平成１６年度関数環研究集会報告集

平成１７年６月

平成 16 年度の関数環研究集会は，平成 16 年 12 月 21 日と 12 月 22 日の 2 日間早稲田大学教育学部にて開催されました。大勢の皆様にご参加いただき九つの講演を行われました。ご講演くださった皆様はじめご参加くださいました皆様，早稲田大学の田中純一先生はじめ関係者の皆様に御礼申し上げます。

さて，平成 16 年度の関数環研究集会でご講演いただきました皆様より報告集のための原稿をお書きいただきましたので，ここに取りまとめて報告集といたします。

世話人　新潟大学理学部　羽鳥　理

平成16年度関数環研究集会プログラム

12月21日

[1]　13:30～14:10　三浦　毅（山大・留学生センター）
「正則な可換 Banach 環の全射環準同型写像による像」

[2]　14:25～15:25　平澤　剛（日工大・非常勤）
「作用素の gap metric と q-metric について」

[3]　15:45～16:15　本間　大（新大自然科学研究科・M2）
「$C(X)$ が代数的に閉じているようなコンパクト Hausdorff 空間 X についての２，３の注意」

[4]　16:30～17:00　川村　一宏（筑波大・数学系）
「Cole extension によって得られる square root closed な連続関数環」

[5]　17:10～17:40　瀬戸　道生（神奈川大・工）
「Bergman shift に関するある問題」

12月22日

[6]　10:00～10:30　泉池　耕平（新潟大自然科学研究科・D1）
「Cyclic vectors in the Fock space」

[7]　10:40～11:10　植木　誠一郎（明科高等学校・常勤）
「荷重 Bergman 空間上の荷重合成作用素」

[8]　11:20～11:50　高木　啓行（信州大・理），　植木　誠一郎（明科高等学校・常勤），
高橋　淳司（岐阜県高校教員）
「関数環上の荷重合成作用素の本質ノルム」

[9]　12:00～12:30　細川　卓也（日工大・非常勤）
「Minimum moduli of composition operators on H^∞」

世話人　新潟大学理学部　羽鳥　理

正則な可換Banach環の全射環準同型写像による像

山形大学工学部　三浦　毅(Takeshi Miura)

1　問題の背景

A, B をそれぞれ M_A, M_B を極大イデアル空間とする半単純複素可換 Banach 環とする．可換 Banach 環には和，スカラー倍，積の演算が定義されているが，ここで敢えてスカラー倍を忘れ，可換環とみることができる．このようにして，可換 Banach 環を可換環と考えたときの環としての準同型写像を我々は環準同型写像と呼ぶ：

定義 1 写像 $\rho\colon A \to B$ が環準同型写像とは次をみたすことである．

$$\rho(f+g) = \rho(f) + \rho(g) \qquad (\forall f, g \in A)$$

$$\rho(fg) = \rho(f)\rho(g) \qquad (\forall f, g \in A)$$

注意 1 環準同型写像 $\rho\colon A \to B$ がさらにスカラー倍を保存するとき，すなわち

$$\rho(\lambda f) = \lambda\rho(f) \qquad (\forall \lambda \in \mathbb{C}, f \in A)$$

をみたすとき，ρ は準同型写像と呼ばれる．

準同型写像及び環準同型写像には連続性などは一切仮定されていないことに注意されたい．

Molnár [3], Takahasi and Hatori [4] は環準同型写像の構造を調べるとともに，いくつかの具体的な可換 Banach 環の環準同型写像による像に関する結果を得た．彼らの結果を述べるために，いくつかの記号の準備をする．$C_0(X)$ は局所コンパクト Hausdorff 空間 X 上の複素数値連続関数で，無限遠点で 0 になるもの全体とし，$C^n([a,b])$ で $\mathbb{R}$ 上の閉区間 $[a,b]$ 上の n 回連続微分可能な複素数値関数全体とする．$\mathbb{D}$ を複素平面の単位開円板，$\bar{\mathbb{D}}$ をその閉包とし，$A(\bar{\mathbb{D}})$ を円板環とする．すなわち，$\bar{\mathbb{D}}$ 上の複素数値連続関数で $\mathbb{D}$ 上で解析的なもの全体のなす可換 Banach 環である．またコンパクト abel 群 G に対して，G 上の normalized Haar measure に関する L^p 空間に合成積を積としたものを $L^p(G)_*$ $(1 \le p \le \infty)$ とする．このとき $C_0(X)$, $C^n([a,b])$, $L^p(G)_*$ は正則な可換 Banach 環であり，極大イデアル空間はそれぞれ

$$M_{C_0(X)} = X,\ M_{C^n([a,b])} = [a,b],\ M_{L^p(G)_*} = \hat{G}\ (1 \le p \le \infty)$$

であることが知られている．ここに $\hat{G}$ は G の双対群である（M_A を極大イデアル空間とする複素可換 Banach 環 A が正則であるとは，任意の $x \in M_A$ 及び閉集合 $F \subset M_A : x \notin F$ に対して $\hat{f}(x) = 1$, $\hat{f}(F) = 0$ となる $f \in A$ が存在することである．ただし，$\hat{f}$ は f の Gelfand 変換である）．

以上の記号の元で，Molńar, Takahasi and Hatori の結果を述べよう：

定理 A (Molnár) 環準同型写像 $\rho\colon C_0(X) \to A(\bar{\mathbb{D}})$ は全射とはならない．

定理 B (Takahasi and Hatori) G をコンパクト abel 群，$1 \le p < \infty$ とする．また $B = L^1(\mathbb{R}^N)$ or $A(\bar{\mathbb{D}})$ or $C^n([a,b])$ とする．このとき環準同型写像 $\rho\colon L^p(G)_* \to B$ は全射とはならない．

これらの結果はそれぞれ可換 C^*-環，L^p-環上の環準同型写像の構造を考察し，その系として得られている．ここでは，上記の環を含む，より一般の環上の環準同型写像を考察することにより，これらの結果を統一的に扱うことを試みる．

2 主定理

定理 1 A を正則な複素可換 Banach 環，B を複素可換 Banach 環とし，M_A, M_B をそれぞれ A, B の極大イデアル空間とする．また $\rho\colon A \to B$ を全射環準同型写像とする．このとき次が成り立つ．

(a) B は正則である．
(b) M_A が discrete ならば M_B も discrete である．
(c) A が単位的ならば B も単位的である．

この結果を認めれば，定理 A, B は直ちに分かる．実際，全射環準同型写像 $\rho\colon C_0(X) \to A(\bar{\mathbb{D}})$ が存在したとすると，$C_0(X)$ は正則な複素可換 Banach 環であるから定理 1 (a) が適用できて，$A(\bar{\mathbb{D}})$ は可換 Banach 環として正則でなければならない．ところが，解析関数の一致の定理から直ちに分かるように，$A(\bar{\mathbb{D}})$ は正則ではない．よって $C_0(X)$ から $A(\bar{\mathbb{D}})$ への環準同型写像は全射になり得ない．

今の議論から，より一般に，次が成り立つことが分かる．

系 2 A を正則な複素可換 Banach 環とする．このとき環準同型写像 $\rho\colon A \to A(\bar{\mathbb{D}})$ は全射とはならない．

注意 2 系 2 は $A(\bar{\mathbb{D}})$ を $H^\infty(\mathbb{D})$ に置き換えても成り立つ：実際，一致の定理より $H^\infty(\mathbb{D})$ も正則ではないから．また，系 2 で $A = C_0(X)$ としたものが Molnár の，$A = L^p(G)_*$ $(1 \le p < \infty)$ としたものが Takahasi and Hatori の結果である．

次に，全射環準同型写像 $\rho\colon L_p(G)_* \to B$ が存在したとする．ここに G はコンパクト abel 群で，$1 \le p \le \infty$ とする．また $B = L^1(\mathbb{R}^N)$ or $A(\bar{\mathbb{D}})$ or $C^n([a,b])$ とする．このとき，よく知られているように G がコンパクトなので，その双対群 $\hat{G}$ は discrete である．しかも $M_{L^p(G)_*} = \hat{G}$ であるから，定理 1 (b) を適用して M_B は discrete となる．しかしながら，いずれの場合も M_B は discrete ではないので矛盾．よって $L^p(G)_*$ から B への全射環準同型写像は存在しない．

コンパクトな無限連結集合は discrete ではないから，より一般に次が成り立つ．

系 3 B をその極大イデアル空間 M_B が無限集合かつ連結であるような複素可換 Banach 環とする．このとき環準同型写像 $\rho\colon L^p(G)_* \to B$ $(1 \le p \le \infty)$ は全射にならない．

注意 3 $B = L^1(\mathbb{R}^N)$ or $C^n([a,b])$ の場合が Takahasi and Hatori の結果である．また彼らは $1 \le p < \infty$ の場合を考えているが，$p = \infty$ に対しても同様の結果が成り立つ．

最後に，G をコンパクト abel 群とするとき，本質的有界関数のなす Banach 空間 $L^\infty(G)$ には異なる積，各点での演算と合成積，が定義される：各点で積を定義したものを $L^\infty(G)$ と，合成積を積としたものを $L^\infty(G)_*$ と表すことにする．同様にして，G 上の連続関数全体 $C(G)$ にも各点での積と合成積による異なる積を考えることができる：それらを，それぞれ $C(G)$, $C(G)_*$ と表す．このとき $L^\infty(G)$, $L^\infty(G)_*$, $C(G)$ 及び $C(G)_*$ は正則な複素可換 Banach 環となる．このとき次が得られる．

系 4 G をコンパクト abel 群で，無限集合とする．

(a) 環準同型写像 $\rho\colon L^\infty(G) \to L^\infty(G)_*$ は全射にならない．
(b) 環準同型写像 $\rho\colon L^\infty(G)_* \to L^\infty(G)$ は全射にならない．
(c) 環準同型写像 $\rho\colon C(G) \to C(G)_*$ は全射にならない．
(d) 環準同型写像 $\rho\colon C(G)_* \to C(G)$ は全射にならない．

証明　ρ が全射環準同型写像であるとして矛盾を導く．

(a) G がコンパクトなので $L^\infty(G)$ は単位的．よって $M_{L^\infty(G)}$ はコンパクトである．したがって定理 1 (c) より $L^\infty(G)_*$ も単位的となる．ゆえに $M_{L^\infty(G)_*} = \hat{G}$ もコンパクトとなり，G は discrete でなければならない．G はコンパクトなので有限集合となるが，これは G が無限集合であることに反する．

(b) $\hat{G}$ は discrete なので，定理 1 (b) より $M_{L^\infty(G)}$ も discrete となるが，コンパクト性とあわせて $M_{L^\infty(G)}$ は有限集合となる．ところが G は無限集合であるから $\widehat{L^\infty(G)}$ は無限次元でなければならない．これは $M_{L^\infty(G)}$ が有限集合であることに矛盾する．

(c) $C(G)$ は単位的なので $C(G)_*$ もそう（定理 1 (c)）．よって $M_{C(G)_*} = \hat{G}$ はコンパクトとなるから G は discrete であり，これは G が無限集合であることに反する．

(d) $\hat{G}$ が discrete なので定理 1 (b) より $M_{C(G)} = G$ も discrete となり矛盾．■

3　定理 1 の証明

証明　まず $\rho\colon A \to B$ が全射環準同型写像であることから次が分かる（[1, Corollary 2.8] 参照）：連続写像 $\varphi\colon M_B \to M_A$ 及び M_B の分割 $\{M_{-1}, M_1, M_d\}$ が存在して次をみたす．任意の $y \in M_d$ に対して不連続な全射環準同型写像 $\tau_y\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が存在して

$$\widehat{\rho(f)}(y) = \begin{cases} \overline{\hat{f}(\varphi(y))} & y \in M_{-1} \\ \hat{f}(\varphi(y)) & y \in M_1 \\ \tau_y(\hat{f}(\varphi(y))) & y \in M_d \end{cases} \tag{1}$$

さらに φ 及び M_{-1}, M_1, M_d は次をみたす．

(i) φ は単射かつ閉写像．

(ii) M_{-1}, M_1, M_d は開かつ閉集合．

(iii) M_d は高々有限集合．

これを用いて主定理の証明を与えよう．

(a) 任意に $y \in M_B$ 及び閉集合 $F \subset M_B : y \notin F$ をとり固定する．φ が単射で，しかも閉写像であるから，$\varphi(F)$ は M_A の閉集合で，さらに $\varphi(y) \notin \varphi(F)$ である．よって A の正則性から

$$\hat{f}(\varphi(y)) = 1, \quad \hat{f}(\varphi(F)) = 0$$

となる $f \in A$ が存在する．ゆえに，(1) より

$$\widehat{\rho(f)}(y) = 1, \quad \widehat{\rho(f)}(F) = 0$$

すなわち B は正則である．

(b) M_A が discrete とする．このとき，任意の $y \in M_B$ に対して，$\varphi(y)$ は M_A の開集合となる．φ が単射であるから，$\{y\} = \varphi^{-1}(\varphi(y))$ は，φ の連続性から M_B の開集合となり，M_B が discrete であることが示された．

(c) A が単位元 e をもつとする．このとき (1) より任意の $y \in M_B$ に対して $\widehat{\rho(e)}(y) = 1$ が成り立つ．B が半単純であるから $\rho(e)$ は B の単位元となる． ■

参考文献

[1] T. Miura, A representation of ring homomorsphims on commutative Banach algebras, Sci. Math. Jpn. **53** (2001), 515–523.

[2] T. Miura, S.-E. Takahasi and N. Niwa, Ring homomorphisms on commutative regular Banach algebras, preprint.

[3] L. Molnár, The range of a ring homomorphism from a commutative C^*-algebra, Proc. Amer. Math. Soc. **124** (1996), 1789–1794.

[4] S.-E. Takahasi and O. Hatori, A structure of ring homomorphisms on commutative Banach algebras, Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), 2283–2288.

作用素の gap metric と q-metric について

平澤　剛 (日工大非常勤)

関数環研究集会 2004 年 12 月 21 日

早稲田大学教育学部

Hilbert 空間上の閉 (線形) 作用素の集合には gap metric により距離空間となり, いろいろな位相的性質が調べられております.

本講演では, 閉作用素を含む半閉作用素の集合に別な距離 (q-metric と呼ぶ) を入れ, いくつかの位相的性質を調べるとともに, 閉作用素の集合上では gap metric とどのような関係があるかを考察し発表した報告をする.

1　準備

まず, 記号や言葉の定義を述べておこう. 本稿を通じて作用素 (operator) とは定義域 $\mathrm{dom}(\cdot)$ を備えた有界とは限らない線形作用素のことである. $(H, (\cdot,\cdot))$ で内積 $(\cdot,\cdot)$ を備えた Hilbert 空間とする.

(1) H 上の作用素 t が closed とはグラフ

$$\{(u, tu) \in H \times H : u \in \mathrm{dom}(t)\}$$

が closed in $H \times H$ で定義する. つまり, $\mathrm{dom}(t) \ni u_n \to u$, $tu_n \to v$ ならば $u \in \mathrm{dom}(t)$, $tu = v$ が成り立つこと.

(2) H 上の作用素 s が semiclosed とはグラフ

$$\{(u, su) \in H \times H : u \in \mathrm{dom}(s)\}$$

が semiclosed in $H \times H$ で定義する. つまり, ある内積が存在して, その内積に関してグラフが完備になって (Hilbert 空間), $H \times H$ の中で連続的に埋め込まれていることである. もちろん, closed operator は そのグラフが closed なので $H \times H$ における同じ内積で Hilbert 空間となるので, (このとき, 明らかに連続的に埋め込まれている) semiclosed operator になっている.

次に登場する作用素集合の紹介をしよう.
$\mathcal{B}(H)$: H 上の bounded operators の集合
$\mathcal{CD}(H)$: closed, densely defined operators の集合

$\mathcal{C}(H)$: closed operators の集合
$\mathcal{SD}(H)$: semiclosed, densely defined operators の集合
$\mathcal{S}(H)$: semiclosed operators の集合
以上の集合の包含関係は次のようになっている.

$$\mathcal{B}(H) \subset \mathcal{CD}(H) \subset \begin{cases} \mathcal{C}(H) \\ \mathcal{SD}(H) \end{cases} \subset \mathcal{S}(H).$$

次の定理は我々の議論において基本的である.

Theorem 1.1 (W.Kaufman) 次は同値である.

(i) $s \in \mathcal{S}(H)$

(ii) 定義域 $\mathrm{dom}(s)$ が *semiclosed subspace* かつ

$$s : (\mathrm{dom}(s), \|\cdot\|_s) \longrightarrow H, \quad (\textit{bounded})$$

ここで,$\|\cdot\|_s$ は定義域 $\mathrm{dom}(s)$ を *Hilbert* 空間にする
ノルムの *1* つである.

(iii) s は作用素商で表現できる. すなわち, ある有界作用素
$A, B \in \mathcal{B}(H)$, $(\ker A \subset \ker B)$ が存在して,
$\mathrm{dom}(s) = AH$, $\mathrm{ran}(s) = BH$,

$$s = B/A : Au \to Bu, \quad u \in H$$

となる. ここで, AH とは A の値域のことである.

Remark 1.1
(ii) と (iii) に関して, (ii) で現れるノルム $\|\cdot\|_s$ と (iii) で現れる分母の $A \geq 0$
(A は正値に選ぶことができる) は次の意味で 1 対 1 の対応が付く.

$$\|\cdot\|_s \longleftrightarrow A \geq 0.$$

Hilbert 空間 $(\mathrm{dom}(s), \|\cdot\|_s)$ と *de Branges* 空間 $(AH, \|\cdot\|_A)$ が等距離同型である.

ここで, *de Branges* 空間 AH とは内積 $(Au, Av)_A := (Pu, Pv)$ によって定まる連続的に埋め込まれた *Hilbert* 空間のこと.
(P は $(\ker A)^{\perp}$ への (*orth.*) *projection.*)

次の２つの定理はよく使う性質である.

Theorem 1.2 (W.Kaufman)

$\mathcal{S}(H) \ni t = B/A$ とするとき, 次は同値.

(i) t は *closed* である.

(ii) $(A^*A + B^*B)^{1/2}H$ は *closed in* H である.

(iii) $(A^*A + B^*B)H$ は *closed in* H である.

Theorem 1.3 (Kaufman 表現)

$\mathcal{C}(H) \ni t$ とするとき, 次が一意に成り立つ.

$$t = B/(P - B^*B)^{1/2},$$

P は $\overline{\mathrm{dom}(t)}$ への *projection* である.

最後に２つの作用素商 (semiclosed operators) が等しいことの特徴付けを見て準備を終るとしよう.

$$B/A = D/C$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$B/A \subset D/C \quad \text{and} \quad B/A \supset D/C$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} B = DX \\ A = CX \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} D = BY \\ C = AY \end{cases} \quad \text{となる } X, Y \text{ が存在する.}$$

2 gap metric って何？

H: Hilbert space
$H \supset L, M$: closed subspace に対して,

$$
\begin{aligned}
g_0(L,M) &:= \sup_{x\in L,\ \|x\|=1} \operatorname{dist}(x,M) \\
&= \sup_{x\in L,\ \|x\|=1} \|x - P_M x\| \\
&= \sup_{x\in L,\ \|x\|=1} \|(1-P_M)x\| \\
&= \sup_{x\in H,\ \|x\|=1} \|(1-P_M)P_L x\| \\
&= \|(1-P_M)P_L\|,
\end{aligned}
$$

と定義する. ただし, P_L, P_M は L, M への projection.
　これを用いて,

$$g(L,M) := \max\{g_0(L,M),\ g_0(M,L)\}$$

と定義すると, いくつかの補題を使って $\|P_L - P_M\|$ に等しいことがわかる. 従って, g は closed subspaces の集合上の距離を与える.
　そこで, $s,t \in \mathcal{C}(H)$ のとき, グラフ $G(s)$, $G(t)$ は closed subspace なので, $\mathcal{C}(H)$ に距離 g (gap metric) を次のように入れることができる.

$$g(s,t) := g(G(s),G(t)) = \|P_s - P_t\|.$$

ただし, P_s, P_t はグラフ $G(s)$, $G(t)$ in $H \times H$ への projection.
　さて, 次に gap metric g と同値な p-metric を導入してみよう. というのは, 本稿では gap metric による収束を考察するときは代わりに同値な p-metric を計算することになるから.
　まず, $s,t \in \mathcal{C}(H)$ に対して, Kaufman 表現を与えておく.

$$
\begin{aligned}
s &\overset{K}{=} B/A, \quad A = (P - B^*B)^{1/2}, \\
t &\overset{K}{=} D/C, \quad C = (Q - D^*D)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

ただし, P, Q はそれぞれ $\overline{\mathrm{dom}(s)}$, $\overline{\mathrm{dom}(t)}$ への projection. これらの表現をもとに, s と t のグラフ $G(s)$, $G(t)$ への projection は次で与えられることが知られている.(H.O.Cordes, J.P.Labrousse)

$$P_s = \begin{pmatrix} A^2 & AB^* \\ BA & BB^* \end{pmatrix}, \quad P_t = \begin{pmatrix} C^2 & CD^* \\ DC & DD^* \end{pmatrix}$$

この作用素行列を使って gap metric g と同値な距離 p-metric を求めていく. そこで, $s, t \in \mathcal{C}(H)$ に対して,

$$\begin{aligned} \{g(s,t)\}^2 &= \|P_s - P_t\|^2 \\ &= \left\| \begin{pmatrix} A^2 - C^2 & AB^* - CD^* \\ BA - DC & BB^* - DD^* \end{pmatrix} \right\|^2 \\ &\leq 2\Big\{ \|A^2 - C^2\|^2 + \|AB^* - CD^*\|^2 \\ &\qquad + \|BA - DC\|^2 + \|BB^* - DD^*\|^2 \Big\} \\ &= 2\Big\{ \|A^2 - C^2\|^2 + \|BB^* - DD^*\|^2 + 2\|BA - DC\|^2 \Big\}. \end{aligned}$$

となって, 上からの評価が得られる. また, 下からの評価も少しの計算でわかり, まとめると次のようになる.

Theorem 2.1 (H.O.Cordes, J.P.Labrousse) $s, t \in \mathcal{C}(H)$ に対して *Kaufman* 表現しておく.

$$s \overset{K}{=} B/A, \quad A = (P - B^*B)^{1/2},$$

$$t \overset{K}{=} D/C, \quad C = (Q - D^*D)^{1/2}.$$

$$p(s,t) := \Big\{ \|A^2 - C^2\|^2 + \|BB^* - DD^*\|^2 + 2\|BA - DC\|^2 \Big\}^{1/2}$$

と定義すると, p は $\mathcal{C}(H)$ における距離を与える.
さらに, *p-metric* は *gap metric* g と (次の意味で) 同値である.

$$g(s,t) \leq \sqrt{2} p(s,t) \leq 2g(s,t), \quad \forall s, t \in \mathcal{C}(H).$$

Remark 2.1
特に, $s, t \in \mathcal{CD}(H)$ のときは
$A = (1 - B^*B)^{1/2}$, $C = (1 - D^*D)^{1/2}$ となるので,

$$\begin{aligned} p(s,t) = \Big\{ &\|B^*B - D^*D\|^2 + \|BB^* - DD^*\|^2 \\ &+ 2\|B(1 - B^*B)^{1/2} - D(1 - D^*D)^{1/2}\|^2 \Big\}^{1/2}, \end{aligned}$$

となる.

3 gap metric の位相的性質

ここでは, gap metric のすでに知られている性質の中で後で関わりのあるものについて列挙してみる.

Theorem 3.1 (T.Kato, Perturbation Theory...)

$(\mathcal{C}(H), g)$ は完備でない.

Theorem 3.2 (H.O.Cordes, J.P.Labrousse)

$\mathcal{B}(H)$ は $(\mathcal{C}(H), g)$ で *open* である.

Theorem 3.3 (T.Kato, Perturbation Theory...)

$s = s^*$ (*selfadjoint*) とする. このとき, ある $\delta > 0$ が存在して,

$$g(s,t) < \delta$$

を満たす任意の *symmetric operator* $t \in \mathcal{CD}(H)$ は *selfadjoint* $t = t^*$ である.

Symmetric : $t \subset t^*$ のことである.

4 q-metric とは何か?

semiclosed operator の集合 $\mathcal{S}(H)$ に距離を入れてみる. そこで, semiclosed operator の定義域になり得る部分空間 (Theorem 1.1 によりそれは operator range のことであった) にあらかじめ Hilbert ノルムを 1 つづつ与えておくこととする. この与え方をここでは α と書くこととする.

Remark 1.1 によると, α とはある正値有界作用素の集合のことである. というのは, α に属す任意の Hilbert ノルムはある正値有界作用素に 1 対 1 対応しているから. 従って, α は $\mathcal{B}(H)$ の部分集合である. もっと言えば, 部分距離空間とみなすことができる.

以上のもとで, q-metric を導入しよう. 任意に 1 つ α を与え, 固定しておく.

$\forall s,t \in \mathcal{S}(H)$ に対して, $\mathrm{dom}(s) = AH$, $\mathrm{dom}(t) = CH$ となる $A, C \in \alpha$ が存在する. この A, C を用いて

$$s \overset{\alpha}{=} B/A, \quad t \overset{\alpha}{=} D/C \text{ と表しておいて,}$$

次のように q-metric を定義する.

$$q(s,t) := \|A - C\| + \|B - D\|.$$

すると,

Proposition 4.1

$$(\mathcal{S}(H), q) \text{ は距離空間になる.}$$

5 q-metric の位相的性質

3. gap metric の位相的性質 のところで列挙した性質と比較してみるために, まず距離空間 $(\mathcal{S}(H), q)$ は完備か？を考えてみた. もちろん, 指定 α によって完備性が変わってくる可能性がある. α を $\mathcal{B}(H)$ の部分距離空間とみなして考察した結果が次である.

Proposition 5.1

(1) α が *closed* でないならば $(\mathcal{S}(H), q)$ は完備でない.

(2) α を *closed* とする.

(i) もし α が孤立点だけからなるときは,$(\mathcal{S}(H), q)$ は完備である.

(ii) もし α に集積点が存在するときは, 任意の集積点 A に対して, AH が *dense in* H ならば $(\mathcal{S}(H), q)$ は完備である.

この Proposition 5.1 はすべての α についてのケースを考察しきっているわけではない. α に集積点 A が存在して, AH が H で稠密でないときは完備かどうか分からない.

次に, semiclosed operators の集合 $\mathcal{S}(H)$ に含まれる bounded operators の集合 $\mathcal{B}(H)$ や closed operators の集合 $\mathcal{C}(H)$ の位相的性質を見てみよう.

Theorem 5.2

$$(\mathcal{S}(H), q) \text{ において } \mathcal{B}(H) \text{ は連結成分である.}$$

Theorem 5.3

$$(\mathcal{S}(H), q) \text{ において } \mathcal{C}(H) \text{ は } open \text{ である.}$$

発表では clopen であると書いたのですが, open に訂正致します. Theorem 1.2 によれば, $\mathcal{C}(H) \ni t \overset{\alpha}{=} D/C$ であることと, $R := C^2 + D^*D$ が closed range をもつこととは同値であった. このとき, Theorem 5.3 は十分 t に近いとまた $\mathcal{C}(H)$ に属すと言っているが, どのくらい近ければいいのか？これに関しては次のようなことがいえる.

Remark 5.1

$$q(t, s) < \min\Big\{1,\ \frac{\gamma}{4(1 + \|C\| + \|D\|)}\Big\},$$

を満たす $s \in \mathcal{S}(H)$ は *closed* である.
ただし, $\gamma > 0$ は R の *lower bound* である：

$$\|Ru\| \geq \gamma\|u\|, \quad u \in (\ker R)^{\perp}.$$

上の Theorem 5.3 などを使うと次の結果が得られた.

Theorem 5.4

$s = s^*$ (*selfadjoint*) とする. このとき, ある $\delta > 0$ が存在して,

$$q(s, t) < \delta$$

を満たす任意の *symmetric operator* t ($t \subset t^*,\ t \in \mathcal{SD}(H)$) は *selfadjoint* $t = t^*$ となる.

selfadjoint operator s は closed なので, 十分近い作用素は自動的に closed になっているので (Theorem 5.3), symmetric operator t は closed として考えられることが大いに助かる.

6 gap metric と q-metric の関係

ここでは, q-metric を closed operators の集合 $\mathcal{C}(H)$ に制限したとき gap metric との関係を考察していく.

$\mathcal{C}(H) \ni s_n, s\ (n \geq 1)$ に対して,

$$s_n \stackrel{\alpha}{=} D_n/C_n, \quad s \stackrel{\alpha}{=} D/C.$$

定義域 $\mathrm{dom}(s_n)$ にはあらかじめ指定 α によるノルム $\|\cdot\|_{C_n}$ が与えられている. すなわち, $v \in \mathrm{dom}(s_n) = C_nH$ に対して, $\|v\|_{C_n} = \|C_nu\|_{C_n} = \|u\|$, $v = C_nu$, $u \in (\ker C_n)^{\perp}$ というものである. また, そこの定義域には作用素 s_n によるグラフノルム $\|\cdot\|_{s_n}$ がある. すなわち, $v \in \mathrm{dom}(s_n)$ に対して, $\|v\|_{s_n}^2 = \|v\|^2 + \|s_nv\|^2$ で定義されているものである.

さて, 我々が今から述べる結果 (Theorem 6.1) は, 閉作用素の列 $\{s_n\}$ がある閉作用素 s に **ある条件** のもとで, q-metirc で収束しているならば gap metric でも収束していることを主張するものである. 従って, 誤解を与えないために前もって述べておくと, これは列に対する結果であることを強調しておく必要があるかもしれない. ところが, 列が **稠密に定義された** 閉作用素のときは, **ある条件** がいらないことがわかる.(Corollary 6.4)

Theorem 6.1 $\mathcal{C}(H) \ni s_n,\ s\ (n \geq 1)$ とする.

$$s_n \stackrel{\alpha}{=} D_n/C_n, \quad s \stackrel{\alpha}{=} D/C.$$

このとき, 次の条件 (**ある条件**) が成立しているとする.

$$\exists k > 0, \quad \forall n, \quad \forall v \in \mathrm{dom}(s_n), \quad \|v\|_{C_n} \leq k\|v\|_{s_n}.$$

この仮定条件のもとで,

$$q(s, s_n) \to 0 \quad \text{ならば} \quad g(s, s_n) \to 0,\ (n \to \infty).$$

定理 6.1 の証明.

$$s_n \stackrel{\alpha}{=} D_n/C_n \stackrel{K}{=} B_n/A_n, \quad A_n = (P_n - B_n^*B_n)^{1/2} \tag{1}$$

$$s \stackrel{\alpha}{=} D/C \stackrel{K}{=} B/A, \quad A = (P - B^*B)^{1/2} \tag{2}$$

(1) より,

$$\begin{cases} B_n = D_nX_n, \\ A_n = C_nX_n, \quad \ker X_n^* \supset \ker C_n, \end{cases} \begin{cases} D_n = B_nY_n, \\ C_n = A_nY_n, \quad \ker Y_n^* \supset \ker A_n. \end{cases}$$

(2) より, 上と同様に

$$\begin{cases} B = DX, \\ A = CX, \quad \ker X^* \supset \ker C, \end{cases} \begin{cases} D = BY, \\ C = AY, \quad \ker Y^* \supset \ker A. \end{cases}$$

以上の表現のもとで, 我々は何を議論したいのかと言うと, $q(s, s_n) \to 0$ のとき, すなわち $C_n \to C,\ D_n \to D$ ならば, $p(s, s_n) \to 0$, つまり,

$$\begin{cases} P_n - B_n^* B_n \longrightarrow P - B^* B \\ B_n B_n^* \longrightarrow BB^* \\ B_n (P_n - B_n^* B_n)^{1/2} \longrightarrow B(P - B^* B)^{1/2} \end{cases}$$

を示すことである. ところが, 残念ながら無条件ではいえず, **ある条件** を仮定しないとだめだった, という話しである.

さて, (1), (2) の式から ($C_n \to C, D_n \to D$ の仮定のもとで)

$$\begin{aligned} P_n - B_n^* B_n = C_n X_n X_n^* C_n &\longrightarrow P - B^* B = CXX^*C \\ B_n B_n^* = D_n X_n X_n^* D_n^* &\longrightarrow BB^* = DXX^*D^* \\ B_n (P_n - B_n^* B_n)^{1/2} = D_n X_n X_n^* C_n &\longrightarrow B(P - B^* B)^{1/2} = DXX^*C \end{aligned}$$

なので, $X_n X_n^* \longrightarrow XX^*$ を示すことが目標である. まず, 次が成り立つことがわかる.

$$Y_n^* Y_n \longrightarrow Y^* Y$$

証明.

$$\begin{aligned} P_n - B_n^* B_n &= X_n^* C_n^2 X_n \\ B_n^* B_n &= X_n^* D_n^* D_n X_n \end{aligned}$$

より, 次式が得られる.

$$P_n = X_n^* (C_n^2 + D_n^* D_n) X_n.$$

この式の左から Y_n^*, 右から Y_n をかけると,

$$\begin{aligned} Y_n^* P_n Y_n &= Y_n^* X_n^* (C_n^2 + D_n^* D_n) X_n Y_n \\ &= Y_n^* X_n^* C_n^2 X_n Y_n + Y_n^* X_n^* D_n^* D_n X_n Y_n \\ &= C_n^2 + D_n^* D_n. \end{aligned}$$

一意性条件 $\ker Y_n^* \supset \ker (P_n - B_n^* B_n)^{1/2}$ より,

$$Y_n H \subset \overline{(P_n - B_n^* B_n)^{1/2} H} = \overline{\mathrm{dom}(s_n)} = P_n H$$

より,$Y_n^* P_n Y_n = Y_n^* Y_n$ となるので,

$$Y_n^* Y_n = C_n^2 + D_n^* D_n \longrightarrow C^2 + D^* D = Y^* Y$$

となって証明された.

では, 果たして $Y_n^* Y_n \longrightarrow Y^* Y$ から $X_n X_n^* \longrightarrow X X^*$ は言えるのであろうか？

そこで, Y_n と X_n の関係を調べてみた.

$$Y_n = X_n^\dagger$$

ただし, $X_n^\dagger$ は X_n の一般化逆作用素である. つまり, X_n は閉値域をもつのである.

閉値域をもつことの理由.

$A_n = C_n X_n = X_n^* C_n, \quad \ker X_n^* \supset \ker C_n$ より

$$A_n / C_n \subset X_n^*, \quad \text{natural extension}$$

ここで, natural extension とは定義域の閉包まで作用素の連続性 (有界性) でもって拡張し, さらにその直交補空間での値を 0 とすることで得られる H 全体で定義された有界作用素のこと. A_n/C_n は有界で 1 対 1 なので, 定義域をその閉包 $\overline{C_n H}$ まで拡張すると値域 $A_n H$ もその閉包 $\overline{A_n H}$ まで広がる. 従って,

$$X_n^* H = \overline{A_n H}.$$

よって, X_n^* は閉値域をもつので, X_n も閉値域をもつことがわかる. (一般化逆作用素が存在する.) さて,

$$Y_n^* Y_n = X_n^{\dagger *} X_n^\dagger = X_n^{* \dagger} X_n^\dagger \overset{?}{=} (X_n X_n^*)^\dagger$$

において, ? は成立するのであろうか.

一般に A, B, AB が閉値域を持つと仮定しても, $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ は成り立つとは限らない. 成り立つ必要十分条件を与えるのが次の補題である.

Lemma 6.2 (R. Bouldin)

A, B, AB が閉値域をもつとき, 次は同値である.

(1) $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$

(2) $(AB)^\dagger (AB) = B^\dagger A^\dagger AB$ かつ $(AB)(AB)^\dagger = ABB^\dagger A^\dagger$

この補題を適用して, $A = X_n$, $B = {X_n}^*$ と考えることによって上の式の ? が成立することがわかる. 従って, 次が成立する.

$$Y_n^* Y_n \longrightarrow Y^* Y \quad \Longleftrightarrow \quad (X_n X_n^*)^\dagger \longrightarrow (XX^*)^\dagger$$

さて, これらから $X_n X_n^* \longrightarrow XX^*$ が導かれるのだろうか？

これを見ていくために次の補題を適用する.

Lemma 6.3 (S. Izumino)

$$A_n, A \in \mathcal{B}(H)\ (n \geq 1)\ \text{が閉値域をもつとし}, A_n \to A\ (\textit{uniformly})$$

とする. このとき,

$$A_n^\dagger \to A^\dagger\ (\textit{uniformly}) \quad \Longleftrightarrow \quad \sup_n \|A_n^\dagger\| < \infty.$$

すると, $A_n = (X_n X_n^*)^\dagger$ と考えることによって,

$$\sup_n \|X_n X_n^*\| = \sup_n \|X_n\|^2 < \infty, \tag{3}$$

であれば $X_n X_n^* \longrightarrow XX^*$ が言えることがわかる. ここで $(X_n X_n^*)^{\dagger\dagger} = X_n X_n^*$ であることを使った. では, この (3) の同値条件を考えていこう.

$A_n/C_n \subset X_n^*$, (natural extension) から,

$$\sup_u \frac{\|A_n u\|}{\|C_n u\|} = \|X_n^*\|,$$

がわかる. 従って, 次のような同値条件 (i) ～ (v) が得られる.

(i) $\exists k > 0, \quad \sup_n \|X_n X_n^*\| = \sup_n \|X_n\|^2 \leq k^2.$

(ii) $\exists k > 0, \quad \forall n, \quad \sup_u \frac{\|A_n u\|}{\|C_n u\|} \leq k.$

(iii) $\exists k > 0, \quad \forall n, \quad \forall u \in H, \quad \|A_n u\| \leq k \|C_n u\|.$

(iv) $\exists k > 0, \quad \forall n, \quad \forall v \in A_n H = C_n H, \quad \|v\|_{C_n} \leq k \|v\|_{A_n}.$

(v) $\exists k > 0, \quad \forall n, \quad \forall v \in \mathrm{dom}(s_n), \quad \|v\|_{C_n} \leq k \|v\|_{s_n}.$

(iii) ～ (v) の同値性は少し補足する必要があろう. (iii) と (iv) は de Branges space ノルムと通常のノルムの関係を与える次のよく知られている等式を利

用する. 今のケースは A_n は正値なので以下の adjoint $*$ はいらない.

$$\|v\|_{A_n} = \sup_u \frac{|(u,v)|}{\|A_n^* u\|},\ v \in A_n H.$$
$$\|A_n^* u\| = \sup_{v \in A_n H} \frac{|(u,v)|}{\|v\|_{A_n}},\ u \in H.$$

また, (iv) と (v) の同値性は A_n の de Branges norm $\|\cdot\|_{A_n}$ は s_n のグラフノルム $\|\cdot\|_{s_n}$ に一致することをみればよい. それは,

$$\begin{aligned}\|v\|_{s_n}^2 &= \|v\|^2 + \|s_n v\|^2 \\ &= \|(P_n - B_n^* B_n)^{1/2} u\|^2 + \|B_n u\|^2, \quad v = (P_n - B_n^* B_n)^{1/2} u \in \mathrm{dom}(s_n) \\ &= ((P_n - B_n^* B_n)^{1/2} u, (P_n - B_n^* B_n)^{1/2} u) + (B_n u, B_n u) \\ &= ((P_n - B_n^* B_n) u, u) + (B_n^* B_n u, u) \\ &= (P_n u, u) = \|P_n u\|^2 = \|v\|_{A_n}^2\end{aligned}$$

からわかる. ここで, P_n は $\overline{\mathrm{dom}(s_n)} = \overline{A_n H} = (\ker A_n)^\perp$ への projection であったことに注意する.

長くなったが以上のことをまとめると, (v) の条件のもとで, $q(s, s_n) \to 0$ (i.e. $\mathrm{C_n} \to \mathrm{C}, \mathrm{D_n} \to \mathrm{D}$) と仮定すると,

$$X_n X_n^* \longrightarrow X X^*$$

となることがわかり, 結局

$$\begin{aligned}P_n - B_n^* B_n = C_n X_n X_n^* C_n &\longrightarrow P - B^* B = C X X^* C \\ B_n B_n^* = D_n X_n X_n^* D_n^* &\longrightarrow B B^* = D X X^* D^* \\ B_n (P_n - B_n^* B_n)^{1/2} = D_n X_n X_n^* C_n^* &\longrightarrow B(P - B^* B)^{1/2} = D X X^* C^*.\end{aligned}$$

故に,

$$p(s, s_n) \to 0,\ \text{すなわち}\ g(s, s_n) \to 0.$$

証明終り

本章の冒頭で述べたように, 列が稠密に定義された閉作用素のときは (**ある条件** (v)) はいらないことをみてみよう. それは, 上の証明にあらわれる関係 $Y_n = {X_n}^\dagger$ が $Y_n = {X_n}^{-1}$ となるからである. 従って, $Y_n^* Y_n \longrightarrow Y^* Y$ は $(X_n X_n^*)^{-1} \longrightarrow (X X^*)^{-1}$ と同値となり, さらに $X_n X_n^* \longrightarrow X X^*$ と同値となる. よって,

$$\sup_n \|X_n X_n^*\| = \sup_n \|X_n\|^2 < \infty$$

となり, (v) を満たすことがわかる. 以上から,

Corollary 6.4

$\mathcal{CD}(H) \ni s, s_n$ $(n \geq 1)$ のとき,

$$q(s, s_n) \to 0 \quad \text{ならば} \quad g(s, s_n) \to 0 \text{である.}$$

Remark 6.1 つまり, 稠密に定義された閉作用素の集合 $\mathcal{CD}(H)$ 上では *gap metric* より *q-metric* の位相のほうが強いということ. 細かく言うと, いかなる指定 α による *q-metric* のほうが強いことを意味する.

References

[1] R.Bouldin, *Generalized inverses and factorizations*, Recent Application of Generalized Inverses edited by M.Z.Nashed.

[2] H.O.Cordes, J.P.Labrousse, *The Invariance of the Index in the Metric Space of Closed Operators*, J. Math. Mechanics, 12(5) (1963), 693-719.

[3] S.Izumino, *Convergence of generalized inverses and spline projectors*, J. Approx. Theory 38 (1983), 269-278.

[4] T.Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[5] W.E.Kaufman, *Representing a closed operator as a quotients of continuous operators*, Proc. Amer. Math. Soc., 72 (1978), 531-534.

[6] W.E.Kaufman, *Semiclosed operators in Hilbert space*, Proc. Amer. Math. Soc., 76 (1979), 67-73.

[7] W.E.Kaufman, *Closed operators and pure contractions in Hilbert space*, Proc. Amer. Math. Soc., 87 (1983), 83-87.

C(X)が代数的に閉じているようなコンパクト Hausdorff空間X

新潟大学大学院自然科学研究科博士後期過程１年生　　本間　大
(Dai Honma)

$\mathbb{C}$ を複素数全体の集合、$\mathbb{Z}$ を整数全体の集合、$\mathbb{N}$ を自然数全体の集合とする. X をコンパクト *Hausdorff* 空間とする. このとき、$C(X)$ により X 上の $\mathbb{C}$ 値連続関数全体の集合を表す. すると $C(X)$ は関数の通常の演算及び sup ノルムにより単位的可換 Banach 環を成している.

n を自然数、$a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ を $C(X)$ の要素とするとき、

$$P(x,z) = z^n + a_{n-1}(x)z^{n-1} + \cdots + a_0(x) \qquad (x \in X, z \in \mathbb{C})$$

を $C(X)$ 上の monic 多項式という.

定義 1 $C(X)$ 上の任意の *monic* 多項式 $P(x,z)$ による方程式 $P(x,z)=0$ に対して、

$$P(x, f(x)) = 0 \qquad (x \in X)$$

を満たす $f \in C(X)$ が存在するとき、$C(X)$ は代数的に閉じているという.

定義 2 $C(X)$ の任意の要素 f に対して、$f = g^2$ なる $g \in C(X)$ が存在するとき、$C(X)$ は平方根に関して閉じているという.

定義より代数的に閉じている $C(X)$ は平方根に関しても閉じていることが分かる. $C(X)$ が代数的に閉じているという性質や平方根に関して閉じているという性質は、X の位相構造に本質的に依存すると考えられる.

例 1 ([2]) 閉区間 $[0,1]$ に対して、$C([0,1])$ は代数的に閉じている.

例 2 単位円周 $S^1 = \{z : z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ において、S^1 上の恒等関数 z を考えると、$z = g^2$ なる $g \in C(S^1)$ は存在しない. ゆえに $C(S^1)$ は平方根に関して閉じておらず、したがって代数的にも閉じていない.

上の例から単位円周 S^1 を含むような X についても $C(X)$ は平方根に関して閉じてはいない. したがって、代数的に閉じているあるいは平方根に関して閉じているような $C(X)$ に対応する X は ”2 次元 ”以上ではないようにも見える. 実際、X が局所連結の場合は $C(X)$ が平方根に関して閉じていること（または代数的に閉じていること）が X の被覆次元と *Čech* cohomology 群の言葉で特徴付けられている ([3, 5]). 局所連結でない場合についてはまだ未解決である. 一方、X が第一可算公理をみたす場合についての研究も古くからなされている ([1]).

定義 3 位相空間 T が *hereditarily unicherent* であるとは、任意の連結閉集合 M,N に対して、その共通部分 $M \cap N$ がまた連結となることである.

定義 4 位相空間 T が *almost locally connected* であるとは、T が次を満たす互いに素な連結閉集合族 $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を含まないことである：各 C_n は $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ の閉包における開集合であり、$x_n, y_n \in C_n$ として得られる点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ で異なる点に収束するものが存在する.

例 3 閉区間 $[0,1]$ は *hereditarily unicoherent* である.

例 4 単位円周 S^1 は *hereditarily unicoherent* でない.

例 5 $n \in \mathbb{N}$ に対して、$I_n = \{1/n\} \times [-1/n, 1/n]$,$I_0 = \{0\} \times \{0\}$ とおく. このとき、$I = \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n$ は *almost locally connected* である.

例 6 $n \in \mathbb{N}$ に対して、$I_n = \{1/n\} \times [-1,1]$,$I_0 = \{0\} \times [-1,1]$ とおく. このとき、$I = \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n$ とおくと、 I は *almost locally connected* でない.

X が第一可算公理を満たす場合、$C(X)$ が代数的に閉じていることと平方根に関して閉じていることが同値であることが知られている ([1]). また、$C(X)$ が代数的に閉じていることは、X の位相的性質により特徴付けられてもいる ([1, 5]).

定理 1 *([5])* X を第一可算公理を満たすコンパクト *Hausdorff* 空間とする. このとき以下は同値である.

(1) $C(X)$ は代数的に閉じている.

(2) $C(X)$ は平方根に関して閉じている.

(3) X は *hereditarily unicoherent* かつ *almost locally connected* である.

(4) X は *almost locally connected* であり、任意の連結成分 X_λ に対して X_λ は局所連結、$\dim X_\lambda \leq 1$ かつ $\check{H}^1(X_\lambda, \mathbb{Z})$ は自明な群である. ここで、$\dim X_\lambda$ は X_λ の被覆次元を表し、$\check{H}^1(X_\lambda, \mathbb{Z})$ は X_λ の定数層 $\mathbb{Z}$ に係数を持つ 1 次の *Čech cohomology* 群を表す.

上の条件 (4) を多少改良することができた. 次の条件 (4′) も上の (1) から (4) と同値であることを示すことができた.（cf.[4])

(4′) X は *almost locally connected* であり、$\dim X \leq 1$ かつ $\check{H}^1(X, \mathbb{Z})$ は自明な群である.

参考文献

[1] R. S. Countryman Jr., *On the characterization of compact Hausdorff X for which $C(X)$ is algebraically closed*, Pacific J. Math. **20**(1967) 433–448

[2] D. Deckard and C. Pearcy, *On matrices over the ring of continuous complex-valued functions on a Stonian space*, Proc. Ame. Math. Soc. bf 14(1963), 322–328

[3] O. Hatori and T. Miura, *On a characterization of the maximal ideal spaces of commutative C^*-algebras in which every element is the square of another*, Proc. Amer. Math. Soc. **128**(2000), 1185–1189.

[4] K. Kawamura and T. Miura, *On the existence of continuous (approximate) roots of algebraic equations* Preprint

[5] T. Miura and K. Niijima, *On a characterization of the maximal ideal spaces of algebraically closed commutative C^*-algebras.*, Proc. Amer. Math. Soc. **131**(2003), 2869–2876

[6] A.R. Pears, *Dimension theory of general spaces*, Cambridge,1975

Cole extensionによって得られるsquare-root closed 連続関数環

筑波大学数理物質科学研究科　川村一宏 (Kazuhiro Kawamura)

1　序論

compact Hausdorff 空間 X 上の複素数値連続関数環を $C(X)$ で表す。Gel'fand の表現定理から，任意の可換 unitalC* 環 A に対して，$C(X)$ が A と同型であるような compact Hausdorff 空間 X が位相同型を除いて一意的に決まる。この意味で可換 C^* 環の研究は X のトポロジーの研究に帰着する。しかしながら環 $C(X)$ の代数的な性質が X のトポロジーとどの様に関わるのか，未だ十分理解されているとは言えない様に思われる．本稿では次の問題について考察する。連続関数環 $C(X)$ が **代数的閉** であるとは，$C(X)$ に係数を持つ任意の monic な代数方程式が $C(X)$ に根を持つことである。

問題 A：$C(X)$ が代数的閉であるような compact Hausdorff 空間 X の位相的特徴付けを与えよ。

Deckard-Pearcy[3] は，X が完全不連結なら $C(X)$ はつねに代数的閉であることを示した。これに加えて現段階で得られている最良の結果は以下のものである。

定理 1.1 ([6], [7] 及び本報告集本間大氏の論説) *X は第一可算 compact Hausdorff 空間とする。このとき以下は同値である。*

(1) $C(X)$ は代数的閉,

(2) $C(X)$ は *sqaure-root closed,*　即ち任意の $f \in C(X)$ に対して、$g^2 = f$ をみたす $g \in C(X)$ が存在する。

(3) $\dim X \leq 1$ かつ $\check{\mathrm{H}}^1(X) = 0$，ここで $\dim X$ は X の被覆次元を表し，また $\check{\mathrm{H}}^1(X)$ は X の整数係数１次元チェックコホモロジーを表す.

次の結果は上の定理において第一可算性が果たす役割を示唆するものである。

Proposition 1.2 ([2]) *第一可算 compact Hausdorff 空間 X に対し、$C(X)$ が square-root closed とする。このとき X の任意の連結閉部分集合はつねに局所連結である。*

上の命題を用いると，例えば定理 1.1 の一部：
「X が第一可算 compact Hausdorff 空間で $C(X)$ が square-root closed $\Rightarrow$ dim $X \leq 1$」
は次の様に示される．

$C(X)$ が square-root closed なら X の任意の連結成分 K に対して,（K は X の閉集合だから）$C(K)$ も square-root closed である．上の命題から K の任意の連結閉部分集合は局所連結である．このことから $\dim K \leq 1$ が従うことが古典的に知られている ([8] 参照)．ここで本間氏の結果を適用すると $\dim X \leq 1$ が得られる．

さて冒頭に述べた Gel'fand の表現定理を勘案すれば，第一可算とは限らない compact Hausdorff 空間に対しても問題Aを考察することは自然であると思われる．そのための一つのステップとして以下のような問題を考える。

問題 B（未解決）X を（第一可算とは限らない）compact Hausdorff 空間とする。このとき $C(X)$ が代数的閉 (あるいは square-root closed) なら $\dim X \leq 1$ か？

表題の Cole extension は, compact Hausdorff 空間 X で $C(X)$ が square-root closed であるようなものを構成する標準的方法の一つであり，上の問題を考察する上で重要な示唆を与えることが期待される（羽鳥理氏及び三浦毅氏の指摘による）．以下この構成法を Stout [10, Chapter 3, §19, p.194-197] に沿って概説し，今回得られた結果について述べる．

2 The Cole extension

compact Hausdorff 空間 X に対して,

$$S_X = \{(x, (z_f)_{f \in C(X)}) | f(x) = z_f^2 \quad \forall f \in C(X)\} \subset X \times \mathbb{C}^{C(X)}$$

とおく．S_X は $X \times \prod\{f(X) | f \in C(X)\}$ の閉集合であり，従って compact Hausdorff 空間である．$\pi_X \colon S_X \to X$ を $\pi_X((x, (z_f)_{f \in C(X)})) = x, (x, (z_f)_{f \in C(X)}) \in S_X$ と定義する．このとき Rouché の定理から π_X は開写像であることを示すことができる．各 $x \in X$ に対して $\pi_X^{-1}(x)$ は高々 2 点からなる集合の $C(X)$ 個の直積であるから，$\dim \pi_X^{-1}(x) = 0$ をみたす.

(a) 任意の $f \in C(X)$ に対して、$g \in C(S_X)$ が $f \circ \pi_X = g^2$ を満たすように取れる。

実際，与えられた $f \in C(X)$ に対して, $g \colon S_X \to \mathbb{C}$ を $g((x, (z_\varphi)_{\varphi \in C(X)})) = z_f$ と置けばよい.

さて compact Hausdorff 空間 X_0 を一つ固定し, compact Hausdorff 空間の射影系 $\{X_\alpha, \pi_\alpha^\beta \colon X_\beta \to X_\alpha | \alpha < \omega_1\}$ を, 超限帰納法を用いて以下のように定義する（ω_1 は最初の非可算順序数).
i) 順序数 β が, 直前の順序数を持ち $\beta = \alpha + 1$ と表せるなら，$X_\beta = S_{X_\alpha}$，$\pi_\alpha = \pi_{X_\alpha} \colon X_\beta = S_{X_\alpha} \to X_\alpha$ とする.
ii) 順序数 β が極限順序数なら，$X_\beta = \varprojlim(X_\alpha, \pi_\alpha^\gamma \colon X_\gamma \to X_\alpha)$ と置き，$\alpha < \beta$ に対して, $\pi_\alpha^\beta = \varprojlim(\pi_\alpha^\gamma \colon X_\gamma \to X_\alpha)$ とする.

この様にして得られた射影系の射影極限 $X_\Omega = \varprojlim X_\alpha$ を考え，$\alpha < \omega_1$ に対して，X_Ω から X_α への標準射影を $\pi_\alpha : X_\Omega \to X_\alpha$ で表す．射影極限に関する一般論から，任意の $\alpha < \omega_1$ に対して π_α は開写像で，しかも任意の逆像は 0 次元である．$\mathbb{C}$ が第二可算であり，上の射影系が非可算の添数を持っていることから，次が成り立つ．

(b) 任意の連続関数 $f : X_\Omega \to \mathbb{C}$ に対して，ある順序数 $\alpha < \omega_1$ と連続関数 $f_\alpha : X_\alpha \to \mathbb{C}$ が存在して，$f = f_\alpha \circ \pi_\alpha$ を満たす．

(a) と (b) から $C(X_\Omega)$ が square-root closed であることを導くことは易しい．こうして次が得られた．

定理 2.1 (the Cole extension) 任意の *compact Hausdorff* 空間 X_0 に対して，*compact Hausdorff* 空間 X_Ω と連続開写像 $\pi_0 : X_\Omega \to X_0$ が次のように取れる．

(1) 任意の $x \in X$ に対して，$\dim\ \pi_0^{-1}(x) = 0,$

(2) $C(X_\Omega)$ は *square-root closed.*

以下 $n \geq 1$ を固定し，$X_0 = n$ 次元球 $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n | \|x\| \leq 1\}$ として，上の構成で得られた X_Ω を $X(n)$ とおく．$X(n)$ から $X_0 = D^n$ への射影（定理 2,1 に於ける π_0）を $\pi(n) : X(n) \to D^n$ と表す. $\pi(n)$ は（compact Hausdorff 空間の間の連続写像だから）閉写像でしかも全ての逆像は 0 次元である．従って次の定理から $\dim X(n) \leq n$ が成り立つ．

定理 2.2 ([4], Theorem 3.3.10) $f : X \to Y$ を *paracompact* 空間の間の閉連続写像とする．このとき

$$\dim X \leq \dim Y + \sup\{\dim f^{-1}(y) | y \in Y\}$$

が成り立つ．

問題 C：$\dim X(2) = 2$?

もし上の問題が肯定的なら, $X(2)$ は問題 B に対する反例を与える．上述のように $\pi(n) : X(n) \to D^n$ は全ての逆像が 0 次元であるような開写像であるが，このことから直ちに $\dim\ X(n) = n$ と結論することはできない．

ここで $\partial X(2) = \pi(2)^{-1}(\partial D^2)$ とおき，制限写像 $\pi(2)|\partial X(2) : \partial X(2) \to \partial D^2$ を考える．この写像も開写像であり，$\mathrm{H}^1(\partial D^2) \cong \mathbb{Z}$ であることから、次の定理を適用して $\check{\mathrm{H}}^1(\partial X(2))$ は 0 でないことが分かる．

定理 2.3 ([5], Theorem 3.2) $f : X \to Y$ を *compact Hausdorff* 空間の間の連続開写像とする．このとき f は単射準同型 $f^* : \check{\mathrm{H}}^1(Y) \to \check{\mathrm{H}}^1(X)$ を誘導する．

注：[5], Theorem 3.2 に於いて，上の結果は"confluent mapping"と呼ばれる連続写像について証明されている．compact Hausdorff 空間の間の開写像は常に confluent mapping であることが知られている．

一方 $\mathrm{H}^1(D^n) = 0$ であることと対照的に, 以下を示すことができた.

定理 2.4 ([1]) *(1)* D^n に *Cole extension* を行った際に得られる *compact Hausdorff* 空間 S_{D^n} に対し，$\check{\mathrm{H}}^1(S_{D^n})$ は無限生成群である.

(2) $\check{\mathrm{H}}^1(X(n))$ は無限生成群である.

注：(2) は, $X(n)$ から S_{D^n}(=Cole extension の構成に於ける X_1 に当たる）への射影 $X(n) \to S_{D^n}$ が開写像であることを用いれば, (1) と定理 2.3 から直ちに得られる.

問題Bが未解決である現段階に於いては，$C(X)$ が代数的閉（あるいは square-root closed) であるような **１次元以下**の（第一可算とは限らない）compact Hausdorff 空間 X の位相的特徴付けを探ることは自然な試みであると思われる。$\check{\mathrm{H}}^1(X(1))$ が無限生成であるという上の結果は，その様な特徴付けに於いて，定理 1.1(3) に対応する条件は異なる形をとるべきであることを意味している．

定理 2.4 の証明には以下の初等的な補題を用いる.

補題 2.5 アーベル群 A 上に次を満たす全射準同型 $f : A \to A$ が存在するとする.
任意の $a \in A$ に対して，自然数 n が存在して $f^n(a) = 0$ を満たす.
このとき A は０あるいは無限生成群である.

以下定理 2.4(1) の証明の概略を与える．自然数 n を固定し，連続写像 $\pi = \pi_{D^n} : S_{D^n} \to D^n$（第２節冒頭を参照）を考える．"同心球 "$B_k = \{x \in D^n | \|x\| \leq 1/k\}$ に対して，

$$D^n = B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_k \supset \cdots \supset \cap_{j=1}^{\infty} B_j = \{0\}$$

であるから、

$$S_{D^n} = \pi^{-1}(B_1) \supset \pi^{-1}(B_2) \supset \cdots \supset \pi^{-1}(B_k) \supset \cdots \supset \cap_{j=1}^{\infty} \pi^{-1}(B_j) = \pi^{-1}(\{0\})$$

が成り立つ．$\dim \pi^{-1}(\{0\}) = 0$ とチェックコホモロジーの連続性から

$$0 = \check{\mathrm{H}}^1(\pi^{-1}(\{0\})) \cong \lim_{\rightarrow} \check{\mathrm{H}}^1(\pi^{-1}(B_k))$$

が得られる．一方 $\pi^{-1}(B_k)$ は S_{D^n} と "自然に "同相であり，しかも上のチェックコホモロジーの帰納系

$$\check{\mathrm{H}}^1(S_{D^n}) = \check{\mathrm{H}}^1(\pi^{-1}(B_1)) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^1(\pi^{-1}(B_2)) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^1(\pi^{-1}(B_k)) \longrightarrow \cdots$$

と "整合的 "な同型写像を誘導する様に，同相写像を選ぶことができる (この部分には多少の技術的議論が必要である)．このことを用いると $\check{\mathrm{H}}^1(S_{D^n})$ 上の全射準同型で補題 2.5 中の条件を満たすものを与えることができる．従って $\check{\mathrm{H}}^1(S_{D^n}) \neq 0$ を示せば証明が終わる.

次の補題は-本質的には-Rouché の定理からの帰結である.

補題 2.6 *compact Hausdorff* 空間 X と $f \in C(X)$ に対して，

$$S_f = \{(x,z) | f(x) = z^2\} \subset X \times \mathbb{C}$$

とおく．このとき連続写像 $p_f : S_X \to S_f$ を

$$p_f((x,(z_\varphi)_{\varphi \in C(X)})) = z_f, \quad (x,(z_\varphi)_{\varphi \in C(X)}) \in S_X$$

によって定義すると，p_f は全射開写像である．

さて幾何学的考察によって，D^n 上の連続関数 $f : D^n \to \mathbb{C}$ を，$\check{\mathrm{H}}^1(S_f) \neq 0$ を満たすように構成できる。上の補題から $p_f : S_{D^n} \to S_f$ は開写像だから，定理2.3から誘導準同型 $p_f^* : \check{\mathrm{H}}^1(S_f) \to \check{\mathrm{H}}^1(S_{D^n})$ は単射である．従って $\check{\mathrm{H}}^1(S_{D^n}) \neq 0$ が得られる．

参考文献

[1] A. Chigogidze, A. Karasev, K. Kawamura and V. Valov, *On commutative and non-commutative C^*-algebras with the approximate n-th root property*, preprint.

[2] R.S. Countryman, *On the characterization of compact Hausdorff X for which $C(X)$ is algebraically closed*, Pacific J. Math. **20** (1967), 433-438.

[3] D.P. Deckard and C. Pearcy, *On matices over the ring of continuous complex-valued functions on a Stonian space*, Proc. Amer. Math. Soc. **14** (1963), 322-328.

[4] R. Engelking, *Theory of dimensions: Finite and Infinite* (Heldermann Verlag, Lemgo, 1995).

[5] J. Grispolakis and E.D. Tymchatyn, *On confluent mappings and essential mappings - a survey*, Rocky Mt. J. Math. **11** (1981), 131-153.

[6] O. Hatori and T. Miura, *On a characterization of the maximal ideal spaces commutative C^*-algebras in which every element is the square of another*, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (1999), 239-242.

[7] T. Miura and K. Niijima, *On a characterization of the maximal ideal spaces of algebraically closed commutative C^*-algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), 2869-2876.

[8] K. Kawamura and T. Miura, *On the existence of continuous (approximate) roots of algebraic equations*, preprint.

[9] S. Mardešič, *On covering dimension and inverse limit of compact spaces*, Illinois Journ. of Math. **4** (1960), 278-291.

[10] E.L. Stout, *The theory of uniform algebras*, Bogden-Quigley, 1971.

〒３０５－８５７１
茨城県つくば市天王台１－１－１
筑波大学大学院数理物質科学研究科数学専攻
kawamura@math.tsukuba.ac.jp

Bergman shift に関するある問題

瀬戸 道生 (神奈川大学 工学部)

複素平面 $\mathbb{C}$ 内の単位開円板 $\mathbb{D} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$ 上の Bergman 空間 $L^2_a(\mathbb{D})$ を次で定義する:

$$L^2_a(\mathbb{D}) = \left\{ f : f \text{ is analytic on } \mathbb{D} \text{ and } \|f\|^2 := \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 \, dxdy < +\infty \quad (z = x + iy) \right\}.$$

$\mathbb{C}[z]$ を変数 z についての通常の複素係数多項式環する．Bergman 空間の閉部分 $\mathcal{M}$ が $\mathbb{C}[z]$ の任意の元によるかけ算作用で不変なとき (i.e. $f \in \mathcal{M} \Rightarrow pf \in \mathcal{M}$ for any $p \in \mathbb{C}[z]$) $\mathcal{M}$ を Bergman submodule とよぶことにする．Bergman submodule について次の結果が知られている．

Theorem 1 (Richter [2]) *Let $\mathcal{M}_1$ and $\mathcal{M}_2$ are two Bergman submodules. Then there exists a unitary operator from $\mathcal{M}_1$ onto $\mathcal{M}_2$ such that $Upf = pUf$ for any polynomial p in $\mathbb{C}[z]$ (i.e. $\mathcal{M}_1$ and $\mathcal{M}_2$ are unitarily equivalent as modules) if and only if $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2$.*

S_z を Bergman 空間 $L^2_a(\mathbb{D})$ 上で単項式 z をかける作用とする．S_z は Bergman shift とよばれる．R_z を S_z の Bergman submodule $\mathcal{M}$ への制限とし $\mathcal{M}$ 上の恒等作用素を $I_{\mathcal{M}}$ と表す．これから R_z と $I_{\mathcal{M}}$ は $\mathcal{M}$ 上の作用素として扱う．$\mathfrak{A}(R_z)$ を R_z と $I_{\mathcal{M}}$ で生成される C^*-algebra とする．即ち $\mathfrak{A}(R_z)$ は $\mathcal{M}$ 上の有界線型作用素全体 $\mathfrak{B}(\mathcal{M})$ の C^*-subalgebra である．

これから考えたいのは次の問題である．

Problem *Let $\mathcal{M}$ be a Bergman submodule. Then does there exist a unitary operator U from $L^2_a(\mathbb{D})$ onto $\mathcal{M}$ such that $U\mathfrak{A}(S_z)U^* = \mathfrak{A}(R_z)$?*

Richter の定理によると $\mathcal{M} \neq L^2_a(\mathbb{D})$ ならば $US_zU^* = R_z$ となるユニタリ作用素 U は存在しない. 一般の設定でこの問題はまだ難しい. Axler-Bourdon ([1]) に倣い, 余次元有限という設定の下で考えると次のように肯定的に解くことができる.

Theorem 2 *Let $\mathcal{M}$ be a Bergman submodule of finite codimension. Then there exits a unitary operator from $L^2_a(\mathbb{D})$ onto $\mathcal{M}$ such that $U\mathfrak{A}(S_z)U^* = \mathfrak{A}(R_z)$.*

$C(\mathbb{T})$ を単位円周 $\mathbb{T} = \{e^{i\theta} : 0 \leq \theta < 2\pi\}$ 上の連続関数全体からなる C^*-algebra とし, ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上のコンパクト作用素全体のなすイデアルを $\mathfrak{K}(\mathcal{H})$ とする. このとき以下の列が短完全列になることが知られている.

$$0 \longrightarrow \mathfrak{K}(L^2_a(\mathbb{D})) \xrightarrow{\ i\ } \mathfrak{A}(S_z) \xrightarrow{\ \pi\ } C(\mathbb{T}) \longrightarrow 0,$$

ここで i は通常の包含写像, π は標準的な商写像とする.

Corollary 1 *Let $\mathcal{M}$ be a Bergman submodule of finite codimension. Then there exists a unitary operator U from $L^2_a(\mathbb{D})$ onto $\mathcal{M}$ such that the following diagram commutes*:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathfrak{K}(L^2_a(\mathbb{D})) & \xrightarrow{\ i\ } & \mathfrak{A}(S_z) & \xrightarrow{\ \pi\ } & C(\mathbb{T}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Ad}\ U} & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Ad}\ U} & & \big\| & & \\
0 & \longrightarrow & \mathfrak{K}(\mathcal{M}) & \xrightarrow[\ i\ ]{} & \mathfrak{A}(R_z) & \xrightarrow[\ \pi\ ]{} & C(\mathbb{T}) & \longrightarrow & 0,
\end{array}$$

where $\mathrm{Ad}\,U$ *is the $*$-isomorphism from* $\mathfrak{A}(S_z)$ *onto* $\mathfrak{A}(R_z)$ *defined as follows*: $\mathrm{Ad}\,U(X) = UXU^*$.

参考文献

[1] S. Axler and P. Bourdon, *Finite codimensional invariant subspaces of Bergman spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **306**, No. 2, (1988), pp. 805-817.

[2] S. Richter, *Unitary equivalence of invariant subspaces of Bertgman and Dirichlet spaces*, Pacific J. Math., **133**, No. 1, (1988), pp. 151-155.

Cyclic vectors in the Fock space

泉池　耕平
新潟大学大学院自然科学研究科

$\mathbb{D}$ を複素平面 $\mathbb{C}$ の単位開円板とし、$\mathcal{C}$ を多項式環とする。X を $\mathbb{C}$ のある領域 Ω 上正則な関数からなる Banach 空間とする。$f\mathcal{C}$ が X で稠密のとき、関数 f を X の cyclic vector という。

1　Hardy 空間、Bergman 空間の cyclic vector

次の空間 $H^2(\mathbb{D})$ を Hardy 空間という。

$$H^2(\mathbb{D}) = \left\{ f \in Hol(\mathbb{D}) : \|f\|^2_{H^2(\mathbb{D})} = \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta < \infty \right\}$$

定理 1 ([4]). $f \in H^2(\mathbb{D})$ とする。そのとき f が $H^2(\mathbb{D})$ の cyclic vector であることと、outer 関数であることは同値である。

次の空間 $L^2_a(\mathbb{D})$ を Bergman 空間という。

$$L^2_a(\mathbb{D}) = \left\{ f \in Hol(\mathbb{D}) : \|f\|^2_{L^2_a(\mathbb{D})} = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 dA(z) < \infty \right\}$$

ここで、dA は Lebesgue 測度である。

定理 2 ([3]). $f \in L^2_a(\mathbb{D})$ とする。そのとき f が $L^2_a(\mathbb{D})$ の cyclic vector であることと、$L^2_a(\mathbb{D})$-outer 関数であること、つまり任意の $p \in \mathcal{C}$ に対して $\|pg\|_{L^2_a(\mathbb{D})} \leq \|pf\|_{L^2_a(\mathbb{D})}$ となる全ての関数 $g \in L^2_a(\mathbb{D})$ が性質 $|g(0)| \leq |f(0)|$ を持つことは同値である。

定理 3 ([1]). X_1, X_2 を $\mathbb{D}$ 上正則な関数からなる多項式環 $\mathcal{C}$ が稠密である Banach 空間で、$X_1 \subset X_2$ であるとする。そのとき関数 f が X_1 の cyclic vector ならば、f はまた X_2 の cyclic vector でもある。

この定理より、$f \in H^1(\mathbb{D})$ が outer 関数ならば、f は $L_a^2(\mathbb{D})$ の cyclic vector であることがわかる。

$K \subset \mathbb{T}$ を Lebesgue 測度 $m(K) = 0$ の閉集合とし、$\mathbb{T} \backslash K = \cup I_n$ とする。ここで、I_n は disjoint な開弧である。そのとき $\sum m(I_n) \log m(I_n) > -\infty$ ならば、K を Carleson 集合という。

定理 4 ([3]). singular 測度 μ を持つ singular inner 関数が $L_a^2(\mathbb{D})$ の cyclic vector であることと、任意の Carleson 集合 $K \subset \mathbb{T}$ に対して $\mu(K) = 0$ であることは同値である。

2 Fock 空間の cyclic vector

次の空間 $L_a^2(\mathbb{C})$ を Fock 空間という。

$$L_a^2(\mathbb{C}) = \left\{ f \in Hol(\mathbb{C}) : \|f\|_{L_a^2(\mathbb{C})}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 e^{-\frac{|z|^2}{2}} dA(z) < \infty \right\}$$

定理 5 ([5]). $f \in L_a^2(\mathbb{C})$ とする。そのとき次は同値である

(i) f が $L_a^2(\mathbb{C})$ の cyclic vector である。
(ii) f は $\mathbb{C}$ 上零点を持たない。

参考文献

[1] L. Brown and A. L. Shields, *Cyclic vectors in the Dirichlet space*, Trans. Amer. Math. Soc. **285** (1984), 269-304.

[2] X. Chen and K. Guo, *Analytic Hilbert Modules*, Chapman & Hall/CRC, 2003.

[3] P. Duren and A. Schuster, *Bergman Spaces*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

[4] J. Garnett, *Bounded Analytic Functions*, Academic Press, Inc., 1981.

[5] K. H. Izuchi, *Cyclic vectors in the Fock space over the complex plane*, Proc. Amer. Math. Soc., to appear.

荷重 Bergman 空間上の荷重合成作用素

長野県明科高等学校　　植木　誠一郎

本講演では, $\mathbb{C}^n$ の単位球上で定義される荷重 Bergman 空間上の荷重合成作用素の有界性およびコンパクト性の特徴付けについて論ずる.

1 Introduction

$B \equiv B_n$ を $\mathbb{C}^n$ の単位球, $S \equiv \partial B$ を単位球面とする. ν は B 上の正規化された Lebesgue 測度を表し, σ は S 上の正規化された Lebesgue 測度を表す. $\alpha \in (-1, \infty)$ に対し, $c_\alpha = \Gamma(n+\alpha+1)/\{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)\}$, $d\nu_\alpha(z) = c_\alpha(1-|z|^2)^\alpha d\nu(z)$ $(z \in B)$ とおく. このとき, ν_α は B 上の正値 Borel 測度であり, $\nu_\alpha(B) = 1$ である. $H(B)$ により B 上の正則関数の全体を表す.

$p \in (0, \infty)$, $\alpha \in (-1, \infty)$ に対し, B 上の Hardy 空間 $H^p(B)$, 荷重 Bergman 空間 $A^p(\nu_\alpha)$ を次のように定義する:

$$H^p(B) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f \in H(B) \,:\, \|f\|_{H^p}^p \equiv \sup_{0<r<1} \int_S |f_r|^p \, d\sigma < \infty \right\},$$
$$A^p(\nu_\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f \in H(B) \,:\, \|f\|_{A^p(\nu_\alpha)}^p \equiv \int_B |f|^p \, d\nu_\alpha < \infty \right\}.$$

ここで, $f_r(\zeta) \equiv f(r\zeta)$ $(r \in (0,1),\ \zeta \in S)$ である.

正則写像 $\phi : B \to B$, $\psi \in H(B)$ に対し, 荷重合成作用素 $W_{\phi,\psi}$ を次のように定義する:

$$W_{\phi,\psi} f \equiv \psi \cdot (f \circ \phi) \quad (f \in H(B)).$$

複素平面内の単位円板 $\mathbb{D}$ 上で定義される Hardy 空間 H^p および荷重 Bergman 空間 $A^p(\nu_\alpha)$ 上の荷重合成作用素の研究は, 有界性・コンパクト性等の特徴付けを中心に活発に行われている ([1, 2, 3, 4]). 例えば, M.D. Contreras と A.G. Hernández-Díaz([1, 2]) により, $W_{\phi,\psi}$ の有界性とコンパクト性は次のように特徴付けられた.

Theorem ([2]). $1 \le p \le q < \infty$, $\phi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ を正則写像, $\psi \in H^q$ とする. $\overline{\mathbb{D}}$ 上の正値 Borel 測度 $\mu_{\phi,\psi,q}$ を次のように定義する:

$$\mu_{\phi,\psi,q}(E) \equiv \int_{\phi^{*-1}(E)} |\psi^*|^q d\sigma \quad (E \text{ は } \overline{\mathbb{D}} \text{ の Borel 集合}).$$

このとき, 次が成り立つ.

(a) $W_{\phi,\psi} : H^p \to H^q$ が有界作用素 $\Longleftrightarrow$ $\mu_{\phi,\psi,q}$ が $\frac{q}{p}$-Carleson 測度.
(b) $W_{\phi,\psi} : H^p \to H^q$ がコンパクト作用素 $\Longleftrightarrow$ $\mu_{\phi,\psi,q}$ がコンパクト $\frac{q}{p}$-Carleson 測度.

我々は上記の結果を荷重 Bergman 空間 $W_{\phi,\psi} : A^p(\nu_\alpha) \to A^q(\nu_\beta)$ $(0 < p \le q < \infty, -1 < \alpha, \beta < \infty)$ の場合に考察し，有界性とコンパクト性に関して同様な Carleson-type measure を用いた特徴付けを得た．また，上述の M.D. Contreras と A.G. Hernández-Díaz([1, 2]) で得られた結果の多変数への拡張を試み，$W_{\phi,\psi} : H^p(B) \to H^q(B)$ $(0 < p \le q < \infty)$ の有界性およびコンパクト性を特徴付けた．さらに，$W_{\phi,\psi}$ を Hardy 空間から荷重 Bergman 空間への作用素としてみた場合の有界性およびコンパクト性についても同様の特徴付けを与えた．

2 Results

$0 < q < \infty$, $-1 < \beta < \infty$ とする．$\phi : B \to B$ を正則写像，$\psi \in A^q(\nu_\beta)$ とする．B 上の正値 Borel 測度 $\mu_{\phi,\psi,q,\beta}$ を次のように定義する:

$$\mu_{\phi,\psi,q,\beta}(E) \equiv \int_{\phi^{-1}(E)} |\psi|^q d\nu_\beta \quad (E \text{ は } B \text{ の Borel 集合}).$$

さらに，$\psi \in H^q(B)$ に対して $\overline{B}$ 上の正値 Borel 測度 $\mu_{\phi,\psi,q}$ を次のように定義する:

$$\mu_{\phi,\psi,q}(E) \equiv \int_{{\phi^*}^{-1}(E)} |\psi^*|^q d\sigma \quad (E \text{ は } \overline{B} \text{ の Borel 集合}).$$

ここで，$\phi^* : S \to \overline{B}$ は ϕ の *radial limit map* である．この 2 つの測度 $\mu_{\phi,\psi,q,\beta}$, $\mu_{\phi,\psi,q}$ に対して，測度論で用いられる変数変換公式により次の等式が成り立つ:

(a) B 上の正値可測関数 g に対して，

$$\int_B g \, d\mu_{\varphi,\psi,q,\beta} = \int_B |\psi|^q (g \circ \varphi) \, d\nu_\beta.$$

(b) $\overline{B}$ 上の正値可測関数 g に対して，

$$\int_{\overline{B}} g \, d\mu_{\varphi,\psi,q} = \int_S |\psi^*|^q (g \circ \varphi^*) \, d\sigma.$$

次に，荷重合成作用素 $W_{\phi,\psi}$ の有界性とコンパクト性を特徴付けるため，γ-Carleson measure および compact γ-Carleson measure $(\gamma \ge n)$ を導入する:

B(あるいは $\overline{B}$) 上の正値 Borel 測度 μ が，

$$\sup_{\delta>0,\zeta\in S} \frac{\mu(B(\zeta,\delta))}{\delta^\gamma} < \infty \qquad \left(\text{あるいは} \sup_{\delta>0,\zeta\in S} \frac{\mu(\mathcal{S}(\zeta,\delta))}{\delta^\gamma} < \infty\right)$$

を満たすとき，μ を B(あるいは $\overline{B}$) 上の γ-*Carleson measure* と呼ぶ．また，μ が

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \sup_{\zeta\in S} \frac{\mu(B(\zeta,\delta))}{\delta^\gamma} = 0 \qquad \left(\text{あるいは} \lim_{\delta\downarrow 0} \sup_{\zeta\in S} \frac{\mu(\mathcal{S}(\zeta,\delta))}{\delta^\gamma} = 0\right)$$

を満たすとき, μ を B(あるいは $\overline{B}$) 上の *compact* γ-*Carleson measure* と呼ぶ. ここで, $B(\zeta,\delta)$, $\mathcal{S}(\zeta,\delta)$ $(\zeta \in S, \delta > 0)$ は *Carleson set* である:

$$B(\zeta,\delta) \equiv \Big\{ z \in B : |1 - \langle z, \zeta \rangle| < \delta \Big\},$$
$$\mathcal{S}(\zeta,\delta) \equiv \Big\{ z \in \overline{B} : |1 - \langle z, \zeta \rangle| < \delta \Big\}.$$

$W_{\phi,\psi} : A^p(\nu_\alpha) \to A^q(\nu_\beta)$ について, 我々は次の結果を得た:

Theorem 1. $0 < p \le q < \infty, -1 < \alpha, \beta < \infty$ とする. このとき, 次の 3 条件は同値である:

(a) $W_{\phi,\psi} : A^p(\nu_\alpha) \to A^q(\nu_\beta)$ が有界作用素 (resp. コンパクト作用素) である.
(b) $\mu_{\phi,\psi,q,\beta}$ が B 上の $\frac{q(n+1+\alpha)}{p}$-Carleson measure (resp. compact $\frac{q(n+1+\alpha)}{p}$-Carleson measure) である.
(c) ϕ と ψ が次を満たす:

$$\sup_{a \in B} \int_B |\psi(z)|^q \left\{ \frac{1 - |a|^2}{|1 - \langle \phi(z), a \rangle|^2} \right\}^{\frac{q(n+1+\alpha)}{p}} d\nu_\beta(z) < \infty$$
$$(\text{resp. } \lim_{|a| \uparrow 1} \int_B |\psi(z)|^q \left\{ \frac{1 - |a|^2}{|1 - \langle \varphi(z), a \rangle|^2} \right\}^{\frac{q(n+1+\alpha)}{p}} d\nu_\beta(z) = 0).$$

$W_{\phi,\psi} : H^p(B) \to H^q(B)$ の有界性とコンパクト性については次のように特徴付けられる. この結果は, M.D. Contreras と A.G. Hernández-Díaz([1, 2]) の多変数版である.

Theorem 2. $0 < p \le q < \infty$ とする. このとき, 次の 3 条件は同値である:

(a) $W_{\phi,\psi} : H^p(B) \to H^q(B)$ が有界作用素 (resp. コンパクト作用素) である.
(b) $\mu_{\phi,\psi,q}$ が $\overline{B}$ 上の $\frac{qn}{p}$-Carleson measure (resp. compact $\frac{qn}{p}$-Carleson measure) である.
(c) ϕ と ψ が次を満たす:

$$\sup_{a \in B} \int_S |\psi^*(\zeta)|^q \left\{ \frac{1 - |a|^2}{|1 - \langle \phi^*(\zeta), a \rangle|^2} \right\}^{\frac{qn}{p}} d\sigma(\zeta) < \infty$$
$$(\text{resp. } \lim_{|a| \uparrow 1} \int_S |\psi^*(\zeta)|^q \left\{ \frac{1 - |a|^2}{|1 - \langle \phi^*(\zeta), a \rangle|^2} \right\}^{\frac{qn}{p}} d\sigma(\zeta) = 0).$$

最後に, $W_{\phi,\psi} : H^p(B) \to A^q(\nu_\alpha)$ の特徴付けの結果を述べる.

Theorem 3. $0 < p \le q < \infty, -1 < \alpha < \infty$ とする. このとき, 次の 3 条件は同値である:

(a) $W_{\phi,\psi} : H^p(B) \to A^q(\nu_\alpha)$ が有界作用素 (resp. コンパクト作用素) である.

(b) $\mu_{\phi,\psi,q,\alpha}$ が B 上の $\frac{qn}{p}$-Carleson measure (resp. compact $\frac{qn}{p}$-Carleson measure) である.

(c) ϕ と ψ が次を満たす:

$$\sup_{a\in B}\int_B |\psi(z)|^q\left\{\frac{1-|a|^2}{|1-\langle\phi(z),a\rangle|^2}\right\}^{\frac{qn}{p}} d\nu_\alpha(z) < \infty$$

$$(\text{resp. } \lim_{|a|\uparrow 1}\int_B |\psi(z)|^q\left\{\frac{1-|a|^2}{|1-\langle\phi(z),a\rangle|^2}\right\}^{\frac{qn}{p}} d\nu_\alpha(z) = 0).$$

証明等の詳細は [6] を参照されたい.

References

[1] M. D. Contreras and A. G. Hernández-Díaz, *Weighted composition operators on Hardy spaces*, J. Math. Anal. Appl., **263** (2001), 224–233.

[2] M. D. Contreras and A. G. Hernández-Díaz, *Weighted composition operators between different Hardy spaces*, Integr. Equ. Oper. Theory, **46** (2003), 165–188.

[3] Ž. Čučković and R. Zhao, *Weighted composition operators on the Bergman space*, J. London Math. Soc., **70** (2004), 499–511.

[4] G. Mirzakarimi and K. Seddighi, *Weighted composition operators on Bergman and Dirichlet spaces*, Georgian Math. J., **4** (1997), 373–383.

[5] S. Ueki, *Composition operators on the Privalov spaces of the unit ball of* $\mathbb{C}^n$, Korean J. Math. Soc., **42** (2005), 111–127.

[6] S. Ueki, *Weighted composition operators between weighted Bergman spaces in the unit ball of* $\mathbb{C}^n$, preprint.

MINIMUM MODULI OF WEIGHTED COMPOSITION OPERATORS ON H^∞

TAKUYA HOSOKAWA

1. Introduction

Let $\mathbb{D}$ be the open unit disk, $\overline{\mathbb{D}}$ its closure and $\mathbb{T}$ the unit circle. Let $H^\infty = H^\infty(\mathbb{D})$ be the set of all bounded analytic functions on $\mathbb{D}$ and A be the set of all analytic functions bounded on $\mathbb{D}$ and continuous on $\overline{\mathbb{D}}$, called the disc algebra. Then H^∞ and A are Banach algebras with the supremum norm

$$\|f\|_\infty = \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)|.$$

In this paper, we will deal with the minimum modulus of analytic functions on $\mathbb{D}$ and $\mathbb{T}$. For $f \in H^\infty$, the radial limit f^* of f is defined almost everywhere on $\mathbb{T}$. We denote that

$$\|f\|_{-\infty,\mathbb{D}} = \inf_{z\in\mathbb{D}} |f(z)|$$

and

$$\|f\|_{-\infty,\mathbb{T}} = \operatorname*{essinf}_{\omega\in\mathbb{T}} |f^*(\omega)|.$$

Let $S(\mathbb{D})$ be the set of all analytic self-map of $\mathbb{D}$. For $\varphi \in S(\mathbb{D})$, we can define the composition operator C_φ on H^∞ as $C_\varphi f = f \circ \varphi$. Moreover, for $u \in H^\infty$, we can define the multiplication operator M_u on H^∞ as $M_u f = uf$. Hence the weighted composition operator uC_φ is the product of M_u and C_φ, that is, $uC_\varphi f = M_u C_\varphi f = uf \circ \varphi$.

As well known, $\|uC_\varphi\| = \|u\|_\infty$ both on H^∞. Putting $u \equiv 1$, we have that $\|C_\varphi\| = 1$.

Let X and Y be Banach spaces and T be a bounded linear operator from X to Y. The operator norm $\|T\|$ of T is the maximum modulus of its image of the closed unit ball $U_X = \{x \in X : \|x\|_X \le 1\}$. In [2], Müller introduced two quantities as the minimum moduli of $T(U_X)$. We can regard $j(T)$ as the minimum modulus of $T(U_X)$ estimating from the outside and $k(T)$ as the minimum modulus estimating from the inside.

Definition 1.1. *Let T be a bounded linear operator on from X to Y.*

(i) *The injectivity modulus $j(T)$ of T is defined by*

$$j(T) = \inf\{\|Tx\|_Y : \|x\|_X = 1\}.$$

(ii) *The surjectivity modulus $k(T)$ of T is defined by*

$$k(T) = \sup\{r \geq 0 : T(U_X) \supset r\, U_Y\}.$$

Though the operator norm holds the triangular inequality, neither $j(T)$ nor $k(T)$ hold it. Some properties of $j(T)$ and $k(T)$ are studied in [2].

Proposition 1.2. [2] *Let T be a bounded linear operator on from X to Y.*

(i) *Clearly $0 \leq j(T) \leq \|T\|$ and $0 \leq k(T) \leq \|T\|$.*
(ii) *If T is invertible, then $j(T) = k(T) = \|T^{-1}\|^{-1}$.*
(iii) *$j(T) > 0$ (this is said that T is bounded below) if and only if T is one-to-one and $\operatorname{Ran} T$ is closed.*
(iv) *$k(T) > 0$ if and only if T is onto.*
(v) *$j(T) = k(T^*)$ and $k(T) = j(T^*)$.*

Example 1.3. *Let $l^2(\mathbb{N})$ be the Hilbert space of square summable one-sided complex sequences.*

(i) *Let F be the forward shift operator on $l^2(\mathbb{N})$ Then $\|F\| = j(F) = 1$ but $k(F) = 0$.*
(ii) *Let B be the backward shift operator on $l^2(\mathbb{N})$. Then $\|B\| = k(B) = 1$ but $j(B) = 0$.*

2. Minimum Moduli of Weighted Composition Operators on H^∞

In this section we estimate $j(uC_\varphi)$ and $k(uC_\varphi)$ on H^∞. First, we concern with the trivial cases. If $u \equiv 0$ or $\varphi \equiv p \in \mathbb{D}$, then $\operatorname{Ran} uC_\varphi$ is a zero or one dimensional subspace spanned by u. Hence we have the following.

Proposition 2.1. *If $u \equiv 0$ or $\varphi \equiv p \in \mathbb{D}$, then $j(uC_\varphi) = k(uC_\varphi) = 0$.*

In the sequel, to exclude these cases, we assume that $u \in H^\infty$ is not identically zero and $\varphi \in S(\mathbb{D})$ is not constant. Under this assumption, we call uC_φ non-trivial. We remark that uC_φ is injective on H^∞ if uC_φ is non-trivial. This fact and (iv) of Proposition 1.2 imply that $k(uC_\varphi) > 0$ if and only if $(uC_\varphi)^{-1}$ is bounded on H^∞.

Theorem 2.2. *Let uC_φ be a non-trivial weighted composition operator on H^∞. Then $k(uC_\varphi) > 0$ if and only if $\|u\|_{-\infty,\mathbb{D}}$ and φ is an automorphism of $\mathbb{D}$. Moreover, in such cases, $k(uC_\varphi) = j(uC_\varphi) = \|u\|_{-\infty,\mathbb{D}}$.*

Considering the special cases of $u \equiv 1$ and $\varphi(z) = z$, we have the following corollary.

Corollary 2.3. *Let $u \in H^\infty$ and $\varphi \in S(\mathbb{D})$.*
 (i) *$k(M_u) = \|u\|_{-\infty,\mathbb{D}}$.*
 (ii) *If φ is an automorphism of $\mathbb{D}$, $k(C_\varphi) = 1$. Otherwise, $k(C_\varphi) = 0$.*

Next we will consider the estimation of $j(uC_\varphi)$. For convenience, we provide some notation.

Definition 2.4. *Define that $D_\delta(u) = \{z \in \mathbb{D} : |u(z)| \geq \delta\}$.*

In [3], Ohno and Takagi have stated their results in terms of Gelfand transformation and Shilov boundary of H^∞. Our main theorem is expressed in function theoretic terms. We need the following lemma (see [4] and [5]).

Lemma 2.5. *Let G be a subset of $\mathbb{D}$ such that $\overline{G} \supset \mathbb{T}$. Then, for any $f \in H^\infty$,*

$$\sup_{z\in G} |f(z)| = \|f\|_\infty$$

Now we can prove the main theorem.

Theorem 2.6. *Let uC_φ be a non-trivial weighted composition operator on H^∞. Then we have*

$$j(uC_\varphi) = \sup\{\delta : \overline{\varphi(D_\delta(u))} \supset \mathbb{T}\} \tag{1}$$

$$= \inf_{\omega\in\mathbb{T}} \limsup_{\varphi(z_n)\to\omega} |u(z_n)| \tag{2}$$

where we define the supremum in (1) is equal to 0 if such a constant δ does not exist, and we define also the infimum in (2) is equal to 0 if $\overline{\varphi(\mathbb{D})} \not\supset \mathbb{T}$.

Considering the special cases of $u \equiv 1$ and $\varphi(z) = z$, we have the following.

Corollary 2.7. *Let M_u be a multiplication operator and C_φ be a composition operator on H^∞.*
 (i) *$j(M_u) = \|u\|_{-\infty,\mathbb{T}}$.*
 (ii) *If $\overline{\varphi(\mathbb{D})} \supset \mathbb{T}$, then $j(C_\varphi) = 1$. Otherwise, $j(C_\varphi) = 0$.*

Now we give a typical example which shows what affects the estimation of the injectivity modulus.

Example 2.8. *Let* $u(z) = 1 - z$. *Let* $\varphi(z) = z$ *and* $\psi(z) = z^2$. *Then* $j(uC_\varphi) = 0$ *and* $j(uC_\psi) = \sqrt{2}$.

Proof. Indeed, $j(uC_\varphi) = j(M_u) = \|1 - z\|_{-\infty,\mathbb{T}} = 0$.

On the other hand, we have that

$$\begin{aligned} j(uC_\psi) &= \inf_{\omega \in \mathbb{T}} \max\{|1 - \zeta| : \zeta^2 = \omega\} \\ &= \inf_{\theta \in [0,\pi]} \max\{|1 - e^\theta|, |1 + e^\theta|\} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

□

In the last of this section, we collect some quantities which hold the "zero-one law". The essential norm $\|T\|_e$ of T is the distance from T to the closed ideal of compact operators, that is, $\|T\|_e = \inf\{\|T + K\| : K \text{ is compact}\}$. It is trivial that T is compact if and only if $\|T\|_e = 0$.

It is known that C_φ is compact on A if and only if $\overline{\varphi(\mathbb{D})} \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$. Moreover if C_φ is not compact on A, then $\|C_\varphi\|_e = 1$. Hence we have the following.

Corollary 2.9. *Let* $\varphi \in S(\mathbb{D})$. *Then we have that*

$$0 \leq k(C_\varphi) \leq j(C_\varphi) \leq \|C_\varphi\|_e \leq \|C_\varphi\| = 1$$

and each of these quantities above is zero or one.

References

1. C.C. Cowen and B.D. MacCluer, *Composition Operators on Spaces of Analytic Functions*, CRC Press, Boca Raton, 1995.
2. V. Müller, *Spectral Theory of Liear Operators*, Birkhäuser, Basel, 2003.
3. S. Ohno and H. Takagi, *Some properties of weighted composition operators on algebras of analytic functions*, *J. Nonlinear and Convex Analysis*, **2** (2001), 369–380.
4. R. Roan, *Composition operators on H^p with dense range*, *Indiana Univ. Math. J.* , **27** (1978), 159–162.
5. D. Sarason, *Weak-star generators of H^∞*, *Pacific J. Math.*, **17** (1966), 519–528.

Omae-bashi 1-1-17 B-205, Hasuda, Saitama 349-0125, Japan

E-mail address: `turtlemumu@yahoo.co.jp`

平成16年度関数環研究集会参加者（順不同）

御名前	御所属
沢田　賢	早大
春日　一浩	
三浦　毅	山形大
田中　純一	早大
髙橋　世知子	奈良女子大
渡辺　誠治	新潟工大
川村　一宏	筑波大
和田　淳蔵	早稲田大
山本　隆範	北海学園大
渡辺　恵一	新潟大
平澤　剛	日工大非常勤
小林　保幸	北大　COE　研
林　実樹廣	北大・理
富山　淳	都立大　EP
植木　誠一郎	長野県明科高校
羽鳥　理	新大
髙木　啓行	信州大
細川　卓也	日工大　非常勤
丹羽　典朗	大阪電通大・非常勤
後藤　泰宏	防衛大
鶴見　和之	東京電機大
境　正一郎	早大
神保　敏弥	奈良教育大
泉池　耕平	新潟大学
瀬戸　道生	神奈川大学
本間　大	新潟大学
飯田　安保	岩手医科大学　教養部
高山　琢磨	法政一高
高木　悟	早大教育