ある重みつき Hardy 空間を用いての Nevanlinna-type 空間の構成

飯田　安保 (Yasuo IIDA)　　東北大学情報科学研究科

0. 序

Nevanlinna-type 空間をある重みつき Hardy 空間の和集合で構成する方法については、1990, 1991 年に Helson, McCarthy が N_* を、1993 年には Eoff が N^p を、どちらも重みつき H^2-空間の和集合で構成出来ることを示している。本講演では、上記の結果の拡張について述べるとともに、その構成から得られる N_*, N^p 上の inductive limit topology と距離位相が同値であることについても報告する。

1. 準備

まず、代表的な空間である Nevanlinna class , Smirnov class , Hardy spaces の定義を与える。

定義 1-1

$U = \{z \in \mathbf{C} \,|\, |z| < 1\}$, $T = \{z \in \mathbf{C} \,|\, |z| = 1\}$ とする。U 上の正則関数 f が

1. $\displaystyle\lim_{r \to 1^-} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta < +\infty$ を満たすとき、 $f \in N$ とする。

$f \in N$ のとき、$f^*(e^{i\theta}) := \displaystyle\lim_{r \to 1^-} f(re^{i\theta})$ が a.e. $e^{i\theta} \in T$ で存在することが知られている。

2. $f \in N$ で、$\displaystyle\lim_{r \to 1^-} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta = \int_0^{2\pi} \log^+ |f^*(e^{i\theta})| d\theta$ を満たすとき、$f \in N_*$ とする。

3. $0 < p < \infty$ に対し $\displaystyle\lim_{r \to 1^-} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta < +\infty$ を満たすとき、 $f \in H^p$ とする。

また、U 上の有界正則関数全体を H^∞ で表す。

N を Nevanlinna class , N_* を Smirnov class , H^p $(0 < p \leqq \infty)$ を Hardy spaces と呼ぶ。これらの空間のあいだには、以下のような包含関係が成り立つ：

$$H^\infty \subset H^q \subset H^p \subset N_* \subset N \qquad (0 < p < q < \infty)$$

このような包含関係は昔からよく知られていたが、1977 年に M. Stoll は N_* と H^p の間に位置する空間 N^p を以下のように導入した [S]：

定義 1-2

$p > 1$ とする。 U 上の正則関数 f が

$$\lim_{r \to 1^-} \int_0^{2\pi} \left[\log^+ |f(re^{i\theta})|\right]^p d\theta < +\infty$$

を満たすとき、 $f \in N^p$ とする。

この N^p には、以下の特徴がある：

$$N^p \subset N^q \quad (1 < q < p) \quad , \quad \bigcup_{q>0} H^q \subset \bigcap_{p>1} N^p \quad , \quad \bigcup_{p>1} N^p \subset N_*$$

N とその部分空間 N_* , N^p , H^p を総称して Nevanlinna-type 空間と呼ぶ ([CK])。

2. N , N_* , N^p のある構成について

次の定理は昔から良く知られている結果である。

定理 2-1 (F. and R. Nevanlinna)

$$f \in N \, , \, f \not\equiv 0 \iff f = \frac{g}{h} \quad (g \, , \, h \in H^\infty , h(z) \neq 0 \quad (z \in U))$$

$$f \in N_* \iff f = \frac{g}{h} \quad (g \, , \, h \in H^\infty , h : \text{outer} \quad \text{function} \quad \text{for} \, N)$$

ここで、$h(z) = a \exp\left(\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} \log \psi(e^{i\theta}) \, d\theta \right) \quad (a \in T \, , \, \psi \geqq 0 \, , \, \log \psi \in L^1(T))$ の形の関数を N に対する外関数 (outer function for N) と呼ぶ。

同様の構成を N^p でも考えることにする。その前に、N^p に対する外関数を以下のように定義する。

定義 2-2

$p > 1$ とする。

$$h(z) = a \exp\left(\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} \log \psi(e^{i\theta}) \, d\theta \right) \quad (a \in T \, , \, \psi \geqq 0 \, , \, \log \psi \in L^1(T)) \, , \, \log^+ \psi \in L^p(T))$$

の形の関数を N^p に対する外関数 (outer function for N^p) と呼ぶ。

このとき、N_* の場合と同様に考えると、$N^p \subset \left\{ f = \frac{g}{h} \quad (g \, , \, h \in H^\infty , h : \text{outer} \quad \text{function} \quad \text{for} \quad N^p) \right\}$ は成立するが、逆の包含関係は成り立たない。

しかし、N^p の可逆な元を考えることにより、定理 2-1 と同じような構成が得られる。

以下が Eoff の結果である ([E])。

定理 2-3 (Eoff, 1993)

$p > 1$ とし、N^p の可逆な元全体を $(N^p)^{-1}$ で表す。このとき以下が成り立つ。

$$f \in N^p \iff f = \frac{g}{h} \quad \left(g \, , \, h \in H^\infty , h \in (N^p)^{-1} \right)$$

次の系は容易に示される。

系 2-4

$p > 1\,,\, 0 < q \leqq \infty$ とする。このとき以下が成り立つ。

$$f \in N^p \iff f = \frac{g}{h} \quad \bigl(g\,,\, h \in H^q, h \in (N^p)^{-1}\bigr)$$

3. 重みつき Hardy 空間の和集合による $N_*\,,\, N^p$ の構成

まず最初に、Helson, McCarthy, Eoff らによる $N_*\,,\, N^p$ についての結果について述べる。

① N_* の場合

定理 2-1 は、H^2 の場合でも成り立つので、

$$f \in N_* \iff f = \frac{g}{h} \quad \bigl(g\,,\, h \in H^2, h : \text{outer} \ \ \text{function} \ \ \text{for} \ \ N\bigr)$$

ともできる。よって、$f \in N_*$ に対し、 $g = fh \in H^2$ (h: outer function for N) となる。p を多項式とすると、

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f^*(e^{i\theta})h^*(e^{i\theta}) - p^*(e^{i\theta})h^*(e^{i\theta})|^2\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f^*(e^{i\theta}) - p^*(e^{i\theta})|^2\, |h^*(e^{i\theta})|^2\, d\theta$$

から、Beurling の定理を用いて

h : outer function for N $\iff$ f は多項式全体の $L^2(|h^*(e^{i\theta})|^2 d\theta)$-閉包に属する

ということがいえる。この閉包を $H^2(|h|^2)$ で表すことにする。以上より $N_* \subset \bigcup_h H^2(|h|^2)$ が分かる。

逆に $f \in H^2(|h|^2)$ とすると、$fh = g \in H^2$ となり、これより $f = g/h$ ($g\,,\, h \in H^2\,,\, h$: outer function for N) となるので $f \in N_*$ が分かる。

以上より $N_* = \bigcup_h H^2(|h|^2)$ が示される。

一方 $p \geqq 1$ に対し、$W_p = \{w : \text{weight} \mid \log w \in L^p(T)\}$ とすると、$h \in H^2$ が outer function for N のとき $|h^*(e^{i\theta})|^2 \in W_1$ がいえる。したがって下記の定理が得られる。

この定理は最初 [H1] によって得られたが、その後 [M1, M2] において詳しい説明がなされている。

定理 3-1 (Helson, 1990)

$$N_* = \bigcup_{h \in H^2\,,\, h : outer} H^2(|h|^2) = \bigcup_{w \in W_1} H^2(w).$$

② N^p の場合

上記の方法と同様にして、N^p の場合は以下の定理が得られる ([E])。

定理 3-2 (Eoff, 1993)

$p > 1$ に対し、以下が成り立つ。

$$N^p = \bigcup_{h \in H^2 \cap (N^p)^{-1}} H^2(|h|^2) = \bigcup_{w \in W_p} H^2(w)$$

③ Helson, McCarthy, Eoff の結果の拡張

以上の結果は重みつき H^2-空間を用いて構成されているが、実は同様の結果が重みつき H^q-空間 $(0 < q < \infty)$ によって示される。

定理 3-3

$p > 1\,,\, 0 < q < \infty$ とし、$H^q(|h|^q)$ を多項式全体の $L^q(|h^*(e^{i\theta})|^q d\theta)$-閉包とする。このとき以下が成り立つ。

$$(1) \quad N_* = \bigcup_{h \in H^q\,,\, h:outer} H^q(|h|^q) = \bigcup_{w \in W_1} H^q(w)$$

$$(2) \quad N^p = \bigcup_{h \in H^q \cap (N^p)^{-1}} H^q(|h|^q) = \bigcup_{w \in W_p} H^q(w)$$

4. $N_*\,,\, N^p$ 上の同値な位相について

N_* における距離は

$$\rho(f,g) = \lim_{r \to 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log\bigl(1 + |f(re^{i\theta}) - g(re^{i\theta})|\bigr) d\theta \quad (f\,,\, g\, \in N_*)$$

で表される。一方、$N^p \ \ (p > 1)$ における距離は

$$\rho_p(f,g) = \lim_{r \to 1^-} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Bigl[\log\bigl(1 + |f(re^{i\theta}) - g(re^{i\theta})|\bigr)\Bigr]^p d\theta \right\}^{\frac{1}{p}} \quad (f\,,\, g\, \in N^p)$$

で表される。これらの距離に関する距離位相をそれぞれ $\tau\,,\tau_p$ で表そう。

ところで定理 3-3 から、以下のような $N_* \ \ (N^p)$ 上の別の位相 (inductive limit topology) を考えることが出来る（記号で $I_q \ \ (I_{p,q})$ と表す）:

「V_λ を、任意の $w \in W_1 \ \ (W_p)$ に対し、$V_\lambda \cap H^q(w)$ が $H^q(w)$ における 0-近傍であるような集合とする。このとき、$(V_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を $I_q \ \ (I_{p,q})$ の 0-近傍系とする。」

このとき、$\tau \ \ (\tau_p)$ とこの $I_q \ \ (I_{p,q})$ が同値であることが分かる。

定理 4-1

$p > 1\,,\, 0 < q < \infty$ に対し、$\tau \ \ (\tau_p)$ と $I_q \ \ (I_{p,q})$ は $N_* \ \ (N^p)$ 上、同値な位相である。

証明は [E] の方法と同様にして出来る。

参考文献

[CK] J. S. Choa and H. O. Kim, *Composition operators between Nevanlinna-type spaces*, preprint.

[E] C. M. Eoff, *A representation of N_α^+ as a union of weighted Hardy spaces*, Complex Variables **23** (1993), 189-199.

[H1] H. Helson, *Large analytic functions*, Operator Theory: Advanced and Applications, Birkhäuser, **43** (1990), 209-216.

[H2] H. Helson, *Large analytic functions, II*, in "Analysis and partial differential equations", (Cora Sadosky, ed.), Marcel Dekker, Basel, 1990, 217-220.

[I] Y. Iida, *Some representations of Nevanlinna-type spaces by weighted Hardy spaces*, in preparation.

[M1] J. E. McCarthy, *Common ranges of co-analytic Toeplitz operators*, J. Amer. Math. Soc. **3**, 4 (1990), 793-799.

[M2] J. E. McCarthy, *Topologies on the Smirnov class*, J. Funct. Anal. **104** (1992), 229-241.

[S] M. Stoll, *Mean growth and Taylor coefficients of some topological algebras of analytic functions*, Ann. Polon. Math. **35** (1977), 139-158.

Yasuo IIDA
Graduate School of Information Sciences,
Tohoku University,
Katahira, Aoba-ku, Sendai 980-8577,
Japan
e-mail : iida@ims.is.tohoku.ac.jp