Isometries of some F-algebras of holomorphic functions

飯田　安保 (Yasuo IIDA)　　**東北大学大学院情報科学研究科**

1. 序

単位円板 U 上で定義された正則関数からなる空間として、 Nevanlinna class, Smirnov class, Hardy spaces 等がよく知られているが、1977 年に M. Stoll が Smirnov class と Hardy spaces の中間に位置する空間 N^p を導入した。本講演では、望月望氏（東北大学情報科学）との研究によって得られた N^p における線形等長写像の結果について報告する。

2. 準備

まず、代表的な空間である Nevanlinna class, Smirnov class, Hardy spaces の定義を与える：

定義 1

$U = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$, $T = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$ とする。また、$d\sigma$ を T 上の normalized Lebesgue measure とする。さらに f を U 上の正則関数とする。

1. $\displaystyle \lim_{r \to 1^-} \int_T \log(1 + |f(r\zeta)|)\, d\sigma(\zeta) < +\infty$ を満たすとき、 $f \in N$ とする。

$f \in N$ のとき、$f^*(\zeta) := \displaystyle\lim_{r \to 1^-} f(r\zeta)$ が a.e. $\zeta \in T$ で存在することが知られている。

2. $f \in N$ で、$\displaystyle \lim_{r \to 1^-} \int_T \log(1 + |f(r\zeta)|)\, d\sigma(\zeta) = \int_T \log(1 + |f^*(\zeta)|)\, d\sigma(\zeta)$ を満たすとき、 $f \in N_*$ とする。

3. $0 < p < \infty$ に対し　$\displaystyle \lim_{r \to 1^-} \int_T |f(r\zeta)|^p\, d\sigma(\zeta) < +\infty$ を満たすとき、 $f \in H^p$ とする。

また、U 上の有界正則関数全体を H^∞ で表す。

N を Nevanlinna class, N_* を Smirnov class, H^p $(0 < p \leqq \infty)$ を Hardy spaces と呼ぶ。

これらの空間のあいだに、以下のような包含関係が成り立つ：

$$H^\infty \subset H^q \subset H^p \subset N_* \subset N \qquad (0 < p < q < \infty)$$

以上のような包含関係は昔からよく知られていたが、1977 年に M. Stoll は N_* と H^p の間に位置する空間 N^p を導入した（[Sto]）：

定義２

$p > 1$ とする。 U 上の正則関数 f が

$$\lim_{r \to 1^-} \int_T [\log(1 + |f(r\zeta)|)]^p \ d\sigma(\zeta) < +\infty$$

を満たすとき、 $f \in N^p$ とする。

この N^p には、以下の特徴がある：

$$N^p \subset N^q \quad (1 < q < p) \quad , \quad \bigcup_{q>0} H^q \subset \bigcap_{p>1} N^p \quad , \quad \bigcup_{p>1} N^p \subset N_*$$

また、この N^p は距離

(1) $$d_p(f\,,\,g) = \left\{ \int_T [\log(1 + |f^*(\zeta) - g^*(\zeta)|)]^p \ d\sigma(\zeta) \right\}^{\frac{1}{p}} \qquad (f\,,\,g \in N^p)$$

に関して F-algebra（積について連続である、線形完備距離空間）であることが Stoll によって示されている（[Sto]）。

3. H^p , N_* , N^p 上の線形等長写像について

$f \in H^p \quad (0 < p < \infty)$ に対して、

$$\|f\|_p = \left\{ \int_T |f^*(\zeta)|^p \, d\sigma(\zeta) \right\}^{\frac{1}{p}}$$

とおくと、これは $p \geqq 1$ のとき H^p におけるノルムとなる。

一方、 $0 < p < 1$ のとき $\|f\|_p$ は三角不等式を満たさないのでノルムとはならないが、

$$\rho(f\,,\,g) = \|f - g\|_p^p = \int_T |f^*(\zeta) - g^*(\zeta)|^p \, d\sigma(\zeta)$$

とおくと、ρ は H^p における距離を定義する。

そこで、H^p から H^p への線形写像 A が任意の $f \in H^p$ について $\int_T |(Af)^*(\zeta)|^p \, d\sigma(\zeta) = \int_T |f^*(\zeta)|^p \, d\sigma(\zeta)$ を満たすとき、 A を H^p-等長写像と呼ぶことにする。

この H^p-等長写像 については、de Leeuw-Rudin-Wermer （[DRW]）, Forelli（[F]）, Rudin（[R]）らに研究されているが、ここでは後で利用する Rudin の結果を記しておく：

定理１ ([R])

$0 < p < \infty\,, p \neq 2$ とし、$S : H^p \to H^p$ が H^p-等長写像であるとする。このとき $\Psi \in H^p$ と U 上の inner function Φ が存在して、

(2) $$(Sf)(z) = \Psi(z) f(\Phi(z)) \quad , \quad z \in U\,,\, f \in H^p$$

が成り立つ。ここに、T 上の任意の有界な Borel function $h(\zeta)$ に対し、

$$\int_T h(\zeta)\, d\sigma(\zeta) = \int_T h(\Phi^*(\zeta)) |\Psi^*(\zeta)|^p \, d\sigma(\zeta)$$

が成り立つ。

次に、N_* について以下のような距離を定義しよう：

$$d(f\,,\,g)=\int_T \log(1+|f^*(\zeta)-g^*(\zeta)|)\,d\sigma(\zeta)\quad (f\,,\,g\in N_*)$$

この距離 d に関する N_* 上の線形等長写像については、Stephenson によって次の結果が得られている：

定理２（[Ste]）

$T:N_*\to N_*$ が線形等長写像であるとする。このとき U 上の inner function $\Psi\,,\,\Phi$ （ただし、Φ^* は measure-preserving）が存在して、

$$(Tf)(z)=\Psi(z)f(\Phi(z))\quad,\quad z\in U\,,\,f\in N_*$$

となる。

同様のことを N^p でも考えてみる。距離 (1) に関する N^p での線形等長写像について、以下のような結果を得た。これは N_* の場合とまったく同じ形である（[IM]）：

定理３

$p>1$ とし、$A:N^p\to N^p$ が線形等長写像であるとする。このとき U 上の inner function $\Psi\,,\,\Phi$ （ただし、Φ^* は measure-preserving）が存在して、

(3) $$(Af)(z)=\Psi(z)f(\Phi(z))\quad,\quad z\in U\,,\,f\in N^p$$

となる。

逆に、上記のような Ψ と Φ が与えられたとき、(3) は N^p から N^p への線形等長写像となる。

系

$p>1$ とする。$A:N^p\to N^p$ が上への線形等長写像であるとする。このとき $a\,,b\in T$ が存在して、

$$(Af)(z)=af(bz)\quad,\quad z\in U\,,\,f\in N^p$$

となる。

4. 定理３の証明

この定理の証明にあたり、以下の補題を用いる：

補題１

$p>0$ とする。このとき以下の式が成り立つ。

$$(\log(1+x))^p=x^p-\frac{p}{2}x^{p+1}+x^{p+2}\theta(x)\quad (0\leqq x<+\infty)$$

ここで、$\theta(x)$ は有界連続関数である。

補題２

$p>1$ とする。$A:N^p\to N^p$ が線形等長写像であるとき、$A|_{H^p}$ は H^p から H^p への H^p-等長写像になる。

（定理３の証明の概略）

(I) $p \neq 2$ の場合

補題２から Rudin の結果を用いて

$$(Af)(z) = \Psi(z) f(\Phi(z)) \quad (z \in U\,,\ f \in H^p)$$

のように表せる。

ここで、$\Psi = A1 \in H^p$ で、Φ は任意の有界な Borel function h に対して

$$\int_T h(\zeta) d\sigma(\zeta) = \int_T (h \circ \Phi^*)(\zeta) |\Psi^*(\zeta)|^p d\sigma(\zeta)$$

を満たす。

このとき $f \in H^\infty$ を考え、H^∞ が N^p で dense であること、N^p の距離による位相は、U 上広義一様収束する位相よりも強いことを用いて、 (2) が $f \in N^p$ でも成り立つことが分かる。

また、$|\Psi^*(\zeta)| = 1 \quad (a.e.\ \zeta \in T)$ であることを示すために、まず補題１の x のかわりに $|t\Psi^*(\zeta)|$ と $t \quad (t > 0\,, \zeta \in T)$ をおく。ここで $d_p(t\Psi, 0) = d_p(t, 0)\,, \|t\Psi\|_p = t$ であることを利用して

$$\int_T \left(\frac{p}{2} |\Psi^*(\zeta)|^{p+1} - t |\Psi^*(\zeta)|^{p+2} \theta\left(|t\Psi^*(\zeta)|\right) \right) d\sigma(\zeta) = \frac{p}{2} - t\theta(t) \quad (t > 0)$$

を得る。ここで $\dfrac{1}{2} p x^{p+1} - x^{p+2} \theta(x) \geqq 0 \quad (0 \leqq x < +\infty)$ なので、Fatou's lemma より $\displaystyle\int_T |\Psi^*(\zeta)|^{p+1} d\sigma(\zeta) \leqq 1$ が得られる。

よって、 $\|\Psi\|_p = 1$ について Hölder の不等式を適用して $\displaystyle\int_T |\Psi^*(\zeta)|^p d\sigma(\zeta) = \int_T |\Psi^*(\zeta)|^{p+1} d\sigma(\zeta)$ が導かれ、 $|\Psi^*(\zeta)| = 1 \quad (a.e.\ \ \zeta \in T)$ が分かる。

(II) $p = 2$ の場合

$A : N^2 \to N^2$ が線形等長写像であるとする。補題１で $p = 2$ とすると、 $x^3 - x^4 \theta(x) \geqq 0\,, \theta(x) > 0 \quad (0 \leqq x < +\infty)$ を得る。ここで $f \in H^\infty$ とする。このとき補題２より $g := Af \in H^2$ である。補題１で $p = 2$ とし、x に $|tf^*(\zeta)|\,, |tg^*(\zeta)| \quad (t > 0\,, \zeta \in T)$ をおく。このとき、$t > 0$ に対し

$$\int_T \left(|g^*(\zeta)|^3 - t |g^*(\zeta)|^4 \theta\left(|tg^*(\zeta)|\right) \right) d\sigma(\zeta) = \int_T |f^*(\zeta)|^3 d\sigma(\zeta) - t \int_T |f^*(\zeta)|^4 \theta\left(|tf^*(\zeta)|\right) d\sigma(\zeta)$$

が得られる。Fatou's lemma より

$$\int_T |g^*(\zeta)|^3 d\sigma(\zeta) \leqq \int_T |f^*(\zeta)|^3 d\sigma(\zeta)$$

が導かれ、逆の不等式も容易に得られる。

よって、A は H^∞ から H^3 への H^3-等長写像となる。H^∞ は H^3 で dense であること、H^3 の位相は N^2 の位相より強い、ということを利用すると、A は H^3 から H^3 への H^3- 等長写像となる。よって A は

$$(Af)(z) = \Psi(z) f(\Phi(z)) \quad (z \in U\,,\ f \in H^3).$$

の形で表される。 $\Psi = A1$ より、 $\|\Psi\|_2 = \|\Psi\|_3$ が得られるのでこれより $|\Psi^*(\zeta)| = 1 \quad (a.e.\ \ \zeta \in T)$ が分かる。

また、逆に U 上の inner function Ψ , Φ （ただし、Φ^* は measure-preserving）に対して (3) を考えるとき、 $f \in H^\infty$ に対して $d_p(Af\,,0)=d_p(f\,,0)$ が成り立つので、H^∞ が N^p で dense であることを利用すれば、 A が N^p から N^p への等長写像であることが分かる。

参考文献

[DRW] K. de Leeuw , W. Rudin , and J. Wermer , *The isometries of some function spaces* , Proc. Amer. Math. Soc. , **11** (1960) , 694-698

[F] F. Forelli , *The isometries of* H^p , Can. J. Math. , **16** (1964) , 721-728

[IM] Y. Iida and N. Mochizuki , *Isometries of some F-algebras of holomorphic functions* , to appear in Arch. Math.

[R] W. Rudin , L^p*-isometries and equimeasurability* , Indiana Univ. Math. J. , **25** (1976) , 215-228

[Ste] K. Stephenson , *Isometries of the Nevanlinna class* , Indiana Univ. Math. J. , **26** (1977) , 307-324

[Sto] M. Stoll , *Mean growth and Taylor coefficients of some topological algebras of analytic functions* , Ann. Polon. Math. , **35** (1977) , 139-158