pi(fg) \quad \Rightarrow \quad \|\widehat{T(f)}\,\widehat{T(g)}\|_\infty = \|\hat{f}\hat{g}\|_\infty$$

としても同様の結果が得られないだろうか，と考えるのはそれほど不自然な発想ではないように思われる．残念ながら，この予想は簡単な例から否定的に解決される．しかしながら，ノルム条件を少し変えることにより写像が完全に決定されることも分かる．それが次の結果である．

Theorem 1 A, B をそれぞれ M_A, M_B を極大イデアル空間とする単位的可換 Banach 環とし，全射 $T\colon A \to B$ が次の条件をみたすとする：

$$T(\lambda) = \lambda\ (\lambda = 1, i) \quad \text{and} \quad \|\widehat{T(f)}\,\widehat{T(g)} - 1\|_\infty = \|\hat{f}\hat{g} - 1\|_\infty \qquad (\forall f, g \in A).$$

このとき同相写像 $\varphi\colon M_B \to M_A$ が存在して

$$\widehat{T(f)}(y) = \hat{f}(\varphi(y)) \qquad (\forall f \in A, y \in M_B)$$

が成り立つ．

次の結果は Theorem 1 の特別な場合であるが，重要な部分でもある．実際，Theorem 2 を適用することにより，Theorem 1 を示すことが出来る．

Theorem 2 A, B を関数環とし，全射 $T\colon A \to B$ が次の条件をみたすとする：

$$T(\lambda) = \lambda\ (\lambda = 1, i) \quad \text{and} \quad \|T(f)T(g) - 1\|_\infty = \|fg - 1\|_\infty \qquad (\forall f, g \in A).$$

このとき同相写像 $\varphi\colon \mathrm{Ch}(B) \to \mathrm{Ch}(A)$ が存在して

$$T(f)(y) = f(\varphi(y)) \qquad (\forall f \in A, y \in \mathrm{Ch}(B))$$

が成り立つ．ただし $\mathrm{Ch}(A)$ は A の Choquet 境界である．

よく知られているように，関数環には peaking function が豊富に含まれているので，それらを用いることにより Theorem 2 を示すことが出来る．一方で可換 Banach 環には，我々の手法の意味で，十分な peaking function の存在が保証されていない．もしも写像 $\hat{T}\colon \hat{A} \to \hat{B}$

$$\hat{T}(\hat{f}) = \widehat{T(f)} \qquad (\forall \hat{f} \in \hat{A})$$

が関数環 $\mathrm{cl}(\hat{A})$ まで拡張されれば，Theorem 2 を適用することにより $\hat{T}$ の形が決定されるが，筆者の力量ではそれは出来ていない．ただし $\mathrm{cl}(\hat{A})$ は $\hat{A} \subset C(M_A)$ の一様ノルムに関する閉包である．

ところが $\hat{f} \in \hat{A}^{-1}$ のとき

$$\|\hat{T}(\hat{f})\hat{T}(\hat{f}^{-1}) - 1\|_\infty = \|\widehat{T(f)}\ \widehat{T(f^{-1})} - 1\|_\infty = \|\hat{f}\hat{f}^{-1} - 1\|_\infty = 0$$

より $\hat{T}(\hat{f}^{-1}) = (\hat{T}(\hat{f}))^{-1}$ であるから $\hat{T}(\hat{A}^{-1}) = \hat{B}^{-1}$ が分かる．このことから $\mathrm{cl}(\hat{A})^{-1}$ から $\mathrm{cl}(\hat{B})^{-1}$ への全射が，$\hat{T}$ のある種の極限として定義されることが分かる．これまでの手法を振り返ると，peaking function すべてを必要とするわけではなく，可逆なものだけでも十分なことが分かるので，$\mathrm{cl}(\hat{A})^{-1}, \mathrm{cl}(\hat{B})^{-1}$ に含まれる peaking function を用いて Theorem 1 を示すことが出来る．ここでは結果及びその証明の概略を述べただけであるが，実際に証明を与えるには，筆者の知る方法ではかなりの紙面を要する．現在，ここに述べた結果を含む，より一般的な結果をいくつかの論文としてまとめているところである（[9] 参照）．したがって，詳細については今後発表する予定であるそれらの論文をご覧頂きたい．

参考文献

[1] B. Aupetit, *Spctrum preserving linear mappings between Banach algebras or Jordan-Banach algebras*, J. London Math. Soc., **62** (2000), 917–924.

[2] B. Aupetit and H. du T. Mouton, *Spectrum-preserving linear mappings in Banach algebras*, Studia Math., **109** (1994), 91–100.

[3] O. Hatori, T. Miura and H. Takagi, *Characterizations of isometric isomorphisms between uniform algebras via nonlinear range-preserving property*, Proc. Amer. Math. Soc., **134** (2006), 2923–2930.

[4] O. Hatori, T. Miura and H. Takagi, *Unital and multiplicatively spectrum-preserving surjections between semi-simple commutative Banach algebras are linear and multiplicative*, to appear in J. Math. Anal. Appl.

[5] D. Honma, *Norm-preserving surjections on algebras of continuous functions*, to appear in Rocky Mountain J. Math.

[6] A.A. Jafarian and A. Sourour, *Spectrum preserving linear maps*, J. Funct. Anal., **66** (1986), 255–261.

[7] S. Lambert, A. Luttman and T. Tonev, *Weakly peripherally-multiplicative operators between uniform algebras*, to appear in Contemp. Math.

[8] A. Luttman and T. Tonev, *Uniform algebra isomorphisms and peripheral multiplicativity*, to appear in Proc. Amer. Math. Soc.

[9] T. Miura and D. Honma, *Weakly norm-divisible mappings between commutative involutive Banach algebras*, in preparation.

[10] L. Molnár, *Some characterizations of the automorphisms of $B(H)$ and $C(X)$*, Proc. Amer. Math. Soc., **130** (2001), 111–120.

[11] N. V. Rao and A. K. Roy, *Multiplicatively spectrum-preserving maps of function algebras*, Proc. Amer. Math. Soc., **133** (2005), 1135–1142.

[12] N. V. Rao and A. K. Roy, *Multiplicatively spectrum-preserving maps of function algebras. II*, Proc. Edinburgh Math. Soc., **48** (2005), 219–229.

BANACH 環とその可逆元からなる群

羽鳥　理

$\mathbb{N}$ を自然数全体とし，$\beta\mathbb{N}$ をその Stone-Čech コンパクト化とする。$\ell^\infty(\mathbb{N})$ を複素数値有界数列全体からなる Banach 環とすると Gelfant 変換像は $C(\beta\mathbb{N})$ である。A, B は $\mathbb{N}$ の無限部分集合でで $A \cap B = \emptyset$ とする。$\bar{A}$ と $\bar{B}$ はそれぞれ A，B の $\beta\mathbb{N}$ での閉包とする。また，$a \in \bar{A} \setminus A$，$b \in B \setminus B$ とする。p を $\beta\mathbb{N}$ 以外の 1 点とし，Y を $\{p\}$ と $\bar{A}$ と $\bar{B}$ の topological sum で a と b を同一視した空間とする。このとき p は Y の孤立点なので，$\beta\mathbb{N}$ と Y は位相同形ではない。（もし同相とすると Y では A の閉包と B の閉包が共通点をもつのでへん）一方 $C(\beta\mathbb{N})^{-1}$ と $C(Y)^{-1}$ は位相群として同形かつ同相である。実際 $C(Y)^{-1}$ から $C(\beta\mathbb{N})^{-1}$ への写像 T を $f \in C(Y)^{-1}$ に対して，

$$Tf(x) = \begin{cases} f(\pi(x)), & x \in \bar{A} \\ f(p)f(\pi(x)), & x \in \bar{B} \end{cases}$$

とする。ただし π は $\beta\mathbb{N}$ から $Y \setminus \{p\}$ への自然な写像とする。このとき T は $C(Y)^{-1}$ から $C(\beta\mathbb{N})^{-1}$ への同相かつ群としての同形写像である。

N を $\{\frac{1}{n} : n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{10\}$ の 1 点コンパクト化とし無限遠点を ∞ とする。N_e を $\{\frac{1}{n} : n = 2, 4, 6, \dots\}$ の 1 点コンパクト化とし無限遠点を ∞_e とする。N_o を $\{\frac{1}{n} : n = 1, 3, 5, \dots\}$ の 1 点コンパクト化とし無限遠点を ∞_o とする。$N_e \cup N_o$ を N_e と N_o の topological sum とする。このとき $T : C(N)^{-1} \to C(N_e \cup N_o)^{-1}$ を

$$Tf(x) = \begin{cases} f(x), & x = \frac{1}{2m-1} \\ f(\infty), & x = \infty_o \\ f(10)f(x), & x = \frac{1}{2m} \\ f(10)f(x), & x = \infty_e \end{cases}$$

と定めると，T は同相かつ群としての同形写像である。一方 N と $N_e \cup N_o$ とでは同相ではない。

1. 単位的 Banach 環とその可逆元全体からなる群

Banach 環が単位元を有するとき，単位的であるという。単位的 Banach 環 A に対してその可逆元全体は積に関して群になる。それを A^{-1} で表し Banach 環 A の群（または可逆群）と呼ぶことにする。

2 つの Banach 環が多元環として同形ならば，それらの可逆群も同形である。実際，Banach 環としての同形写像が Banach 環の群の間の同形写像を誘導する。この逆を考えてみる。

問題 1. 2 つの単位的 *Banach* 環において，それらの可逆群が群として同形ならば *Banach* 環は同形か？

たとえば，X を整数係数の第 1Čech コホモロジー群が自明であるような連結コンパクト距離空間とし，$C(X)$ を X 上の複素数値連続関数全体からなる Banach 環とすると $C(X)$ の群 $C(X)^{-1}$ と 0 でない複素数全体からなる群は同形であるが $C(X)$ と複素数全体からなる Banach 環が同形になるのは X が 1 点からなる場合に限られることがわかる。単位閉区間 [0, 1] 上の複素数値連続関数全体からなる可換 Banach 環 $C([0, 1])$ の可逆群は群として同形であるが，もちろん 2 つの Banach 環は同形ではない。

1.1. **問題の背景.**

Banach 環において，その代数構造と位相構造あるいはノルムの構造の関係は見かけ上よりはるかに深く神秘的である。このような事柄は，むしろ関数解析学において特筆されるべきであり，Banach 空間が創始されたころより認識されていたと考えるのが自然である。

von Neumann や Murray による rings of operators（現代的には von Neumann algebras) の研究やあるいは Beurling, Wiener による研究の後に，抽象的な Banach 環の明確な定義を与えたのは 1936 年出版の M. Nagumo [22] であり，一般の Banach 環に対する深い研究は Nagumo [22] から始まったいえる。筆者の理解では Nagumo 以前は環の代数構造に研究の重きが置かれていたのに対して，[22] は Banach 環の位相的な性質の研究も行ったという点で大きな一歩を踏み出している。Nagumo [22] の後は代数構造と位相構造の親和性は自然に認識されたと思われる。例えば，Eidelheit [7] は Banach 空間 $\mathcal{X}$ 上の有界線形作用素全体の Banach 環 $B(\mathcal{X})$ から $B(\mathcal{Y})$ への多元環としての同形写像 (algebra isomorphism) は Banach 空間 $\mathcal{Y}$ から $\mathcal{X}$ への同相かつ線形空間としての同形写像により引き起こされること，従って $B(\mathcal{X})$ の Banach 環としてのノルムはすべて同値であることを示していて，これは automatic continuity の研究の発端になって

Date: 2006 年 12 月 3 日.

いると思われる。また Gelfand の歴史的論文 [10] は，Wiener's theorem の別証明を与えたことで夙に有名であるが，その中で半単純可換 Banach 環の Banach 環としてのノルムはすべて同値であることも示されている。その後 Banach 環の位相の一意性に関する研究は，Johnson の定理（Banach 環から半単純 Banach 環の上への準同形写像は連続である。従って，半単純 Banach 環の Banach 環としてのノルムはすべて同値である。）に結実し，さらなる研究の動機付けを与えられ現在に至るまで Banach 環の最も重要な研究分野のひとつである。

Johnson の定理を少し詳しく述べてみる：Banach 環から半単純 Banach 環の上への準同形（多元環としての）写像は連続である。少し，見方を変えるとつぎのようにもなる：Banach 環から半単純 Banach 環の上への線形写像は積を保存するならば連続である。この逆を考えてみる。つまり，Banach 環から半単純 Banach 環の上への線形写像が連続なら積を保存するか？答えは明らかに No である。考慮の余地がないようにも見えるが、"逆 "についてさらに考えてみる。

Preserver Problem の定義を勇み足を省みずに述べる：Banach 環から Banach 環への写像 T がある種の構造（例えば，線形構造などの代数構造）やある種の要素（可逆元全体，ベキ零元全体，ベキ等元全体など）を保存するとき，T は他のどのような構造や要素を保存するであろうか？となる。Johnson の定理は「半単純 Banach 環上の多元環としての同形写像はノルムの構造従って位相構造を保存する」ことを至言するので，これは Preserver Problem に対するひとつの解答を与えているといえる。

Banach 環論では他の多くの研究とともに，スペクトルを保存する線形写像の乗法性の研究が古くからなされている。これも preserver problem に対する研究のひとつであるといえる。Gleason-Kahane-Żelazko の定理 [11, 16, 33] は，Banach 環上の複素数値線形汎関数が乗法的であるための条件をスペクトルの言葉で述べた基本的な定理である。この定理から、Banach 環から半単純可換 Banach 環の上への線形写像でスペクトルを保存するものは、多元環としての同形写像であることが示される。（後者の Banach 環が非可換の場合についてはまだ決定に至っていない大問題として残されている。）スペクトル保存線形写像の源流は 100 年以上前の Frobenius の定理 [8]「n 次正方行列全体からなる Banach 環上の自己線形写像 T が行列式を保存したら，T は Jordan 射である。」に見ることができる。

スペクトルを保存する線形写像の乗法性（Jordan 射性）の研究は多くの数学者により現在も盛んに行われつつある（たとえば，[1, 4, 5, 6, 23, 30] があるが，ここではこれ以上言及しない。）。

1.2. **展開.** 可逆群は群としての構造のほかに Banach 環のノルムから誘導された位相が定まっていて，距離付け可能な位相群になっている。また，0 でない複素数を掛け算することができるような群である。以下では可逆群に群の構造のほかにこのような構造を加味して与えられた Banach 環の復元可能性につい論じたい。

問題 2. *Banach* 環の群について群の構造，距離や位相などにより *Banach* 環の構造が復元できるか？

ところで本稿では可換 Banach 環の場合を中心に論ずるが，可換であることは問題の本質ではない。非可換の Banach 環においても同様の問題が提起されようが，筆者の力量不足のため論ずることはできない。

1.3. **位相群として同形性.** 可逆群にはもとの Banach 環から自然に導かれる位相が入る。つまり，可逆群は位相群である。2 つの Banach 環の可逆群が位相群として同相かつ同形であったらもとの Banach 環は多元環として同形であると言えるだろうか？Żelazko の著書 [34] に次のような例がある。

例 [34, Remark 1.7.8]．$X_1 = [0,1] \cup \{2\}$, $X_2 = [-1, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 1]$ とする。$C(X_1)^{-1}$ から $C(X_2)^{-1}$ への写像 T を

$$Tf(y) = \begin{cases} f(y+1), & y \in [-1, -\frac{1}{2}] \\ f(2)f(y), & y \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

により与える。このとき T は同相な群同形写像である。

従って，多元環としては同形ではなく，可逆群が位相群として同相かつ同形であるような Banach 環が存在するのである。この例では $\sup \frac{\|Tf\|_{\infty(X_2)}}{\|f\|_{\infty(X_1)}} = \infty$ であり $\inf \frac{\|Tf\|_{\infty(X_2)}}{\|f\|_{\infty(X_1)}} = 0$ であるから，この同相写像 T はノルムを大きく変化させる写像である。つまり位相を保存する写像であるがノルムを考慮すると "良い " 同相写像であるとは言いがたい。

Żelazko の例では極大イデアル空間が非連結であることを利用して例を構成している。次は Shindo [29] による極大イデアル空間が連結である場合の例である。これは Tsurumi [31] の問に答えたものである。

例 [29]．$X = [0,3]$, $Y = [0,2] \cup 1 + iy : 0 \leq y \leq 1$ とする。このとき $C(X)^{-1}$ から $C(Y)^{-1}$ への同相かつ群同形な写像が存在する。

Shindo [29] は同相かつ群同形な写像を具体的に与えている。

1.4. **ノルムを保存する群準同形写像.** この節では群準同形写像がさらにノルムを保存する場合について考察する。

定理 1.1. $\mathcal{A}$ をコンパクト *Hausdorff* 空間 X 上の関数環とし，$\mathcal{B}$ をコンパクト *Hausdorff* 空間 Y 上の関数環とする。T を群 $\mathcal{A}^{-1}$ から群 $\mathcal{B}^{-1}$ の**上への**準同形写像で，$\sup \frac{\|Tf\|_{\infty(Y)}}{\|f\|_{\infty(X)}} < \infty$ かつ $\inf \frac{\|Tf\|_{\infty(Y)}}{\|f\|_{\infty(X)}} > 0$ をみたすものとする。このとき $\mathcal{B}$ の *Choquet* 境界 $\mathrm{Ch}\mathcal{B}$ から $\mathcal{A}$ の *Choquet* 境界 $\mathrm{Ch}\mathcal{A}$ の上への同相写像 ϕ が存在して，等式

$$|(T(f))(y)| = |f(\phi(y))|$$

が任意の $f \in \mathcal{A}^{-1}$ と $y \in \mathrm{Ch}\mathcal{B}$ に対して成立する。特に，任意の $f \in \mathcal{A}^{-1}$ に対して $\|Tf\|_{\infty(Y)} = \|f\|_{\infty(X)}$ が成立する。

系 1.2. X と Y をそれぞれコンパクト *Hausdorff* 空間とする。T を群 $C(X)^{-1}$ から群 $C(Y)^{-1}$ の上への準同形写像で $\sup \frac{\|Tf\|_{\infty(Y)}}{\|f\|_{\infty(X)}} < \infty$ かつ $\inf \frac{\|Tf\|_{\infty(Y)}}{\|f\|_{\infty(X)}} > 0$ をみたすものとする。このとき，$C(X)$ と $C(Y)$ は多元環として同形である。

一般に 2 つの関数環において Choquet 境界が同相であってもそれらの関数環が多元環として同形でない場合がある。定理 1.1 において $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ の同形性については筆者には不明である。一方，定理 1.1 における同相写像 ϕ の存在は 1.5 節と 1.6 節の結果を導く際に基本的である。

一般に系 1.2 における T は $C(X)$ から $C(Y)$ への線形写像に拡張できるとは限らない。しかし，定理 1.1 により（系 1.2 における）Y と X は同相であるから，対応する同相写像による合成作用素が $C(X)$ と $C(Y)$ の間の同形写像になることが分かる。

1.5. **スペクトルを保存する群準同形写像.**

定理 1.3. $\mathcal{A}$ をコンパクト *Hausdorff* 空間 X 上の関数環とし，$\mathcal{B}$ をコンパクト *Hausdorff* 空間 Y 上の関数環とする。T を群 $\mathcal{A}^{-1}$ から群 $\mathcal{B}^{-1}$ の上への準同形写像とし，

$$\sigma_\pi(T(f)) \subset \sigma_\pi(f)$$

が任意の $f \in \mathcal{A}^{-1}$ に対して成立するとする。このとき，T は $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ の上への多元環としての同形写像に拡張できる。

系 1.4. A を単位元をもつ半単純可換 *Banach* 環とする。B を単位元をもつ可換 *Banach* 環とする。T を群 A^{-1} から群 B^{-1} の上への準同形写像とし，

$$\sigma(T(a)) = \sigma(a)$$

が，任意の $a \in A^{-1}$ に対して成立するとする。このとき，B は半単純であり，さらに，T は A から B の上への多元環としての同形写像に拡張できる。

1.6. **単位元との距離を保存する準同形写像.**

定理 1.5. $\mathcal{A}$ をコンパクト *Hausdorff* 空間 X 上の関数環とし，$\mathcal{B}$ をコンパクト *Hausdorff* 空間 Y 上の関数環とする。T を可逆群 $\mathcal{A}^{-1}$ から可逆群 $\mathcal{B}^{-1}$ の上への準同形写像とし，ノルムに関する等式

$$\|T(f) - 1\|_{\infty(Y)} = \|f - 1\|_{\infty(X)}$$

が，任意の $f \in \mathcal{A}^{-1}$ に対して成立する。すると T は $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ の上への実多元環としての同形写像 T_E に拡張される。実際，$\mathcal{B}$ の *Choquet* 境界 $\mathrm{Ch}\mathcal{B}$ から $\mathcal{A}$ の *Choquet* 境界 $\mathrm{Ch}\mathcal{A}$ の上への同相写像 ϕ と $\mathrm{Ch}\mathcal{B}$ の閉かつ開集合 K が存在して，

$$(T_E(f))(y) = \begin{cases} f(\phi(y)), & y \in K, \\ \overline{f(\phi(y))}, & y \in \mathrm{Ch}\mathcal{B} \setminus K \end{cases}$$

が成立する。特に，$\mathcal{A}$ は $\mathcal{B}$ に実多元環として同形である。

定理 1.5 において 2 つの関数環 $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ は複素多元環として同形になるとは限らない。例は簡単に構成できる。

系 1.6. A と B をそれぞれ単位元をもつ半単純可換 *Banach* 環とし，T を可逆群 A^{-1} から可逆群 B^{-1} の上への準同形写像とする。このとき，以下は同値である。

(i) T はスペクトル半径に関して等距離写像である。つまり，等式

$$r(T(f) - T(g)) = r(f - g)$$

が任意の $f, g \in A^{-1}$ に対して成立する。

(ii) スペクトル半径に関する等式

$$r(T(f)-1)=r(f-1)$$

が任意の $f\in A^{-1}$ に対して成立する。

(iii) $\mathrm{cl}B$ の *Choquet* 境界 $\mathrm{Ch}(\mathrm{cl}B)$ から $\mathrm{cl}A$ の *Choquet* 境界 $\mathrm{Ch}(\mathrm{cl}A)$ の上への同相写像 ϕ と $\mathrm{Ch}(\mathrm{cl}B)$ の閉かつ開集合 K が存在して，任意の $f\in A^{-1}$ に対して

$$T(f)(y)=\begin{cases} f(\phi(y)), & y\in K,\\ \overline{f(\phi(y))}, & y\in \mathrm{Ch}(\mathrm{cl}B)\setminus K\end{cases}$$

が成立する。

(i), (ii), (iii) のいずれかが成り立てば T は $\mathrm{cl}A$ から $\mathrm{cl}B$ の上への実多元環としての同形写像 T_E で $T_E(A)=B$ であるようなものに拡張される。実際，(iii) の ϕ と K を用いて，任意の $f\in\mathrm{cl}A$ に対して

$$(T_E(f))(y)=\begin{cases} f(\phi(y)), & y\in K,\\ \overline{f(\phi(y))}, & y\in \mathrm{Ch}(\mathrm{cl}B)\setminus K\end{cases}$$

が成立する。

問題 3. 系 *1.6* において $r(T(f)-1)=r(f-1)$ や $r(T(f)-T(g))=r(f-g)$ を *Banach* 環としてのノルムに関する等式 $\|T(f)-1\|=\|f-1\|$ と $\|T(f)-T(g)\|=\|f-g\|$ に置き換えた場合でも系 *1.6* の結論と同様の結論が得られるか？関数環においてはノルムとスペクトル半径が一致することが知られているので，関数環の場合は *Yes* である。

References

[1] B. Aupetit, *Spectrum-preserving linear mapping between Banach algebras or Jordan-Banach algebras*, Jour. London Math. Soc., **62**(2000)917–924

[2] A. Browder, *Introduction to Function Algebras*, W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1969

[3] Jianlian Cui and Jinchuan Hou, *Additive maps on standard operator algebras preserving parts of the spectrum*, J. Math. Anal. Appl., **282**(2003)266–278

[4] G. Dolinar and P. Šemrl, *Determinant preserving maps on matrix algebras*, Linear Algebra Appl., **348**(2002)189–192

[5] G. Dolinar, *Maps on matrix algebras preserving idempotents*, Linear Algebra Appl., **371**(2003)287–300

[6] G. Dolinar, *Maps on $B(H)$ preserving idempotents*, Linear Mult. Algebra, **52**(2004)335–347

[7] M. Eidelheit, *On isomorphisms of rings of linear operators*, Studia Math. **9**(1940), 97–105

[8] G. Frobenius, *Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen*, Sitzurngsber. Deutsch. Akad. Wiss., Berlin, (1897)994–1015

[9] T. W. Gamelin, *Uniform Algebras*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1969 (2nd Ed., Chelsea Publishing Comp., New York, 1984)

[10] I. M. Gelfand, *Normierte Ringe*, Rec. Math. (Mat. Sbornik) N.S. 9 **51**(1941), 3–24), (German, Russian summary)

[11] A. M. Gleason, *A characterization of masimal ideals*, J. Analyse Math., **19**(1967)171–172

[12] O. Hatori, *Spectrum-preserving maps and isomorphisms*, a talk at the Fifth Conference on Function Spaces, Southern Illinois University at Edwardsville, May 2006

[13] O. Hatori, T. Miura and H. Takagi, *Characterizations of isometric isomorphisms between uniform algebras via non-linear range-preserving properties*, Proc. Amer. Math. Soc., **134**(2006), 2923–2930

[14] O. Hatori, T. Miura and H. Takagi, *Unital and multiplicatively spectrum-preserving surjections between semi-simple commutative Banach algebras are linear and multiplicative*, J. Math. Anal. Appl., **326**(2007), 281–296

[15] O. Hatori, T. Miura and H. Takagi, *Multiplicatively spectrum-preserving and norm-preserving maps between invertible groups of commutative Banach algebras*, preprint

[16] J.-P. Kahane and W. Żelazko, *A characterization of maximal ideals in commutative Banach algebras*, Studia Math., **29**(1968)339–343

[17] I. Kaplansky, “Algebraic and Analytic operator algebras”, 1970

[18] S. Kowalski and Z. Słodkowski, *A characterization of maximal ideals in commutative Banach algebras*, Studia Math., **67**(1980)215–223

[19] S. Lambert, A. Luttman and T. Tonev, *Weakly peripherally-multiplicative operators between uniform algebras*, preprint

[20] A. Luttman and T. Tonev, *Algebra isomorphisms and* RAN_π*-multiplicativity*, Proc. Amer. Math. Soc., to appear

[21] L. Molnár, *Some characterizations of the automorphisms of $B(H)$ and $C(X)$*, Proc. Amer. Math. Soc., **130**(2002), 111-120

[22] M. Nagumo, *Einige analytische Untersuchungen in linearen metrischen Ringen*, Japan J. Math., **13**(1936), 61–80

[23] M. Neal, *Spectrum preseving linear maps on JBW*-triples* Arch. Math., **79**(2002), 258–267

[24] T. Petek and P. Šemrl, *Characterization of Jordan Homomorphisms on M_n using preserver properties*, Linear Algebra and Its Appl., **269**(1998), 33–46

[25] T. Ransford, *A Cartan theorem for Banach algebras*, Proc. Amer. Math. Soc., **124**(1996), 243–247

[26] N. V. Rao and A. K. Roy, *Multiplicavively spectrum-preserving maps of function algebras*, Proc. Amer. Math. Soc., **133**(2005), 1135–1142

[27] N. V. Rao and A. K. Roy, *Multiplicavively spectrum-preserving maps of function algebras.*II, Proc. Edin. Math. Soc., **48**(2005)219–229
[28] N. V. Rao, T. V. Tonev and E. T. Toneva, *Algebra isomorphisms and σ_π-additivity*, preprint 2005
[29] R. Shindo, 可換 Banach 環とその可逆元全体からなる群の同形性について, Banach 環セミナー（筑波大学）での講演, 2006
[30] A. R. Sourour, *Invertibility preserving linear maps on $\mathcal{L}(X)$*, Trans. Amer. Math. Soc., **348**(1996)13–30
[31] K. Tsurumi, oral communication, Yonezawa 2006
[32] J. Väisälä, *A proof of the Mazur-Ulam theorem*, Amer. Math. Monthly, **110**(7)(2003), 633–635
[33] W. Żelazko, *A characterization of multiplicative linear functionals in complex Banach algebras*, Studia Math., **30**(1968)83–85
[34] W. Żelazko, "Banach Algebras", Elsivier, 1973

平成18年度関数環研究集会参加者（順不同）

御名前	御所属
細川　卓也	日本工業大学（非常勤）
植木　誠一郎	日本工業大学（非常勤）
平澤　剛	東京電機大学工学部
瀬戸　道生	神奈川大学工学部数学教室
林　実樹廣	北海道大学理学研究院
髙木　啓行	信州大学理学部
本間　大	新潟大学大学院自然科学研究科D2
三浦　毅	山形大学工学部
羽鳥　理	新潟大学自然科学系
飯田　安保	岩手医科大学教養部
山本　隆範	北海学園大学工学部
和田 淳藏	早稲田大学名誉教授
新藤　瑠美	新潟大学大学院自然科学研究科M2
丹羽　典朗	大阪電気通信大学（非常勤）
渡邉　恵一	新潟大学自然科学系
春日　一浩	
髙橋　世知子	
高山　琢磨	法政大学第1高等学校