上半平面上の Nevanlinna 型空間について

飯田　安保 (Yasuo IIDA)　　**東北大学大学院情報科学研究科**

(e-mail：iida@ims.is.tohoku.ac.jp)

1. 準備

まず、単位円板 $U = \{z \in \mathbf{C} \,|\, |z| < 1\}$ 上の関数空間の定義を与える。

定義 1-1

1. U 上の正則関数 f が $\displaystyle\sup_{0<r<1}\int_0^{2\pi}\log(1+|f(re^{i\theta})|)d\theta < +\infty$ を満たすとき、 $f \in N$ とする。
2. $T = \{z \in \mathbf{C} \,|\, |z| = 1\}$ とする。f が U 上の正則関数で、ある $\phi \in L^1(T)$, $\phi \geqq 0$ に対し $\log(1+|f(z)|) \leqq Q[\phi](z)\ \ (z \in U)$ を満たすとき、$f \in N_*$ とする。ただし、右辺は U 上の Poisson 積分を表す。
3. $p > 1$ とする。 U 上の正則関数 f が $\displaystyle\sup_{0<r<1}\int_0^{2\pi}\Big(\log(1+f(re^{i\theta})|\Big)^p d\theta < +\infty$ を満たすとき、$f \in N^p$ とする。

N を Nevanlinna class , N_* を Smirnov class と呼ぶ。N とその部分空間 N_* , N^p 等を総称して **Nevanlinna 型空間**と呼ぶ。

上半平面 $D = \{z \in \mathbf{C} \,|\, \mathtt{Im}z > 0\}$ 上の Nevanlinna 型空間については Krylov の結果 [K] をはじめ、いろいろ知られているが、望月望先生は D 上の Nevanlinna class $N_0(D)$, Smirnov class $N_*(D)$ を次のように定義された [M]：

定義 1-2

1. D 上の正則関数 f が $\displaystyle\sup_{y>0}\int_{\mathbf{R}}\log(1+|f(x+iy)|)\,dx < +\infty$ を満たすとき、 $f \in N_0(D)$ とする。
2. f が D 上の正則関数で、ある $\phi \in L^1(\mathbf{R})$, $\phi \geqq 0$ に対し $\log(1+|f(z)|) \leqq P[\phi](z)\ \ (z \in D)$ を満たすとき、$f \in N_*(D)$ とする。ただし、右辺は D 上の Poisson 積分を表す。

ここでは、N^p に対応する D 上の空間として、$N^p(D)$ を新たに導入する ([I])：

定義 1-3

$p > 1$ とする。D 上の正則関数 f が $\displaystyle\sup_{y>0}\int_{\mathbf{R}}\Big(\log(1+|f(x+iy)|)\Big)^p dx < +\infty$ を満たすとき、$f \in N^p(D)$ とする。

※ $f \in N^p(D)$ のとき、 $f^*(x) := \displaystyle\lim_{y\to 0^+} f(x+iy)$ が a.e. $x \in \mathbf{R}$ で存在する。

2. $N^p(D)$ に属する関数の因数分解定理

定理 2-1([I])

$p>1$ に対し、 $f\in N^p(D)\,,\,f\neq 0$ とする。このとき f は次の形に一意に分解される：

$$f(z)=ae^{i\alpha z}b(z)d(z)g(z).\quad (z\in D)$$

ここで、

(i) $a\in T\,,\,\alpha\in\mathbf{R}.$ (ii) $b(z)$ は f の零点から構成される Blaschke 積.

(iii) $d(z)=\exp\left(\dfrac{1}{\pi i}\displaystyle\int_{\mathbf{R}}\frac{1+tz}{t-z}\frac{1}{1+t^2}\log h(t)\,dt\right),$

ここで $h(t)\geqq 0\,,\,\log h\in L^1(\mathbf{R}\,,\,(1+t^2)^{-1}dt), \log(1+h)\in L^p(\mathbf{R}\,,\,(1+t^2)^{-1}dt).$

(vi) $g(z)=\exp\left(\dfrac{1}{i}\displaystyle\int_{\mathbf{R}}\frac{1+tz}{t-z}\,d\mu(t)\right),$

ここで μ は $\mathbf{R}$ 上の有限実測度で、Lebesgue 測度に関して特異である.

系 2-2([I])

$p>1$ とし、f は D 上正則とする。このとき、以下は同値な条件である。

(i) $f\in N^p(D).$

(ii) $f\circ\Psi^{-1}\in N^p.$ ここで $\Psi(z)=(z-i)/(z+i)\ \ (z\in\overline{D})$ である.

(iii) $\displaystyle\sup_{y>0}\int_{\mathbf{R}}\Big(\log(1+|f(x+iy)|)\Big)^p\,dx=\lim_{y\to 0+}\int_{\mathbf{R}}\Big(\log(1+|f(x+iy)|)\Big)^p\,dx=\int_{\mathbf{R}}\Big(\log(1+|f^*(x)|)\Big)^p\,dx.$

3. F-algebra としての $N^p(D)$

$p>1$ に対し、$f\,,\,g\in N^p(D)$ とする。ここで $d_p(f\,,\,g):=\left\{\displaystyle\int_{\mathbf{R}}\Big(\log(1+|f^*(x)-g^*(x)|)\Big)^p\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}$ とすると、d_p は $N^p(D)$ 上の距離をなす。このとき、次の結果が得られる。

定理 3-1([I])

$p>1$ とする。このとき $(N^p(D)\,,\,d_p)$ は F-algebra（積について連続である、線形完備距離空間）である。

参考文献

[I] Y. Iida, On an F-algebra of holomorphic functions on the upper half plane, preprint.

[K] V. I. Krylov, On functions regular in a half-plane, Mat. Sb. **6** (48) (1939); Amer. Math. Soc. Transl. (2) **32** (1963), 37-81.

[M] N. Mochizuki, Nevanlinna and Smirnov classes on the upper half plane, Hokkaido Math. J. **20** (1991), 609-620.